Transformaciones de Galileo (*)

Actúa en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ como

$g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} t^g \\ \vec{r}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{v} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau \\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^g \\ \vec{r}^g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau \\ \vec{v} & R & \vec{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = (\vec{x}, t) \longrightarrow (\vec{x}^g, t^g) = x^g$ con

$$\vec{x}^g = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \quad , \quad t^g = t + \tau$$

donde R es una rotación, $\vec{v}$ la velocidad del boost, $\vec{a}$ una t. espacial y τ una traslación temporal. Es un grupo de Lie de dim.

$$3 + 3 + 3 + 1 = 10 \qquad g = g(\overset{\vec{\omega}}{R}, \vec{v}, \vec{a}, \tau) \qquad \vec{\omega} = \varphi \hat{n}$$

contiene rotaciones y traslaciones + boosts como subgrupos.

La ley de composición se obtiene haciendo dos transf. sucesivas

$$(\vec{r}, t)^{g_1 g_2} = ((\vec{r}, t)^{g_2})^{g_1} = (R_2\vec{r} + \vec{v}_2 t + \vec{a}_2, t + \tau_2)^{g_1} =$$

$$= (R_1(R_2\vec{r} + \vec{v}_2 t + \vec{a}_2) + \vec{v}_1(t + \tau_2) + \vec{a}_1, t + \tau_2 + \tau_1)$$

de donde

$$R_{12} = R_1 R_2, \quad \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 + R_1\vec{v}_2, \quad \vec{a}_{12} = \vec{a}_1 + R_1\vec{a}_2 + \vec{v}_1\tau_2, \quad \tau_{12} = \tau_1 + \tau_2$$

que además confirma que es cerrado bajo composición. El neutro es

$$e = g(1, \vec{0}, \vec{0}, 0)$$

y el inverso es $g^{-1} = g(R^{-1}, -R^{-1}\vec{v}, -R^{-1}\vec{a} + R^{-1}\vec{v}\tau, -\tau)$ (da igual calcularlo por la derecha o por la izqda.)

Para una t. infinitesimal

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\omega} \times \vec{r} + t\,\delta\vec{v} + \delta\vec{a}, \qquad \delta t = \delta\tau$$

y también, aplicando dos t. inf. sucesivas

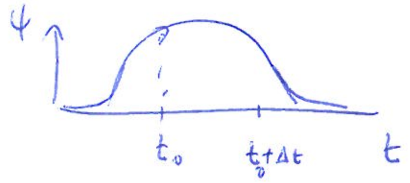
$\cancel{\delta_{12}\vec{r} = \delta_1 \; \delta_2\vec{\omega} \times \vec{r}}$

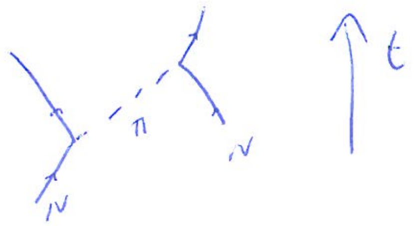
(generadores)

(*) G Galileo extendido incluye además P y T

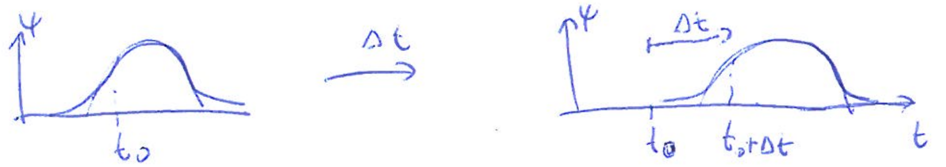
$$|\psi(t)\rangle = \overset{U(\Delta t)}{\overset{\shortparallel}{e^{-i\Delta t \hat{H}}}}\,|\psi(t_0)\rangle$$ es como se ve ψ un tiempo Δt después

= punto de vista pasivo (el observador se ha movido de $t = t_0$ a $t_f = t_0 + \Delta t$)





si el estado se mueve activamente por Δt



$$\overset{\Delta t}{\overset{\shortparallel}{}} \quad e^{-i\tau G_t}$$

el observador, que no se mueve de t_0, verá $|\psi'\rangle = \underset{U(-\Delta t)}{\underset{\shortparallel}{e^{+i\Delta t \hat{H}}}}|\psi_0\rangle$

$\Rightarrow$ $-\hat{H}$ generador de la t. activa.

Galileo $\quad x = (\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\delta x = (\delta\vec{\omega}\times\vec{r} + t\,\delta\vec{v} + \delta\vec{a} \,,\, \delta\tau)$$

$$\begin{aligned}
\delta G &= -i\,\delta x^\mu \partial_\mu = -i\,\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla} - i\,\delta t\,\partial_t \\
&= -i\,(\delta\vec{\omega}\times\vec{r} + t\,\delta\vec{v} + \delta\vec{a})\cdot\vec{\nabla} - i\,\delta\tau\,\partial_t \\
&= \delta\vec{a}\cdot\vec{P} + \delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} + \delta\vec{v}\cdot\vec{K} - \delta\tau\,H
\end{aligned}$$

$$\vec{P} = -i\vec{\nabla}$$

$$\vec{J} = -i\,\vec{r}\times\vec{\nabla} = \vec{r}\times\vec{P}$$

en $L^2(\mathbb{R}^4)$

$$\vec{K} = -i\,t\,\vec{\nabla} = t\,\vec{P}$$

$$H = i\,\partial_t$$

$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \qquad [P_i, P_j] = 0 \qquad [K_i, K_j] = 0$

$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k \qquad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \qquad [\vec{J}, H] = 0$

$[K_i, P_j] = 0 \qquad [\vec{P}, H] = 0 \qquad [\vec{K}, H] = -i\vec{P}$

hacer esto en detalle

Ojo rep $L^2(\mathbb{R}^4)$ no física (la física es $L^2(\mathbb{R}^3)$)

q. $[i\partial_t, \vec{r}]$ pero en la $[\hat{H}, \vec{r}] \neq 0$.

