problemas:

- calcular $\omega(g_1, g_2)$ usando la rep. 1+1 dim.
- obtener U_g en $\{\psi(\vec{x},t)\}$ de Galileo
- obtener U_g en $\{\psi(\vec{x},t),\ \underset{\frac{\vec{p}^2}{2m}}{H}\psi = i\partial_t\psi\}$ y obtener ω
- probar que extensión central $\Longleftrightarrow$ rep. proyectiva
- estudiar extensiones centrales de $SU(2)$, Poincaré o Lorentz
- estudiar Casimires de Galileo
- calcular $\vec{K}$ Poincaré con $\vec{S}\neq 0$ en detalle. Obtener $\vec{K}, \vec{S}$ de $J_{\mu\nu}, P_\mu$.

Ideas para problemas:

¿son estas coord. normales?

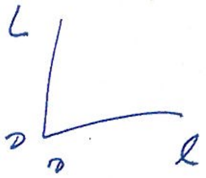
+ obtener la ley de composición de SU(2) (SO(3))
- forma general de una rotación
+ obtener $\xi = \operatorname{atanh}(v)$, generador de boosts en 1+1 dim.

- obtener los dos grupos de Lie posibles de dim. 2.
+ ~~alge~~ generadores y álgebra del grupo euclídeo ($\mathbb{R}^2$)
+ Campbell-Hausdorff hasta $O(\epsilon, \xi^3)$
- ver si cierto δX es una variación (de un grupo dado) $\delta_{[1,2]} = [\delta_1, \delta_2]$
- ~~ley de composición~~ relaciones de conmutación de SU(2) usando la ley de composición

---

- Tutorías
- Sala ordenadores liberada, ~~[illegible]~~ | para profesorado.
- Laboratorio nuevo para becarios.
- Curso master.

- $g \xrightarrow{\in G} U_g$ op. unitario salvo fase [illegible]   G ej: rotaciones traslaciones inversiones



- $|\psi\rangle \to |\psi^g\rangle = U_g|\psi\rangle$ $\langle\psi_g|\phi_g\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$

- $A \to A^g = U_g A U_g^{-1}$ ($A^{g\dagger} = A^g$ si $A^\dagger = A$)

$\langle\psi|A|\phi\rangle$ inv.

- activa o pasiva

- $g_1 g_2 \to U(g_1 g_2) = w(g_1 g_2)\, U(g_1)\, U(g_2)$

- coordenadas

- $U(\delta a) = 1 - i\delta G$

- $\delta G = \delta a_i G_i$ $\delta G_i = \delta G_i^\dagger$

- $e^{-i\bar{a}_i G_i}$

ej: rotaciones
traslaciones
boost.

$e^{ky}(k\psi(y)$

$+ \psi'(y))\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{L\,2k e^{2ky}}{e^{2k}-1}$$

- traslaciones

- $L = \{a_i G_i\}$ álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ ej: $\vec{J}$

usar Campbell-Hausdorff con t

- ~~$U_{(12)} \to G_{(12)} = -i[G_1, G_2]$~~

~~$g_{(12)}$~~

---

estado físico $\quad \hat{\psi} = \{\lambda \psi\} \quad \psi \in \mathcal{H}$

$\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{H}}$

espacio proyectivo

$\hat{\psi} \xrightarrow[g]{} \hat{\psi}^{g}$

invertible

$$T_{\hat{\psi},\hat{\phi}} = \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\|\psi\|^2 \cdot \|\phi\|^2}$$

$$U(\lambda|\psi_1\rangle + \mu|\psi_2\rangle) = \begin{cases} \lambda U|\psi_1\rangle + \mu U|\psi_2\rangle & \text{lineal} \\ \lambda^* U|\psi_1\rangle + \mu^* U|\psi_2\rangle & \text{antilineal} \end{cases}$$

lineal

unitario $\quad U^{-1} = U^{\dagger}$

($\langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle = \langle A\psi|\phi\rangle$ lineal

$\langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle = \langle A\psi|\phi\rangle^*$ antilineal)

U unitario

$$\langle\psi^g|\phi^g\rangle = \langle U\psi|U\phi\rangle = \begin{cases} \langle\psi|U^{\dagger}U|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle \\ \langle\psi|U^{\dagger}U|\phi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle^* \end{cases}$$

MECÁNICA CUÁNTICA II

L. L. Salcedo
Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear,
Universidad de Granada, E-18071 Granada, Spain
E-mail: salcedo@ugr.es

24 de septiembre de 2013

Resumen

Apuntes INcompletos de la asignatura. Versión v1.0., 2010-2013.
Se ruega comunicar los errores o imprecisiones que puedan encontrarse a salcedo@ugr.es

1. Simetrías

1.1. Simetrías en mecánica cuántica. Grupos de Lie y representaciones.

En mecánica cuántica un sistema físico tiene asociado un espacio de Hilbert complejo separable $\mathcal{H}$ con vectores $|\psi\rangle$. Cada estado viene representado por un rayo $\hat{\psi}$ (subespacio de dimensión 1 de $\mathcal{H}$)

$$\hat{\psi} = \{\lambda|\psi\rangle, \lambda \in \mathbb{C}\}. \tag{1.1}$$

El conjunto de rayos forma el espacio proyectivo $\hat{\mathcal{H}}$. El vector $|\psi\rangle$ es un representante de $\hat{\psi}$ (es decir $|\psi\rangle \in \hat{\psi}$) que a menudo se elige normalizado, quedando entonces la ambigüedad de una fase (número complejo de módulo 1).

Se denomina *transformación* del sistema a toda biyección g de $\hat{\mathcal{H}}$ en $\hat{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} g : \hat{\mathcal{H}} &\to \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\psi} &\mapsto \hat{\psi}^g \end{aligned} \tag{1.2}$$

El conjunto de transformaciones forma un grupo.