$\vec{r}$ no pertenece al el conm. depende la rep (aunque $\vec{r}$ existe)

usar $[A, \;]$ (o $[\;, A]$) derivaciones.

$$\langle M_{hh} M^{\dagger}_{hh} M_{he} M^{\dagger}_{eh} \rangle$$

$$A^2 B_1 = A^2 (B_2 + D_B) = D_B(A^2)$$

$$A(B_2 + D_B)^2 = AB_2^2 + 2AB_2 D_B + AD_B^2$$

$$= D_B^2 A + AB^2 + 2(D_B A)B$$

$$\delta_1(\vec{r}, t) = (\delta_1 \vec{\omega} \times \vec{r} + t\,\delta_1 \vec{v} + \delta_1 \vec{a},\ \delta_1 \tau)$$

$$\delta_1 \delta_2 (\vec{r}, t) = \left(\delta_1 \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} \delta_2 \vec{\omega} \times \vec{r} \\ + t\,\delta_2 \vec{v} + \delta_2 \vec{a} \end{pmatrix} + \delta_2 t\, \delta_1 \vec{v},\ 0\right)$$

$$\delta_{[1,2]} = [\delta_1, \delta_2] = \delta_{12} - \delta_{21}$$

$$(\vec r, t) \xrightarrow[2]{} (\vec r + \delta_2 \vec r,\ t + \delta_2 t)$$
$$= (\vec r + \delta_2\vec\omega \times \vec r + t\,\delta_2\vec v + \delta_2 \vec a,\ t + \delta_2 \tau)$$

$$\xrightarrow[1]{} (\vec r + \delta_2\vec\omega\times\vec r + t\,\delta_2\vec v + \delta_2\vec a + \delta_1\vec\omega\times(\vec r + \delta_2\vec\omega\times\vec r + t\,\delta_2\vec v + \delta_2\vec a)$$
$$+ (t+\delta_2\tau)\,\delta_1\vec v + \delta_1\vec a,\ t + \delta_2\tau + \delta_1\tau) = (\vec r, t) + \delta_{12}(\vec r, t)$$

$$\delta_{[1,2]}(\vec r, t) = (\delta_{12} - \delta_{21})(\vec r, t)$$
$$= (\delta_1\vec\omega\times(\delta_2\vec\omega\times\vec r) - \delta_2\vec\omega\times(\delta_1\vec\omega\times\vec r) + t\,\delta_1\vec\omega\times\delta_2\vec v - t\,\delta_2\vec\omega\times\delta_1\vec v$$
$$+ \delta_1\vec\omega\times\delta_2\vec a - \delta_2\vec\omega\times\delta_1\vec a + \delta_2\tau\,\delta_1\vec v - \delta_1\tau\,\delta_2\vec v,\ 0)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{[1,2]}\vec\omega = (\delta_1\vec\omega \times \delta_2\vec\omega)$$
$$\delta_{[1,2]}\vec v = \delta_1\vec\omega\times\delta_2\vec v - \delta_2\vec\omega\times\delta_1\vec v$$
$$\delta_{[1,2]}\vec a = \delta_1\vec\omega\times\delta_2\vec a - \delta_2\vec\omega\times\delta_1\vec a + \delta_2\tau\,\delta_1\vec v - \delta_1\tau\,\delta_2\vec v$$
$$\delta_{[1,2]}\tau = 0$$

Quizás mejor

$$\delta_{[12]}a^k = \delta_{12}a^k - \delta_{21}a^k = c_{ij}{}^k\,\delta_1 a^i\,\delta_2 a^j$$

y calcular $\delta_{12}\vec v$, $\delta_{21}\vec v$ etc por separado

usando la ley de multiplicación $R_{12} = R_1 R_2$ ...

podemos mostrar aquí si $\delta_2 \vec r = \delta\vec\omega\times\vec r$ $\quad \delta_{12}\omega = \delta_1\vec\omega\times(\delta_2$

$$\vec r \xrightarrow[2]{} \vec r + \delta_2\vec\omega\times\vec r \xrightarrow[1]{} \vec r + \delta_2\vec\omega\times\vec r + \delta_1\vec\omega\times(\vec r + \delta_2\vec\omega\times\vec r)$$
$$= \vec r + (\delta_1\vec\omega + \delta_2\vec\omega)\times\vec r + \delta_1\vec\omega\times(\delta_2\vec\omega\times\vec r)$$
$$\delta_1\vec\omega\times(\delta_2\vec\omega\times\vec r) = \delta_1\vec\omega\cdot\vec r\,\delta\vec\omega_2 - \delta_1\vec\omega\cdot\delta_2\vec\omega\,\vec r$$

$$= \vec r + (\delta_1\vec\omega + \delta_2\vec\omega)\times\vec r$$
$$+ \frac12(\delta_1\vec\omega\times\delta\vec\omega_2)\times\vec r + \frac12\delta_1\vec\omega\cdot\delta_2\vec\omega\,\vec r$$

$$R_{12}\vec{u} = R_1 R_2 \vec{u} = R_1(\vec{u}+\overset{\delta}{\vec{\omega}_2}\times\vec{u}) = \vec{u}+\overset{\delta\ \text{etc.}}{\vec{\omega}_2}\times\vec{u}+\vec{\omega}_1\times\vec{u}+\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{u})$$

$$\delta R_{[12]}\vec{u} = \vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{u}) - \vec{\omega}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{u})$$

$$= (\vec{\omega}_1\cdot\vec{u}\,\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2\,\vec{u}) - X_{12} = (\vec{\omega}_1\cdot\vec{u})\vec{\omega}_2 - (\vec{\omega}_2\cdot\vec{u})\vec{\omega}_1$$

$= (\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2)\times\vec{u}$ bajo rotaciones $\qquad R_{[1,2]} = 1 + (\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2)\times$

$$\delta_{[1,2]}\vec{\omega} = \delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{\omega}$$

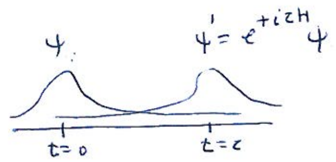
$$\delta_{[12]}\vec{v} = (\delta_1\vec{v} + \delta_2\vec{v} + \delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{v}) - X_{12} = \delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\omega}\times\delta_1\vec{v}$$

$$\delta_{[12]}\vec{a} = \delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{a} - \delta_2\vec{\omega}\times\delta_1\vec{a} + \delta_1\vec{v}\,\delta_2\tau - \delta_2\vec{v}\,\delta_1\tau$$

$$\delta_{[12]}\tau = 0$$

Para los generadores asociados tomamos el siguiente convenio

$$-i\delta G = -i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} - i\delta\vec{v}\cdot\vec{K} - i\delta\vec{a}\cdot\vec{P} + i\delta\tau H$$



por def. de $\vec{J}, \vec{K}, \vec{P}, H$ (H genera t. temporales pasivas y $\vec{J}, \vec{K}, \vec{P}, -H$ activas)

Notar que $\vec{\omega}, \vec{v}, \vec{a}, \tau$ son coord. normales cada uno en su subgrupo correspondiente pero no en el grupo completo, de modo que

$$U(R,\vec{v},\vec{a},\tau) = \underbrace{e^{i\tau H} e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}}_{\text{conmutan}} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{v}} e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}} \underset{\text{en general}}{\neq} e^{i\tau H - i\vec{a}\vec{P} - i\vec{K}\vec{v} - i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$$

Ahora pueden leerse las ctes de estructura de $\delta_{[12]}a_k = C_{ijk}\,\delta_1 a_i\,\delta_2 a_j$

por ej. para rotaciones $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ $\qquad [G_i, G_j] = i C_{ijk} G_k$

o bien directamente, usando $i\delta_{[12]}G = [\delta_1 G, \delta_2 G]$

$$[\delta_1\vec{\omega}\cdot\vec{J}, \delta_2\vec{\omega}\cdot\vec{J}] = i\delta_{[12]}\vec{\omega}\cdot\vec{J} = i\,\delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{\omega}\cdot\vec{J}$$

de donde $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$

$$g(1,\vec{0},\vec{a},0)\ g(R,\vec{0},\vec{0},0)\ g(1,\vec{0},\vec{a},0)^{-1}$$

$$= g(R,\vec{0},\vec{a},0)\ g(1,\vec{0},-\vec{a},0)$$

$$= g(R,\vec{0},\vec{a}-R\vec{a},0) \qquad T_a R T_a^{-1} = T_{a-Ra} R$$

$$= R T_{-a+R^{-1}a}$$

$$g(R,\vec{0},\vec{0},0)\ g(1,\vec{0},\vec{a},0)\ g(R,\vec{0},\vec{0},0)^{-1}$$

$$= g(R,\vec{0},R\vec{a},0)\ g(R^{-1},\vec{0},\vec{0},0)$$

$$= g(1,\vec{0},R\vec{a},0) \qquad R T_{\vec{a}} R^{-1} = T_{R\vec{a}}$$

$$g(R) g \qquad R_1 R(\hat{n},\phi) R_1^{-1} = R(R_1\hat{n},\phi)$$

$\vec{\sigma} \cdot P \sim P$

$$T_{\vec{a}}\, \vec{r}\, T_{\vec{a}}^{-1} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\hat{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle = \vec{r}\,|\vec{r}\rangle \qquad T_a \hat{\vec{r}}\, T_a^{-1}\,|\vec{r}\rangle = T_a \hat{\vec{r}}\,|\vec{r}-\vec{a}\rangle = (\vec{r}-\vec{a})\,|\vec{r}\rangle$$

$$\cancel{T_a \hat{r}\, T_a^{-1}\, T_a\,|\vec{r}\rangle = T_a \hat{r}\, T_a^{-1}\,|\vec{r}+\vec{a}\rangle} \qquad \Rightarrow T_a\, \hat{r}\, T_a^{-1} = \hat{r} - a$$

$$\cancel{(\vec{r}-\vec{a})\,|\vec{r}-\vec{a}\rangle}$$

$$X^{g_1 g_2} = U_{g_1 g_2} X U_{g_1 g_2}^{-1} = U_{g_1} X^{g_2} U_{g_1}^{-1} = (X^{g_2})^{g_1}$$ (uso $U^{-1} X U$ [illegible]

$$\delta_{\vec{\omega}} \vec{P} = -\delta\vec{\omega} \times \vec{P} \quad \rightarrow \quad U(R)\, \vec{P}\, U^{-1}(R) = R^{-1} \vec{P}$$

$$U_{R_2} \vec{P}\, U_{R_2}^{-1} = R_2^{-1} \vec{P}$$

$$U_{R_1} U_{R_2} \vec{P}\, U_{R_2}^{-1} U_{R_1}^{-1} = U_{R_1} (R_2^{-1} \vec{P})\, U_{R_1}^{-1} = R_2^{-1} (R_1^{-1} \vec{P})$$

$$= (R_1 R_2)^{-1} \vec{P} = U_{R_1 R_2} \vec{P}\, U_{R_1 R_2}^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{\delta\vec{\omega}}{N} \times\right)^N \xrightarrow[N \to \infty]{} R(\vec{\omega}) = e^{+i \vec{\omega} \cdot \vec{J}}$$

matrici 3x3

$$(+i\, \omega_k J_k)_{ij} V_j = (-\vec{\omega} \times \vec{V})_i = -\epsilon_{ijk} \omega_j V_k = \epsilon_{ijk} \omega_k V_j$$

$$+i\, (J_k)_{ij} = \epsilon_{ijk} \qquad (J_k)_{ij} = -i\, \epsilon_{ijk}$$

(sólo hay que tener cuidado de que con el convenio usado el generador es $-H$ en vez de H):