La *probabilidad de transición* entre los estados $\hat{\psi}$ y $\hat{\phi}$, es decir, la probabilidad de encontrar el estado $\hat{\phi}$ cuando se mide el sistema en estado $\hat{\psi}$, es

$$T_{\hat{\phi},\hat{\psi}} = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|^2}{||\phi||^2||\psi||^2}. \tag{1.3}$$

Por ejemplo, $\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}$ proporciona la *amplitud de probabilidad* de encontrar una partícula con momento $\mathbf{p}$ en el punto $\mathbf{x}$.

Un transformación g es de *simetría* cuando deja invariante las probabilidades de transición, es decir,

$$\forall \hat{\psi}, \hat{\phi} \qquad T_{\hat{\phi},\hat{\psi}} = T_{\hat{\phi}^g,\hat{\psi}^g} \qquad \text{(simetría)}. \tag{1.4}$$

Las transformaciones de simetría forman el *grupo de simetría* del sistema.[1]

---

[1] Dado un conjunto cualquiera A, el conjunto de biyecciones de A en A que deja invariante un propiedad obviamente siempre forma un subgrupo del grupo de todas las biyecciones.

Si la transformación g se realiza en $\mathcal{H}$ mediante un *operador unitario* U, se deduce automáticamente que g define una simetría. Esto es así tanto si U es lineal como si es antilineal. Recordemos que, para un operador A

$$A(\lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle) = \begin{cases} \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\phi\rangle, & \text{(lineal)} \\ \lambda^* A|\psi\rangle + \mu^* A|\phi\rangle, & \text{(antilineal)} \end{cases} \tag{1.5}$$

y también

$$\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \begin{cases} \langle A\psi|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^*, & \text{(lineal)} \\ \langle A\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|A|\psi\rangle, & \text{(antilineal)} \end{cases} \tag{1.6}$$

Por otro lado U unitario significa

$$U^{-1} = U^\dagger \qquad \text{(unitario)}. \tag{1.7}$$

Lo cual implica

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \tag{1.8}$$

donde 1 denota el operador identidad en $\mathcal{H}$.

Si g se representa por un operador unitario U,

$$|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle = |\psi^g\rangle, \qquad |\psi\rangle \in \hat{\psi},\ |\psi^g\rangle \in \hat{\psi}^g, \tag{1.9}$$

e induce una transformación bien definida a nivel de rayos. Además es inmediato que

$$\langle\phi^g|\psi^g\rangle = \langle U\phi|U\psi\rangle = \begin{cases} \langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle, & \text{(lineal)} \\ \langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle^*, & \text{(antilineal)} \end{cases} \tag{1.10}$$

y en ambos casos la relación (1.4) se satisface.

Por tanto, los operadores unitarios en $\mathcal{H}$ inducen transformaciones de simetría en $\hat{\mathcal{H}}$. De acuerdo con el *teorema de Wigner* también se cumple el recíproco: todas las transformaciones de simetría se realizan mediante operadores unitarios en $\mathcal{H}$ [1].[2] Además, el teorema establece que dada una simetría g el operador unitario U asociado es *único salvo a lo sumo una fase.*[3] En efecto, los operadores U y $U' = wU$ producen vectores estado transformados que difieren en una fase y son por tanto equivalentes.

---

[2] Es notable que la noción de linealidad o antilinealidad no aparece en la definición de transformación de simetría. Sin embargo, de acuerdo con el teorema, el requerimiento de simetría resulta ser extraordinariamente restrictivo.

[3] Una fase se refiere a un número $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$.

En la práctica lo más usual es que la simetría se realice mediante un operador lineal. Sólo se requieren operadores unitarios antilineales (o también, antiunitarios) cuando la transformación involucra inversión temporal. De modo que mientras no se diga lo contrario supondremos que los operadores requeridos son lineales.

Referencias

[1] A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, vols. I y II, Eudema Universidad, 1989

[2] J. Schwinger *Particles, Sources and Fields*, vol. I. Addison-Wesley, 1970

[3] W. Greiner *Relativistic quantum mechanics: wave equations* Springer, 1990

[4] L.S. Schulman *Techniques and Applications of Path Integration* John Wiley & Sons, 1981

[5] J.W. Negele y H. Orland *Quantum Theory of Many Particle Systems* Addison Wesley, 1988

[6] B.G. Adams, *Algebraic approach to simple quantum systems*, Springer-Verlag, 1994

[7] R.H. Landau, *Quantum Mechanics II*, John Wiley & Sons, 1996

[8] H. Kleinert, *Path integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*, World Scientific, 1990

[9] R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965

[10] A.L. Fetter y J.D. Walecka, *Quantum theory of many-body particle systems*, McGraw-Hill, 1971

Simetrías cinemáticas.

En MC los estados del sistema se representan por vectores no nulos ψ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (módulo normalización y fase). Una t. de simetría del sistema consiste en una t. invertible def. para todo ψ de $\mathcal{H}$ (rayos) $\psi \to \psi^g$ de modo que se conserven todas las prob. de transición

$$T_{\psi,\phi} = \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\|\psi\|^2\|\phi\|^2} = T_{\psi^g,\phi^g} = \frac{|\langle\psi^g|\phi^g\rangle|^2}{\|\psi^g\|^2\|\phi^g\|^2}$$

De acuerdo con el teorema de Wigner, siempre pueden elegirse las fases de ψ^g de modo que $|\psi^g\rangle = U_g|\psi\rangle$ (U_g indep. de ψ) donde U_g es un op. unitario o antiunitario (= unitario pero antilineal) único salvo una fase.

El caso antilineal sólo hace falta si la t. de simetría involucra inversión temporal T, ~~[illegible]~~ que no vamos a considerar, de modo que nos restringiremos al caso U_g unitario a partir de ahora.

Unitario quiere decir $U_g U_g^\dagger = U_g^\dagger U_g = 1 \Longleftarrow U_g^\dagger = U_g^{-1}$

que garantiza $\langle\psi^g|\phi^g\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$ y la conservación de $T_{\psi,\phi}$.