~~$[\delta\omega_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$~~

$$[\delta_1\vec{\omega}\cdot\vec{J} + \delta_1\vec{v}\cdot\vec{K} + \delta_1\vec{a}\cdot\vec{P} - \delta_1\tau H,\ \delta_2\vec{\omega}\cdot\vec{J} + \delta_2\vec{v}\cdot\vec{K} + \delta_2\vec{a}\cdot\vec{P} - \delta_2\tau H]$$

$$= i\,\delta_{[12]}\vec{\omega}\cdot\vec{J} + i\,\delta_{[12]}\vec{v}\,\vec{K} + i\,\delta_{[12]}\vec{a}\cdot\vec{P} - i\,\delta_{[12]}\tau\, H$$

de donde

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k\,, \qquad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k\,, \qquad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k$$

$$[K_i, H] = -i P_i\,, \qquad [J_i, H] = 0\,, \qquad [K_i, K_j] = 0\,, \quad [K_i, P_j] = 0$$

$$[P_i, P_j] = 0\,, \quad [P_i, H] = 0$$

comentar subgrupos, subgrupos invariantes (=no dep. del observador) ej $\{\vec{P}\}$, $\{\vec{P}, \vec{K}\}$, pero no $\{\vec{J}\}$, $\{\vec{K}\}$ — por subálgebras; ideales

Usando $\delta X = -i[\delta G, X]$ con $\delta G = \delta\vec{\omega}\cdot\vec{J}$, $X = \vec{P}$, se deduce

$$\delta_\omega \vec{P} = -i[\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J}, \vec{P}] = -\delta\vec{\omega}\times\vec{P}$$

$\equiv$ bajo rotaciones $\vec{P}$ se transf. como un vector. Al mismo tiempo tomando $X = \vec{J}$, $\delta G = \delta\vec{a}\cdot\vec{P}$, la misma relación de conmutación dice

$$\delta_a \vec{J} = -i[\delta\vec{a}\cdot\vec{P}, \vec{J}] = -i\,\delta a_j\, i\epsilon_{jlk} P_k = -\delta\vec{a}\times\vec{P}$$

$\equiv$ $\vec{J}$ el momento angular tiene una parte extrínseca consistente con

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $\quad \vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{a}$. $\quad$ ($|\vec{x}\rangle \to |\vec{x}+\vec{a}\rangle$)

¿no falta ∂_t si $X(t)$?

$[J_i, H] = 0 \Rightarrow$ H escalar rot. y $\vec{J}$ cte de mov. $\qquad \delta_\tau = +i[\delta\tau H, \ ] + \delta\tau\,\partial_t$

Más curiosa es $[K_i, P_j] = 0$ que dice que $\delta_v \vec{P} = 0$ bajo boosts $\vec{r} \to \vec{r} - \delta\vec{v}\,t$

lo cual no es razonable: $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\quad \delta\vec{p} = -m\,\delta\vec{v}$

debería esperarse $[K_i, P_j] = -i\,\delta_{ij}\, m \qquad m =$ masa de la partícula.

$-m\,\delta\vec{v} = \delta_v\vec{P} = -i[\delta\vec{v}\cdot\vec{K}, \vec{P}]$ $\qquad$ pero m no está en el grupo de Galileo

(*) Además $[K, K] = 0 \Rightarrow$ subgrupo abeliano, ...

$L^2(\mathbb{R})$

En principio, si admito una extensión central

$$[P,H] = -ia, \qquad [K,H] = -iP - ib, \qquad [K,P] = -iM$$

a, b, M c-num.

De entrada postulo $\delta_a H = 0$ (ins. bajo rotaciones) $\Rightarrow a = 0$

ó P cte de mov. sin dep. expl. en t.

Y absorbo b en P (redef.)

$$[P,H] = 0, \qquad [K,H] = -iP, \qquad [K,P] = -iM$$

$$\Rightarrow H = f(P) \qquad K = -MX + h(P)$$

($K = -MX$ satura la relac.)

[En general $[P, f(X,P)] = -i\partial_X f(X,P)$ $\quad$ $f(X,P)$ ordenado $= \sum c_{nm} X^n P^m$ para $f(x,y) \mapsto f(X,P)$]

$$[K,H] = -M[X, f(P)] = -Mif'(P) = -iP$$

$$\Rightarrow f(P) = \frac{P^2}{2M} + cte$$

$$P = -i\partial_x \qquad H = \frac{P^2}{2M} + cte \qquad K = -MX + h(P)$$

esto se ha postulado.

Para ver esto consideremos el caso 1+1 dim. (no hay rotaciones)

$$\underbrace{[K,K] = [P,P]}_{\text{triviales}} = [P,H] = [K,P] = 0\,, \quad [K,H] = -iP$$

buscamos sol. en el espacio $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ de una partícula. Además impongo* $P = -i\frac{d}{dx}$ de modo que $T_a|x\rangle = |x+a\rangle$, $\psi^a(x) = \psi(x-a)$

En $\mathcal{H}$ todos los op. se pueden construir con P y $\hat{x}$ $(\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle)$

(P y $\hat{x}$ forman un conjunto irreducible juntos, cada uno es un CCOC)

$[K,P] = [H,P] = 0 \Rightarrow K, H$ son funciones de P sólo, pero entonces $[K,H]$ debería anularse en contra de $[K,H] = -iP$. Se deduce que el grupo de Galileo no admite una rep en este espacio.