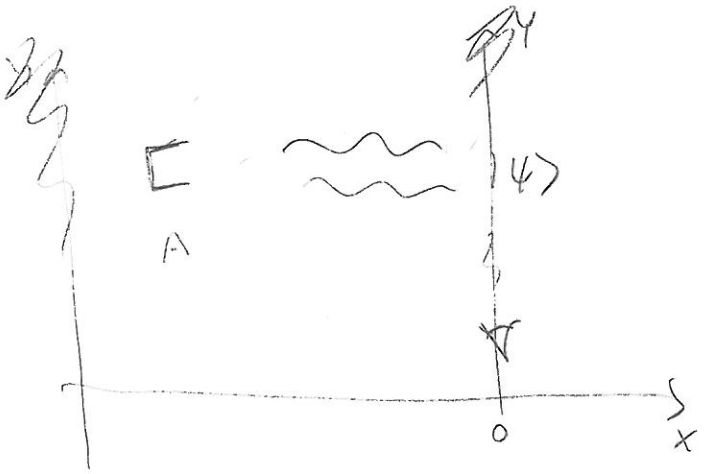
$$U_{g_1} U_{g_2} |\psi\rangle \in (\hat{\psi}^{g_2})^{g_1} = \hat{\psi}^{g_1 g_2}$$

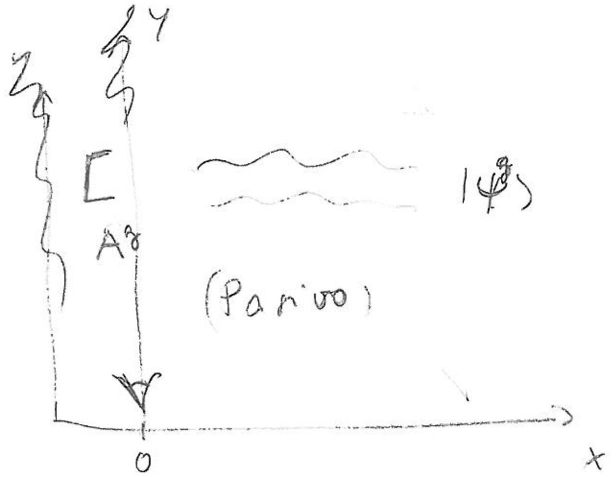
$|\psi\rangle \in \hat{\psi}$

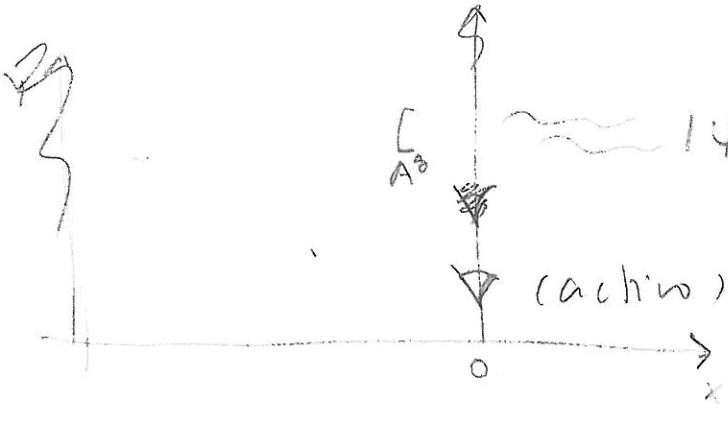
$$U_{g_1 g_2} |\psi\rangle \in \hat{\psi}^{g_1 g_2}$$

$U_{g_1} U_{g_2}$ transf. equivalente (igual acción física)

a $U_{g_1 g_2} \Rightarrow w_{(g_1, g_2)} U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$







(si no U lineal)

Correspondientemente los observables A se transforman de acuerdo con
(u operadores en general)

$$A^g = U_g A U_g^{-1}$$ de modo que (ó si antilineal?)

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\psi^g|A^g|\phi^g\rangle^{(*)}$$ también es inv. bajo la transf.

(si $A = \sum_a a|a\rangle\langle a|$, $A^g = \sum_a a\,|a^g\rangle\langle a^g|$) (ó $\sum_a a^*|a^g\rangle\langle a^g|$ si U antilineal y [illegible])

Además las relaciones $(|\psi\rangle \longrightarrow |\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$ se conservan.)

$$X \longrightarrow X^\dagger \qquad X \text{ op. cualquiera}$$

$\langle\psi^g| = |\psi^g\rangle^\dagger = (U_g|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|U_g^\dagger = \langle\psi^g|$, def de $\langle\psi^g|$, no demuestra nada;

$$(X^g)^\dagger = (U_g X U_g^{-1})^\dagger = U_g X^\dagger U_g^{-1} = (X^\dagger)^g$$

(en particular si A es hermítico, A^g también)

Obviamente las t. de simetría forman un grupo (el grupo de sim. del sistema físico en cuestión) ya que están definidas por dejar las $T_{\psi,\phi}$ invariantes $\forall\psi,\phi$ *

(aunque en la práctica sólo interesa un subgrupo G). Sean g_1, g_2 dos transf.

y ~~[illegible]~~ $g_1 g_2$ la aplicación sucesiva de g_2 y luego de g_1

~~[illegible]~~ $\psi^{g_1 g_2} = (\psi^{g_2})^{g_1}$ $\qquad \hat\psi^{g_1 g_2} = (\hat\psi^{g_2})^{g_1}$

Correspondientemente habrá sendos op. unitarios U_{g_1}, U_{g_2}, $U_{g_1 g_2}$

y en principio $\quad U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2} \qquad g_1, g_2 \in G$

$$|\psi^{g_1 g_2}\rangle = U_{g_1 g_2}|\psi\rangle \qquad |\psi^{g_1 g_2}\rangle = \omega(g_1, g_2)|\psi\rangle$$

"

$$|(\psi^{g_2})^{g_1}\rangle = U_{g_1}|\psi^{g_2}\rangle = U_{g_1} U_{g_2}|\psi\rangle$$

* En principio $\psi_1 \neq \psi_2 \to \psi^g$ común y no sería invertible, sin embargo eso es incompatible con que sea simetría como se sigue del teorema de Wigner
El teorema de Wigner garantiza que una simetría es invertible.

Sin embargo hay una sutileza ya que la relación $g \to U_g$ no es unívoca, en general

$$U_{g_1 g_2} = \omega(g_1, g_2)\, U_{g_1} U_{g_2} \quad \text{con} \quad \omega \in \mathbb{C} \quad |\omega| = 1$$

De momento supondremos que $\omega = 1$ ya que frecuentemente es así.
En este caso $g \to U_g^{(**)}$ es una <u>rep.</u> unitaria del grupo G en el espacio $\mathcal{H}$, lo cual quiere decir que los op. U_g se multiplican igual que los elementos g que representan. (homomorfismo de grupos).

En la práctica se trabaja con un grupo abstracto (≡ módulo isomorfismos) $\overset{g}{G}$ que se realiza en distintos sistemas físicos, ej: grupo de rotaciones actuando sobre un sólido o bien sobre un electrón, etc. En cada caso se obtiene una rep. del mismo grupo G en distintos espacios $\mathcal{H}$.

Consideremos el caso frecuente en el que G es un grupo continuo (o de Lie)* de transformaciones cada elemento está caracterizado por n parámetros reales (o coordenadas en la variedad G) $a_1, \dots, a_n$ de modo que $g = g(a_1, \dots, a_n)$
(suele elegirse $e = g(0, \dots, 0)$)
Al componer dos elementos con coordenadas a_i, b_i se obtiene un nuevo elemento con coordenadas c_i

$$g(c) = g(a)\, g(b) \qquad\qquad a, b, c \in \mathbb{R}^n$$

$$c_i = f_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \quad i = 1, \dots, n \qquad ó \quad c = f(a, b)$$

las n funciones f_i se llaman <u>ley de composición</u> del grupo.

Nótese que la forma de parametrizar G no es única. Se puede elegir f analítica (f no trivial para ser grupo)

(**) Podemos sup rep. fiel

* y además conexo

Observación: por continuidad, U_g ha de ser siempre unitario (y no antiunitario) ya que $e \to \mathbb{1}$ (este argumento se aplica a la parte conexa con la identidad) ($g \to U_g$ es continua)

Ahora tenemos $U(a_1, \dots, a_n)$

$$U(a_1, \dots, a_n) U(b_1, \dots, b_n) = U(c_1, \dots, c_n)$$

$U(a)U(b) = U(c)$

En los grupos discretos tales como $\mathbb{Z}$ (= traslaciones discretas) o permutaciones, todo el grupo se puede generar a partir de unos pocos elementos.

En un grupo de Lie conexo este papel lo hacen los elementos infinitesimalmente próximos a la identidad. Estos son elementos con coordenadas $\delta a_1, \dots, \delta a_n$ infinitesimales. (recuérdese que e tiene $a_i = 0$) Correspondientemente

$$U(\delta a_1, \dots, \delta a_n) = 1 - i\,\delta G$$

$U^{-1} = 1 + i\,\delta G$

donde δG es un op. infinitesimal y hermítico que puede escribirse como ($\delta G = 0$ cuando $\delta a_i = 0$)

$$\delta G = \delta a_i G_i \qquad \delta a_i \qquad \sum_{i=1}^{n}$$

donde G_i, $i = 1, \dots, n$ son n op. $\left.\frac{\partial U}{\partial a_i}\right|_0 = -iG_i$

(implícita)

hermíticos denominados <u>generadores</u> del grupo (en la rep. U).
(y asociados a las coord. a_i)

También puede escribirse

$$U(\delta a_1, \dots, \delta a_n) = e^{-i\,\delta a_i G_i}$$

Como $(U(\delta a))^N = (e^{-i\delta G})^N = e^{-iN\delta G} = e^{-iN\delta a_i G_i}$

se "deduce" que tomando $N \to \infty$, $\delta a \to 0$ $N\delta a_i = \bar{a}_i$ finito

se obtiene $U(\bar{a}_i) = e^{-i\bar{a}_i G_i}$

para un elemento cualquiera de G

$\bar{a}_i(g)$ $\qquad \delta\bar{a} = \delta a$ en un entorno de e

$$U^N\left(\frac{\bar{a}}{N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} U(a) \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial \bar{a}_i}\right|_0 = \left.\frac{\partial U}{\partial a_i}\right|_0$$

En efecto, puede probarse que se puede elegir el sistema de coord. (llamadas coord. normales) de modo esta fórmula se cumple (en un entorno de la identidad)

no únicas ~~únicas salvo t. lineal rígida~~

Y por tanto $U(t_1\bar a)\,U(t_2\bar a) = U((t_1+t_2)\bar a)$ en estas coord.

$t_{1,2} \in \mathbb{R}$

$\bar a \in \mathbb{R}^n$

Por ej.: grupo de traslaciones $T_{\vec a}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec x \mapsto \vec x + \vec a$

$\vec a$ son coordenadas normales y de hecho la ley de composición es aditiva $T_{\vec a_1} T_{\vec a_2} = T_{\vec a_1 + \vec a_2}$.

Grupo de rotaciones: la rot. se puede parametrizar por un eje de giro $\hat n$ ($\|\hat n\| = 1$) y un ángulo de giro ϕ. $R(\hat n, \phi)$

el vector $\vec a = \phi \hat n$ define unas coord. normales en este grupo:

(notar los ángulos de Euler $R_{(\alpha,\beta,\gamma)} = R(\hat e_3, \alpha) R(\hat e_2, \beta) R(\hat e_3, \gamma)$ no definen un sistema de coord. a_i ya que $R(\alpha, \beta=0, \gamma) = R(\alpha+\gamma, 0, 0)$)

$R(\hat n, \phi_1) R(\hat n, \phi_2) = R(\hat n, \phi_1 + \phi_2)$ $\qquad U = e^{-i\phi \hat n \cdot \vec J}$

Por supuesto el grupo no es abeliano y la ley de composición no es aditiva.