Si se impone $H = \frac{P^2}{2M}$,

$[K,H] = \frac{1}{2M}([K,P]P + P[K,P]) = -iP$ es consistente con

$[K,P] = -iM$

(elección mínima + f(P))

en este caso sí hay solución tomando $K = -\hat{x}M$. (Esto garantiza que la modificación es consistente con Jacobi). La modificación no es arbitraria: M es un c-núm. e indica que tenemos (necesariamente) una rep. proyectiva del grupo de Galileo cuando éste actúa en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$U(g_1 g_2) = \omega(g_1, g_2)\, U(g_1)\, U(g_2)$ $\quad \omega$ una fase

$U_{[12]} = \omega_{[12]} U_1^{-1} U_2^{-1} U_1 U_2$

$U(g_{[12]})$ $\quad \omega_{[12]} = \delta\omega_{[12]} + C(G_1, G_2)$

comentar: rep. proy. triviales

" " tipo rotaciones (localmente triviales, $e^{-i\frac{\vec{\sigma}\vec{\omega}}{2}}$

" " " Galileo ω no eliminable localmente.

* $P = 1$, $K = \hat{x}$, $H = +i\frac{d}{dx}$ es solución

$$\overset{L}{\delta G} = \delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} + \delta\vec{v}\cdot\vec{K} + \delta\vec{a}\cdot\vec{P} - \delta\tau H + \delta\varphi\, 1$$

$$[\delta_1 \overset{L}{G}, \delta_2 \overset{L}{G}] = i\, \delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{\omega}\cdot\vec{J} + i(\delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\omega}\times\delta_1\vec{v})\vec{K}$$

$$+ i(\delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{a} - \delta_2\vec{\omega}\times\delta_1\vec{a} + \delta_1\vec{v}\,\delta_2\tau - \delta_2\vec{v}\,\delta_1\tau)\vec{P}$$

$$+ i\,\delta_{[12]}\varphi\, 1$$

$$[\delta_1 \overset{L}{G}, \delta_2 \overset{L}{G}] = \delta_1 a^i \delta_2 a^j [G_i, G_j] = \delta_1 a^i \delta_2 a^j (i c_{ij}{}^k G_k + i c_{ij})$$

$$= i\,\delta_{[1,2]} a^k G_k + i\,\delta_{[12]}\varphi\, 1$$

$$0 = [[J_i, J_j], P_k] + [[J_j, P_k], J_i] + [[P_k, J_i], J_j]$$

$$= [\, i\epsilon_{ijl} J_l, P_k] + [\, i\epsilon_{jkl} P_l, J_i] + [-i\epsilon_{ikl} P_l, J_j]$$

$$= i\epsilon_{ijl}\, i\alpha\delta_{lk} + i\epsilon_{jkl} (-) i\alpha \delta_{il} - i\epsilon_{ikl} (-) i\alpha\delta_{jl}$$

$$= \alpha\,\epsilon_{ijk}(-1+1+1) = \alpha\,\epsilon_{ijk} \Rightarrow \alpha = 0$$

o con $\delta\varphi$. Muestro que $M^{\neq 0}$ es consistente (pongo $\alpha, \beta = 0$)

$$0 = \delta_{[[1,2],3]}\varphi + \text{cíclico}$$

$$0 = M(\delta_{[12]}\vec{a}\cdot\delta_3\vec{v} - \delta_3\vec{a}\cdot\delta_{[12]}\vec{v}) + \text{cíclico}$$

$$= M((\delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{a} + \delta_1\vec{v}\,\delta_2\tau)\cdot\delta_3\vec{v} - \delta_3\vec{a}\cdot\delta_1\vec{\omega}\times\delta_2\vec{v}) - X_{12} + \text{cíclico}$$

se anula idénticamente, por ej.

$$\delta_1\vec{v}\,\delta_2\tau\,\delta_3\vec{v} - \delta_2 v\,\delta_1\tau\,\delta_3 v$$
$$+\ \delta_2 v\,\delta_3\tau\,\delta_1 v - \delta_3 v\,\delta_2\tau\,\delta_1 v$$
$$+\ \delta_3 v\,\delta_1\tau\,\delta_2 v - \delta_1 v\,\delta_3\tau\,\delta_2 v$$

Una forma práctica de proceder es extender (centralmente) el grupo con una fase $U(g,\varphi) \equiv U(g)\, e^{-i\varphi}$ de modo que la rep. no sea proyectiva:

$$U(g_{12}, \varphi_{12}) = U(g_1, \varphi_1)\, U(g_2, \varphi_2) \,, \qquad g_{12} = g_1 g_2$$

$$e^{-i\varphi_{12}} U(g_{12}) = e^{-i\varphi_1} U(g_1)\, e^{-i\varphi_2} U(g_2) \Rightarrow$$

$$e^{-i\varphi_{12}} = e^{-i\varphi_1} e^{-i\varphi_2}\, \omega^{-1}(g_1, g_2)$$ es la ley de multiplicación de fases

Para que sea consistente hace falta que defina un grupo (asociativo), lo cual equivale a Jacobi a nivel de álgebra de Lie:

$$-i\delta G = -i\delta\vec{a}\cdot P - i\,\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} - i\,\delta\vec{v}\cdot\vec{K} + i\,\delta\tau H - i\,\delta\varphi\, 1 \qquad i\,\delta_{[12]} G = [\delta_1 G, \delta_2 G]$$

Puesto que los elementos del grupo original se multiplican igual que antes lo único nuevo es el término $-i\,\delta_{[12]}\varphi$ ($\delta_1\varphi 1$ y $\delta_2\varphi 1$ se cancelan dentro del conmutador)