Grupo de Lorentz en 1+1 dim: cada transf. está caracterizada por la velocidad v del boost. $|v| < 1$ $(c=1)$

$$B(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$B(\delta v) = \begin{pmatrix} 1 & \delta v \\ \delta v & 1 \end{pmatrix} = 1 - i \delta G = 1 - i\, \delta v\, G_v$$

$$G_v = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1 \; (\neq G_v^\dagger)$$

$$B(v_1) B(v_2) = B(v_{12}), \quad v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

v no es una coord. ~~canónicas~~ normal

pero si $\xi = \operatorname{atanh}(v)$, $\xi_{12} = \xi_1 + \xi_2$ $\qquad \delta\xi = \delta v$ (coinciden infinitesimalmente)

"rapidez"

$$B(v) = e^{-i\xi G_v} = e^{\xi \sigma_1}$$

$$= \cosh\xi + \sigma_1 \operatorname{senh}\xi = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \operatorname{senh}\xi \\ \operatorname{senh}\xi & \cosh\xi \end{pmatrix}$$

$SO(1,1)$ $\qquad B(v)\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix}$

$$+x^{0\,2} - x^{1\,2} = x'^{0\,2} - x'^{1\,2}$$

Ej. grupo de traslaciones en el espacio de una partícula

$|\vec{x}\rangle \to |\vec{x}+\vec{a}\rangle = T_{\vec{a}}|\vec{x}\rangle$ es unitaria $\qquad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\psi\rangle, \ \langle \vec{x}|T_{\vec{a}}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}-\vec{a})$ (*)

si $\delta\vec{a}$ es infinitesimal $\quad \psi(\vec{x}-\delta\vec{a}) = \psi(\vec{x}) - \delta\vec{a}\cdot\vec{D}\psi(\vec{x})$

$= (1-\delta\vec{a}\cdot\vec{D})\psi(\vec{x})$ de donde, en esta rep.

$-\delta\vec{a}\cdot\vec{D} = -i\,\delta\vec{a}_i G_i \qquad G_i = -i\vec{D} \equiv \vec{P}$

el op. momento es el generador inf. de las traslaciones

$T_{\vec{a}} = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}$ produce una traslación finita $= e^{-\vec{a}\cdot\vec{D}}$

$\psi(\vec{x}-\vec{a}) = e^{-\vec{a}\cdot\vec{D}}\psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(\vec{a}\cdot\vec{D})^n\psi(\vec{x})$ no es más que el

desarrollo en serie de Taylor.

En general $U(\vec{a}) = e^{-i a_i G_i}$ generaliza Taylor para otros

grupos y variedades. Por ej. $e^{-i\vec{\phi}\cdot\vec{L}}\psi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})$ $\quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ $\quad \vec{\phi} = \phi\hat{n}$ $\quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$

ó $e^{-i\vec{\phi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\psi \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ $\quad U(R_1R_2) = U(R_1)U(R_2)$

(*) También, sin usar que $T_{\vec{a}}$ es unitario:

$|\psi\rangle = \int d^3x\, \psi(\vec{x})|\vec{x}\rangle \qquad T_{\vec{a}}|\psi\rangle = \int d^3x\, \psi(\vec{x})\, T_{\vec{a}}|\vec{x}\rangle$

$= \int d^3x\, \psi(\vec{x})|\vec{x}+\vec{a}\rangle$ $\quad$ (se traslada $d^3(\vec{x}-\vec{a}) = d^3\vec{x}$)

$= \int d^3x\, \psi(\vec{x}-\vec{a})|\vec{x}\rangle$

$\Rightarrow \psi^{a}(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a})$

$a = a(a')$

~~$\delta a_i = \frac{\partial a_i}{\partial a'_j}\Big|_0 \delta a'_j = A_{ij}\, \delta a'_j$~~

~~$\delta G = \delta a_i\, G_i = \delta a'_j\, G'_j$~~

~~$G'_j = \frac{\partial a_i}{\partial a'_j} \quad A_{ij}\, G_i$~~

$a = a(a')$

$\delta a^i = \frac{\partial a^i}{\partial a'^j}\Big|_0 \delta a'^j \equiv A^i{}_j\, \delta a'^j \qquad \delta a'^j = (A^{-1})^j{}_i\, \delta a^i$

$G'_j = \frac{\partial U}{\partial a'^j}\Big|_0 = \left(\frac{\partial a^i}{\partial a'^j}\right)_0 \left(\frac{\partial U}{\partial a^i}\right)_0 = A^i{}_j\, G_i$

$\delta G = G_i\, \delta a^i = G'_j\, \delta a'^j$

En resumen, los elementos del grupo (rep. fiel) g. conexo son de la forma

grupo ↓ álgebra ↓ $\cancel{G} \, \mathcal{G} = e^{-i\mathcal{L}}$

$$U_g = e^{-iG} \quad , \quad G = a_i^i G_i = G^\dagger \qquad a \in \mathbb{R}^n$$

Los op. G forman un espacio vectorial $\mathcal{L}$ real de dim n con G_i como base

(si los G_i no fueran l.i. a_i no sería un buen sistema de coordenadas)
(la rep no sería fiel)

con $G_i = i \dfrac{\partial U(a)}{\partial a_i}\Big|_{a=0}$

Nótese que un cambio de coordenadas en G corresponde a un cambio de base en L pero no cambia el espacio L.

El que $\{U_g\}$ forme un grupo de Lie se corresponde (sii) con que L forme álgebra de Lie es decir

si $G_1, G_2 \in L$ $\quad -i[G_1, G_2] \equiv -i(G_1 G_2 - G_2 G_1) \in L$ $\quad$ ó $-i[L, L] \subset L$

↑ $-i[\,,\,]$ es el p. de Lie

Después: Esto se puede ver por ej. usando la fórmula de Campbell - Hausdorff :

si A, B son dos op.

$$e^A e^B = e^C \quad \text{con} \quad C = A + B + \tfrac{1}{2}[A,B] + \tfrac{1}{12}[A,[A,B]] + \tfrac{1}{12}[B,[B,A]] + \dots$$

entonces sea $U_1 = e^{-itG_1}$, $U_2 = e^{-itG_2} \in G$ $\qquad G_{1,2} \in L$ cualesquiera

y $U_3 = U_1 U_2 = e^{-iG_3(t)}$ también $\in G$ y $G_3^{(t)} \in L$

$$-iG_3^{(t)} = -itG_1 - itG_2 - \tfrac{1}{2}t^2[G_1, G_2] + O(t^3)$$

además cada ~~término~~ orden es de L por separado $\Rightarrow i[G_1, G_2] \in L$

$$\left(\frac{-iG_3(t) + itG_1 + itG_2}{(-\frac{1}{2}t^2)} = [G_1, G_2] + O(t) \in L \ \text{y tomando } t \to 0 \quad [G_1, G_2] \in L \right)$$

$$-i[G_1, G_2] \sim \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} \in L$$

Una forma de verlo es considerar el conmutador de dos transf.(*)

$U_{[12]} \equiv U_1^{-1} U_2^{-1} U_1 U_2$ $\qquad$ $G_1, G_2 \in L$ (no nec. generadores G_i)

$U_{1,2} = e^{-i \underset{t}{\uparrow} G_{1,2}}$ $\qquad$ $U_{[12]} = e^{-i\, G_{[1,2]}(t)}$

calculamos $G_{[12]}$ hasta segundo orden en G_1, G_2

$$U_1 U_2 = \left(1 - iG_1 - \frac{1}{2}G_1^2\right)\left(1 - iG_2 - \frac{1}{2}G_2^2\right) + O(G_{1,2}^3)$$

$$= 1 - iG_1 - iG_2 - \frac{1}{2}G_1^2 - \frac{1}{2}G_2^2 - G_1 G_2 + O(G_{1,2}^3)$$

$$U_1^{-1} = 1 + iG_1 - \frac{1}{2}G_1^2 + O(G_1^3)$$

$$U_1^{-1}U_2^{-1} = 1 + iG_1 + iG_2 - \frac{1}{2}G_1^2 - \frac{1}{2}G_2^2 - G_1 G_2 \quad \text{(de hecho basta } G_{1,2} \to -G_{1,2})$$

$$U_{[12]} = 1 - [G_1, G_2] + O(G^3)$$

además $U_{[12]}^{-1} = U_{[21]} \Rightarrow$ aprox. 1er o. $-G_{[12]} = G_{[21]}$

(por def. de [12] se veía que no podían quedar términos sin G_1G_2 ó G_2G_1)

es decir, $G_{[12]}^{(t)} = -i[G_1, G_2] + O(G^3)$

poniendo un parámetro t $\quad tG_1, tG_2$ se ve que cada orden por separado es de L y en particular $-i[G_1, G_2] \in L$.

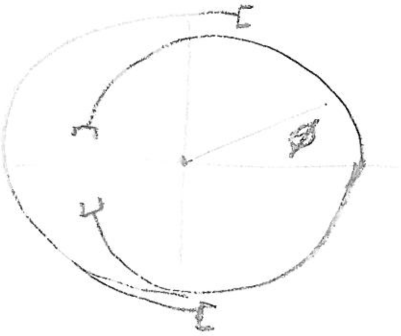
(*) Quizá poner $U_1 = e^{-itG_1}$, etc con t desde el principio

$$a'^{i} = \overset{\text{contrav.}}{\bar{A}'^{i}_{\cdot j}}\, a^{j} \qquad a^{j} = (A^{-1})^{j}_{\cdot i}\, a'^{i} \qquad \bar{A}'^{i}_{j} = \left.\frac{\partial a'^{i}}{\partial a^{j}}\right|_{0}$$

$$G = a^{j} G_{j} = a'^{i} G'_{i} \Rightarrow G'_{i} = \underset{\text{covariante}}{(A^{-1})^{j}_{\cdot i}\, G_{j}}$$

$$c_{ij}^{\cdot\cdot k} = (A^{-1})^{i'}_{\cdot i}\,(A^{-1})^{j'}_{\cdot j}\,\bar{A}^{k}_{\cdot k'}\, c'^{\;\;\;k'}_{i'j'\cdot}$$

SO(2)



(IR,+)

$[J_z, J_z] = 0$

$[P_x, P_x] = 0$

$\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2$

$a_{12} = a_1 + a_2$

$SO(2) \underset{loc}{\equiv} (\mathbb{R},+) \qquad SO(2) \not\equiv (\mathbb{R},+)$

↓ compacto ↓ no compacto

↓ se pueden hacer promedios ↓ no se puede

Por tanto, si G_i es una base de $\mathcal{L}$

$$[G_i, G_j] = i C_{ij}^{\;\;k} G_k$$ para ciertos coef. numéricos

denominados ctes de estructura, (que se transf. tensorialmente bajo $C_{ij}^{\;\;k}$ cambios de base). Propiedades:

- tomando adjuntos $\Rightarrow$ $C_{ijk}^{*} = C_{ijk}$ son reales
- antisimetría $C_{ijk} = - C_{jik}$
- Jacobi de $[[G_i, G_j], G_k]$ + cíclico $= 0$ se deduce

$$C_{ij}^{\;\;l} C_{lk}^{\;\;m} + C_{jk}^{\;\;l} C_{li}^{\;\;m} + C_{ki}^{\;\;l} C_{lj}^{\;\;m} = 0$$ ← refleja prop. asociativa

Lo importante de las ctes de estructura es que determinan la ley de composición del grupo. En efecto las C_{ijk} permiten calcular el conmutador de dos elementos de $\mathcal{L}$ y por Campbell-Hausdorff esto reconstruye el producto de dos exponenciales y la ley de composición.

[Esto hace que haya relativamente pocos grupos de Lie: [illegible] hay tantos como posibles ctes de estructura llevadas a forma canónica por cambio de base. Así de dim 1 sólo hay una ley de composición y de dim. 2 sólo hay 2]

Las ctes. de estructura son características del grupo, no dependen de la representación y pueden extraerse usando cualquier rep. fiel.