La forma más general (teniendo ya en cuenta inv. bajo rotaciones)** es

$$\delta_{[12]}\varphi = \alpha(\delta_1\vec{\omega}\cdot\delta_2\vec{a} - \delta_2\vec{\omega}\,\delta_1\vec{a}) + \beta(\delta_1\vec{\omega}\cdot\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{\omega}\cdot\delta_1\vec{v}) + M(\delta_1\vec{a}\cdot\delta_2\vec{v} - \delta_2\vec{a}\,\delta_1\vec{v})$$

entonces $0 = [[12],3] + \text{cíclico}^{*} \Rightarrow$

$$0 = \alpha(\delta_{[12]}\vec{\omega}\cdot\delta_3\vec{a} - \delta_3\vec{\omega}\,\delta_{[12]}\vec{a}) + \dots + \text{cíclico} \qquad \forall\, \delta_{1,2,3}\vec{\omega}, \vec{v}, \vec{a}$$

implica $\alpha = \beta = 0$ necesariamente. El término con M se anula sólo

Por ejemplo $[J_i, P_j] = i\,\epsilon_{ijk} P_k + i\,\alpha\,\delta_{ij}$ $\qquad [J_i, K_j] = i\,\epsilon_{ijk} K_k + i\beta\,\delta_{ij}$

$$0 = [[J_i, J_j], P_k] + [[J_j, P_k], J_i] + [[P_k, J_i], J_j] = \qquad [P_i, K_j] = i\,\delta_{ij} M$$

$$= (\alpha{=}0) + i^2\alpha\,\epsilon_{ijk}) + (\alpha{=}0) + (\alpha{=}0)$$

$$= -\alpha\,\epsilon_{ijk} \Rightarrow \alpha = 0$$

(nótese además que $\alpha, \beta \neq 0$ viola paridad)

* $0 = [[\delta_1, \delta_2], \delta_3] + \text{cíclico} = \delta_{[[12],3]} + \text{cíclico}$, $0 = \delta_{[[12],3]}\varphi + \text{cíclico}$

** $[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k + i\,\alpha_k\,\epsilon_{ijk}$ rompe inv. rot. $\vec{a}$, sin [illegible] M [illegible] extensión

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + H_{int} \qquad \text{↓ galileo}$$

$$[\vec{K}_i, P_j] = -iM\delta_{ij}$$

$$[\vec{K}, H] = -i\vec{P}$$

$$[\vec{K}, H] = -i\vec{P} = \frac{1}{2M}\{[\vec{K}, P_j], P_j\} + [\vec{K}, H_{int}]$$

$$= -\frac{i}{M} M\vec{P} + [\vec{K}, H_{int}] \Rightarrow [\vec{K}, H_{int}] = 0$$

$$0 = [\vec{J}, H] = [\vec{J}, H_{int}] \Rightarrow [\vec{J}, H_{int}] = 0$$

$$0 = [\vec{P}, H] \Rightarrow [\vec{P}, H_{int}] = 0$$

$$0 = [H, H] \Rightarrow [H, H_{int}] = 0$$

además $[\vec{R}, H_{int}] = [\vec{S}, H_{int}] = 0$

Def. $\vec{R} \equiv \dfrac{t\vec{P}-\vec{K}}{M}$; $\vec{K} = t\vec{P} - M\vec{R}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{K}}{\partial t} + i[H, \vec{K}] = \vec{P} - \vec{P} = 0$

$[R,R]=0$
$[R,P]=i\delta$
$[J,R]=R$

$S \ni \vec{R}$ $\quad [R_i, P_j] = i\delta_{ij}$

$\vec{K}_i = -M\vec{R} \Rightarrow [P_i, K_j] = iM\delta_{ij}$.

también $\vec{K} = -M\vec{R} + t\vec{P}$ está en la misma ...

1) $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{K}}{\partial t} + i[H,\vec{K}] = \vec{P} - \vec{P} = 0$ $\qquad \vec{V}_{cm} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{\vec{P}}{M}$ = cte

2) $\delta_{\vec{v}} \vec{R} = -i[\delta\vec{v}\cdot\vec{K}, \vec{R}] = -\delta\vec{v}\cdot t$ $\quad$ (si $[\vec{R},\vec{R}]=0$)

Def. $\vec{R} = \dfrac{t\vec{P}-\vec{K}}{M}$ $\quad (\Leftarrow \vec{K} = t\vec{P} - M\vec{R}) \Rightarrow 0 = \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{P} - M\dfrac{d\vec{R}}{dt}$

cumple $[R_i, R_j] = 0$, $[R_i, P_j] = i\delta_{ij}$ $\quad (\Leftrightarrow \delta_{\vec{a}} R = -\delta\vec{a})$

$[J_i, R_j] = i\epsilon_{ijk} R_k$ (vector) , $[\vec{K}, \vec{R}] = -it\,\delta_{ij}$ $\quad (\Leftrightarrow \delta_v \vec{R} = -\delta\vec{v}\,t)$

$\delta_\omega R = -\delta\vec{\omega}\times\vec{R}$

$\vec{K} = -M\vec{R}_0$ (posición CM a $t=0$) $\qquad \vec{R} = \vec{V}\cdot t + \vec{R}_0$, $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{M}$, $\vec{R}_0 = -\dfrac{\vec{K}}{M}$

$\Rightarrow \vec{S} = \vec{J} - \vec{L}$ $\quad \vec{L} \equiv \vec{R}\times\vec{P}$ $\qquad [L, S]=0$

$\vec{S}$ cumple $[J_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$, $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$

$[R_i, S_j] = 0$ $\quad [P_i, S_j] = 0$ $\qquad [K_i, S_j] = 0$ $\quad (\delta_v \vec{S} = 0)$ No relativis.

$\Rightarrow \vec{H} = \dfrac{\vec{P}^2}{2M} + H_{int}$ $\qquad \delta H_{int} = 0$ y $[R, H_{int}] = [\vec{S}, H_{int}] = 0$

Galileo.