Notar isomorfismo local, ej: SO(2), traslaciones.

$$\left.\frac{\partial \; a^{k}_{[12]}}{\partial a^{i}_{1} \, \partial^{j} a_{2}}\right|_{0} = c_{ij}{}^{k}$$

Por ej: para el grupo de traslaciones, la rep. en $L^2(\mathbb{R}^3)$ es fiel

$$G_i = P_i = -i D_i$$

entonces $[P_i, P_j] = 0$ $\quad C_{ijk} = 0$ característico de un grupo abeliano.

o rotaciones $J_i = \epsilon_{ijk} X_j P_k = -i \epsilon_{ijk} x_j \partial_k$, $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$ ó $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ espín $\frac{1}{2}$

Otro método es usar la ley de composición:

se calcula el conmutador $g_{[12]} = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ con coordenadas c_i en términos de las coord. a_i, b_i de g_1, g_2. Basta hacerlo para δa_i, δb_i infinitesimales

[En coordenadas normales $c = f(a,b)$
$c_k = a_k + b_k + \frac{1}{2} C_{ijk} a_i b_j + \cdots$]

$$i\delta G_{[12]} = [\delta G_1, \delta G_2] \Rightarrow$$

notación $\delta c^k = \delta a^k_{[12]}$ $\quad \delta a^i = \delta a^i_1$ $\quad \delta b^i = \delta a^i_2$

$$i\,\delta c_k G_k = [\delta a_i G_i, \delta b_j G_j] = i C_{ijk} G_k \delta a_i \delta b_j$$

de donde $\underline{\delta c_k = C_{ijk} \delta a_i \delta b_j}$ permite extraer C_{ijk}.

En realidad basta calcular $g_1 g_2$ (quedándose en 1er orden en δG_1 y en δG_2 (conteje separado))

$$U_1 U_2 = e^{-i\delta G_1} e^{-i\delta G_2} = 1 - i\delta G_1 - i\delta G_2 - \delta G_1 \delta G_2 + \cdots O(\delta G_1^2) + O(\delta G_2^2)$$

$$\overset{\shortparallel}{U_{12}} = e^{-i\delta G_{12}} \qquad \delta G_{12} = \delta G_1 + \delta G_2 - i\delta G_1 \delta G_2 + \cdots$$

$$\delta G_{12} - \delta G_{21} = -i[\delta G_1, \delta G_2] = \delta_{[12]} G$$

$$\Rightarrow \quad \delta a_k^{(12)} - \delta a_k^{(21)} = C_{ijk}\, \delta a_i^{(1)} \delta a_j^{(2)} \qquad \delta_{12} a^k - \delta_{21} a^k = C_{ij}{}^k \delta_1 a^i \delta_2 a^j$$

Nótese que como δa_i son infinitesimales no hace falta que las coord. sean normales en este cálculo*

* Sin embargo $\delta a_k^{(12)} = \delta a_k^{(1)} + \delta a_k^{(2)} + O(\delta a^{(1)2}) + O(\delta a^{(2)})^2 + d_{ijk}\, \delta a_i^{(1)} \delta a_j^{(2)} + \cdots$

la parte simétrica de d_{ijk} dep. no tensorialmente de las coord.

sólo $d_{ijk} - d_{jik} = C_{ij}{}^k$ es un tensor.

$$\delta_{\vec{a}}\phi(x) = \delta\vec{a}\cdot\vec{f}(x) \qquad \delta_{\vec{a}}\phi = -\delta\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$\delta_1\delta_2\phi = \delta_1(\delta_2\vec{a}\cdot\vec{f}) = -\delta_1\vec{a}\cdot\vec{\nabla}(\delta_2\vec{a}\cdot\vec{f})$$

$$\| = -\delta_1 a^i\,\delta_2 a^j\,\nabla_i f_j$$

$$\delta_2\delta_1\phi = -\delta_2 a^i\,\delta_1 a^j\,\nabla_i f_j = -\delta_1 a^i\,\delta_2 a^j\,\nabla_j f_i$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_i f_j = \nabla_j f_i \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{f} = 0)$$

Para estados

$$\delta_{[12]}|\psi\rangle = -i\,\delta_{[12]}L\,|\psi\rangle = -[\delta_1 L, \delta_2 L]\,|\psi\rangle$$

$$= (-i\delta_1 L)(-i\delta_2 L)|\psi\rangle - (-i\delta_2 L)(-i\delta_1 L)|\psi\rangle$$

$$= \delta_1\delta_2|\psi\rangle - \delta_2\delta_1|\psi\rangle = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)|\psi\rangle$$

$$= [\delta_1, \delta_2]|\psi\rangle$$

Esto es general en cualquier rep

$$\delta_{[12]} = [\delta_1, \delta_2]$$

$U_g|\psi\rangle = (1-i\delta \underset{L}{G})|\psi\rangle$ $\delta|\psi\rangle = -i\delta \underset{L}{G}|\psi\rangle$ $\delta\langle\psi| = +i\langle\psi|\delta G$

Para observables, (u op. en general) $X \rightarrow X^g = U_g X U_g^{-1}$

$U_g = 1 - i\delta G$ infinitesimal $\Rightarrow X^g = X + \delta X$

$$\delta X = -i[\delta G, X]$$

es decir, la operación $-i[\delta G, \ ]$ expresa la acción infinitesimal del grupo

$(\delta|\psi\rangle = -i\delta G|\psi\rangle)$

en esta representación. La identidad de Jacobi implica una condición de consistencia:

~~$[X,[\delta_1 G,\delta_2 G]] = [[X,\delta_1 G],\delta_2 G_2] - [[X,\delta_2 G],\delta_1 G]$~~

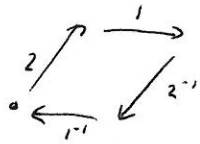
$$[[\delta_1 G,\delta_2 G],X] = [\delta_1 G,[\delta_2 G,X]] - [\delta_2 G,[\delta_1 G,X]]$$

usando $+i\delta G_{[12]} = [\delta G_1, \delta G_2)$ y $\delta = -i[\delta G, \ ]$ $\delta X = f(X, \delta a)$

$$\delta_{[12]}X = +\delta_1\delta_2 X - \delta_2\delta_1 X \Rightarrow \underline{\delta_{[12]} = +[\delta_1, \delta_2]}$$