Para el grupo extendido las relaciones quedan igual que antes excepto

$[P_i, K_j] = i M \delta_{ij}$ donde M es un parámetro (real si la rep. es unitaria) c-num

(conmuta con todo Galileo) que caracteriza la extensión. (puede ser un operador (suma directa de espacios) en principio, NO. Bargmann superselección)

$U_g|x\rangle = |x^g\rangle$

$\psi^g(x) = \psi(x^{g^{-1}})$

Desde luego existen rep. de Galileo (con $M=0$) por ej. en el espacio $\psi(\vec{x}, t)$, pero no en el espacio $\psi(\vec{x})$ que es el que aparece en el problema cuántico.

Si existe un op. vector posición $\vec{R}$ (de la partícula o del C.M.)

$\delta_{\vec{a}} \vec{R} = -\delta\vec{a} = -i[\delta\vec{a}\cdot\vec{P}, \vec{R}]$ bajo traslaciones

$\Rightarrow \quad [R_i, P_j] = i\delta_{ij}$

$\delta_{\vec{a}} \vec{J} = -\delta\vec{a} \times \vec{P}$ se satisface con $\vec{J} = \underbrace{\vec{R}\times\vec{P}}_{\vec{L}} + \vec{S}$, ~~[illegible]~~

$\vec{S} \equiv$ momento angular intrínseco ($\equiv$ que es inv. bajo traslaciones)*

siempre que ~~[illegible]~~ $[P_i, S_j] = 0$ (2ª [illegible])

Para que ~~$\vec{L}$ sea un momento angular~~ $\vec{R}, \vec{S}$ sean vectores bajo rotaciones

$[\vec{R}, \vec{R}] = [\vec{R}, \vec{S}] = 0, \quad [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$

Respecto de los boosts, $\delta_{\vec{a}} \vec{K} = -i[\delta\vec{a}\cdot\vec{P}, \vec{K}] = \delta\vec{a} M = -\delta_{\vec{a}}\vec{R} M$

sugiere $\vec{K} = -M\vec{R}$, sin embargo todas las relaciones con $\vec{K}$ 2ª satisfacen igualmente si $\vec{K} = -M\vec{R} + \alpha\vec{P}$. De entre todas las elecciones posibles tomamos** $\vec{K} = t\vec{P} - M\vec{R}$ de modo que sea cte de mov. (además es consistente con la interpretación de que los boosts son traslaciones que crecen linealmente con t, $\delta_{\vec{v}} \vec{R} = -i[\delta\vec{v}\cdot\vec{K}, \vec{R}] = -i[\delta\vec{v}\, t\vec{P}, \vec{R}] = -\delta\vec{v}\, t$ ok.

Notar $[\vec{K}, \vec{J}]$ vector, lo hace $\vec{L}$, $[\vec{K}, \vec{S}] = 0$

* puede ser $\vec{L}_{int}$ de un sistema de partículas sin espín, por ej.

** Notar t es un parámetro, no un operador

A posteriori se reconoce que se puede def.

$$\vec{R} \equiv \frac{t\vec{P} - \vec{K}}{M}$$

con todas las prop. buenas de un op. posición, cerrando el álgebra de Galileo misma, luego este op. existe siempre (sup. que $M \neq 0$)

$$\vec{R}(t) = \vec{V}t + \vec{R}_0 = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{R}_0 \qquad -M\vec{R}_0 = t\vec{P} - M\vec{R} = \vec{K}$$

Hasta ahora nos hemos ref. a "simetría" en un sentido amplio de transf. físicamente realizables. ¿Por ej. para una partícula en ~~tres~~ dos dimensiones el grupo de rotaciones SO(3) (tridimensionales) no es físicamente realizable y no existen los correspondientes op. generadores infinitesimales, mientras que el grupo SO(2) de rotaciones en un plano sí ~~existe~~ es realizable, con generador $J_3 = -i\frac{d}{d\varphi}$.

Otra cuestión es si la dinámica es invariante bajo las transformaciones de simetría. Este es un concepto de simetría más restringido. En el ejemplo anterior, si ~~el~~ ~~hamiltoniano es invariante bajo rotaciones~~ el sistema físico es isótropo (no hay campo externo que fijen direcciones privilegiadas), el hamiltoniano será invariante y la dinámica será la misma (salvo rotación) para un estado y su rotado.

sí sí $\forall \hat{\phi}, \hat{\psi}, t$ $\quad T_{\hat{\phi}\hat{\psi},t_0} = T_{\hat{\phi}^g,\hat{\psi}^g,t}$

Sea $U(t,t_0)$ el op. de evolución y $U_g(t)$ la t. de simetría en t

la dinámica es invariante si $\quad U(t,t_0)U_g(t_0) = U_g(t)U(t,t_0)$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \quad H(t)U(t,t_0)U_g(t_0) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}U_g(t)\right)U(t,t_0) + U_g(t)H(t)U(t,t_0)$$

$$t_0 = t \Rightarrow \quad [H(t), U_g(t)] = i\frac{\partial}{\partial t}U_g(t)$$

o $\quad i\frac{d}{dt}U_g(t) = \frac{\partial}{\partial t}U_g(t) + i[H(t),U_g(t)] = 0 \quad$ $U_g(t)$ es una cte. del mov.

o $\quad \frac{d}{dt}G(t) = \frac{\partial}{\partial t}G(t) + i[H(t),G(t)] = 0 \quad$ $G(t)$ es una cte. del mov.

este es el th. de Noether

usualmente H, G son indep. del tiempo, y la invariancia de la dinámica se expresa $[H,G]=0$ (sim. en sentido restringido)

Esencialmente se tiene una sim. de la dinámica si U_g forma parte del grupo de sim. en cuestión.

Por inspección del álgebra de Galileo se ve que la simetría implica automáticamente la invariancia de la dinámica (si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

tomando $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{J} = \frac{\partial}{\partial t} H = 0$, estos son ctes del movimiento

(además $\partial_t \vec{R} = \partial_t \vec{S} = 0$)

por otro lado $\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + i[\vec{K}, H] = \vec{P} - i(-i\vec{P}) = 0$. $\vec{K}$ también

Además $0 = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\vec{P} - M\vec{R}) = \vec{P} - M\frac{d\vec{R}}{dt}$, es decir

$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M}$, $\vec{R}$ se mueve a velocidad cte. (notar que $\frac{dM}{dt} \overset{\text{“}\frac{\partial M}{\partial t}\text{''}}{=} 0$

ya que $[K_i, P_j] = -i\delta_{ij} M$ y $\vec{K}, \vec{P}$ son ctes. del mov.)

además $\vec{J}, \vec{P}$ indep. de t requiere $\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 0$ si' deja $\vec{S}$

Respecto de H:

(H no coord. relativas)

$0 = \frac{d\vec{P}}{dt} = -i[\vec{P}, H] = -\frac{\partial H}{\partial \vec{R}} = 0$ H no contiene $\vec{R}$ (usando rep. de posiciones y $\vec{S}$)

$\frac{d\vec{R}}{dt} = -i[\vec{R}, H] = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{\vec{P}}{M}$ ($\frac{\partial}{\partial \vec{P}}$ en rep. de $\vec{P}$ y $\vec{S}$)

$\Rightarrow H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + (\text{indep. de } \vec{P}, \vec{R})$

por $\frac{d}{dt}\vec{P} = 0$, $\frac{d\vec{R}}{dt} \propto \vec{P} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = 0$

además $\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} = -i[\vec{S}, H] = 0$

(Leibniz $\frac{d}{dt}AB = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$ con $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + i[H, \,]$)

$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + H_{int.}$ con $[\vec{R}, H_{int}] = [\vec{P}, H_{int}] = [\vec{S}, H_{int}] = 0$
$= [\vec{J}, H_{int}] = [\vec{K}, H_{int}] = [H, H_{int}]$

$H_{int.}$ es inv. bajo traslaciones, rotaciones y boosts, inv. Galileo.

como $\vec{P}$ se conserva, se puede hacer tnsf. de Galileo a $\vec{P} = 0$, ahí $H = H_{int}$

(separación del C.M.)

Nota: $[\vec{K}, \vec{S}] = 0$, no así en el caso relativista.

gauge $\psi \to e^{iq\Lambda}\psi$

(global) no debe haber [illegible]

$\Rightarrow |q_1\rangle + |q_2\rangle$ no existe

$\rightarrow$ q se conserva absolutamente

$\hat{A}$ observable $(Q_g, \hat{A}) = 0$

$$|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle_{boson} + |\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\rangle_{fermion}$$

$\xrightarrow[\hat{P}_{impar}]{} \; |\;\rangle - |\;\rangle \Rightarrow$ (no distinción hay [illegible])

$\Rightarrow$ la estadística

↳ inmutable $(P, \hat{A}) = 0$ $\hat{A}$ observable

$U(2\pi)(|\text{boson}\rangle + |\text{fermion}\rangle) = +|b\rangle - |f\rangle$

$\|$

$(-1)^{2\hat{J}}$ = univalente $= \hat{T}^2$

$\|$

$(-1)^{\hat{N}_F}$

regla de superselección de Bargmann:

$$U(g) = e^{i\tau H} e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}} e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$$

$$U(g_1 g_2) = \omega(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2)$$

ω es una fase no trivial cuando $M \neq 0$. Esta fase se puede calcular de varias formas. Depende sólo del álgebra de Lie y de M. Una forma es construir $U(g)$ en una rep. concreta (de masa M) y otra forma es usar las relaciones de conmutación. En todo caso se obtiene (salvo cociclos triviales)

$$\omega(g_1, g_2) = e^{-iM\left(\tau_2 \frac{\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \vec{v}_1 \cdot R_1 \vec{a}_2\right)}$$

$\times\, \omega(g_1) \times \omega(g_2) \times \omega^{-1}(g_1 g_2)$

(pero ampliando redef gen. y cambian el álgebra)

Por otro lado en el grupo de Galileo (no centralmente extendido) traslaciones y boosts puros conmutan, en particular

$$\underset{R\ \vec{v}\ \vec{a}\ \tau}{(1, \vec{0}, \vec{0}, 0)} = (1, -\vec{v}, \vec{0}, 0)(1, \vec{0}, -\vec{a}, 0)(1, \vec{v}, \vec{0}, 0)(1, 0, \vec{a}, 0)$$

es la identidad no debe hacer nada físicamente. Un cálculo explícito da

$$U_{\vec{v}}^{-1} U_{\vec{a}}^{-1} U_{\vec{v}} U_{\vec{a}} = e^{iM\vec{a}\cdot\vec{v}}\, U_{-\vec{v},-\vec{a}}\, e^{iM\vec{a}\cdot\vec{v}}\, U_{\vec{v}\vec{a}} =$$

$$= e^{2iM\vec{a}\cdot\vec{v}} e^{iM(-\vec{v}\cdot\vec{a})} = e^{iM\vec{a}\cdot\vec{v}}$$

(múltiplo del op. identidad si M es un núm. como debe ser)

Por razones físicas esto no debe tener efecto físico. Lo cual se cumple sobre estados $|\psi, M\rangle$ con masa M definida, pero no sobre estados del tipo $|\psi_1, M_1\rangle + |\psi_2, M_2\rangle$ $(M_1 \neq M_2)$. Se deduce que ~~estos~~ estos estados no son físicamente realizables (en la aprox. no relativista). Es un ejemplo de regla de superselección: cada M define un subespacio coherente (salvo nuevas reglas de superselección) y no hay op. observables interacciones que los mezclen (no serían invariantes bajo $U_{-v}U_{-a}U_v U_a$) Los espacios son inv. forever

ídem rotación

permutaciones

inv. temporal

gauge

$M = \sum_i m_i$ se conserva en Galileo