Por ejemplo, el grupo de traslaciones es abeliano por tanto $U_{[12]} = e$

y $\delta G_{[12]} = 0 \Rightarrow \delta_{[12]} = 0 = [\delta_1, \delta_2]$



Si me dicen que $\partial_i\phi(\vec{x}) = f_i(\vec{x})$ para cierto ϕ

$\delta a_i\partial_i\phi$ no es más que la respuesta de $|\phi\rangle$ a una traslación infinitesimal

$\overset{\shortparallel}{\delta\vec{a}\vec{D}\phi}$ en la dirección $\delta\vec{a}$,

$$\delta_1\delta_2\phi = \delta\vec{a}_i\partial_i\,\delta b_j\partial_j\phi = \delta a_i\delta b_j\partial_i f_j$$

$$\shortparallel$$

$$\delta_2\delta_1\phi = \delta b_j\delta a_i\partial_j f_i \quad \forall\, \delta\vec{a}, \delta\vec{b} \Rightarrow \partial_i f_j = \partial_j f_i$$

si esto no se cumple, $\partial_i\phi = f_i$ no puede satisfacerse.

$\psi^g(x) = \psi(g^{-1}x)$ no es unitario en general

$\psi^g(x) = f_g(x)\psi(g^{-1}x)$

$U_g|x\rangle = |gx\rangle$ no coincide con

hay que tomar $U_g|x\rangle = h_g(x)|gx\rangle$

con f y h adecuadamente relacionadas

y luego se puede imponer que U_g sea unitario

$g \in G$ $\quad x \in \mathbb{R}^m$ (u otra variedad dif.) $\mathcal{M}$ $\quad x^\mu \quad \mu = 1, \dots, m \quad L^2(\mathcal{M})$

$x \mapsto x^g = gx \qquad \psi(x) \rightarrow \psi^g(x) = \psi(xg^{-1}) = (U_g\psi)(x)$

$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \qquad \psi^g(x^g) = \psi(x)$

↑ escalar

$$(U_{g_1 g_2}\psi)(x) = \psi(x^{(g_1 g_2)^{-1}}) = \psi(x^{(g_2^{-1} g_1^{-1})})$$

$$= \psi((xg_1^{-1})g_2^{-1}) = \psi^{g_2}(xg_1^{-1})$$

$$= (U_{g_2}\psi)(xg_1^{-1}) = (U_{g_1}(U_{g_2}\psi))(x) = ((U_{g_1}U_{g_2})\psi)(x)$$

$\ulcorner \; \psi^g(x) = \psi(g^{-1}x)$, (notación)

$$\psi((g_1 g_2)^{-1}x) = \psi(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (U_{g_2}\psi)(g_1^{-1}x)$$

$$= (U_{g_1}(U_{g_2}\psi))(x) \lrcorner$$

$$(xg)^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \qquad (xg^{-1})^\mu = x^\mu - \delta x^\mu$$

$$\delta x^\mu = f_i^\mu(x)\,\delta a^i$$

$$U_g = 1 - i\,\delta G \qquad -i\,\delta G\,\psi(x) = \delta\psi(x)$$

$$\psi^g(x) = \psi(x - \delta x) = \psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi = \psi + \delta\psi$$

$$-\delta x^\mu \partial_\mu = -i\,\delta G \qquad \underline{\delta G = -i\,\delta x^\mu \partial_\mu}$$

$$G_i\,\delta a^i = -i\,\delta a^i f_i^\mu(x)\,\partial_\mu \qquad \underline{G_i = -i\, f_i^\mu(x)\,\partial_\mu}$$

$$[G_i, G_j] = -[f_i^\mu \partial_\mu, f_j^\nu \partial_\nu] = ~~-i(f_i^\mu(\partial_\mu f_j^\nu) - f_j^\nu(\partial_\nu f_i^\mu))~~$$

$$- f_i^\mu(\partial_\mu f_j^\nu)\,\partial_\nu + f_j^\nu(\partial_\nu f_i^\mu)\,\partial_\mu = i\,c_{ijk}\,G_k = c_{ijk}\,f_k^\lambda\,\partial_\lambda$$

$$c_{ijk}\,f_k^\lambda = -f_i^\mu(\partial_\mu f_j^\lambda) + f_j^\mu(\partial_\mu f_i^\lambda)$$

Más general: si $D(g)$ es una rep. matricial en V

$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$

y $\psi(x) \in V$ (ej. partícula con espín)

$\mathcal{H} = L^2(M) \otimes V$

$$\psi(x) \longmapsto \psi^g(x) = D(g)\,\psi(g^{-1}x) \equiv (U_g \psi)(x)$$

si $D = e^{-i\Sigma a^i S_i}$ $\qquad G_i = S_i + i f_i^\mu \partial_\mu$

también es una rep.

Ej. rotaciones $\vec{x} \mapsto Rx$ $\quad \psi$ espín j

$$\psi_m(\vec{x}) \longmapsto D^{(j)}_{mm'}(R)\,\psi_{m'}(R^{-1}\vec{x})$$

$\shortparallel$

$\langle \vec{x}, m | \psi \rangle$ $\qquad |\psi\rangle \to U(R)|\psi\rangle$

$$U(R) = e^{-i\vec{\theta}\vec{J}} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\vec{S}$ ↘ actúa rotando ψ_m.

$\vec{L}$ ↓ actúa rotando $\vec{x}$

$\shortparallel$

$e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{S}}\, e^{-i\vec{\theta}\vec{L}}$

Representaciones proyectivas y extensiones centrales.

El teorema de Wigner asocia $g \rightarrow U(g)$ unitario único salvo fase de modo que lo único que puede garantizarse en general es una rep. proyectiva

(suele elegirse $U(e) = 1 \rightarrow \omega(g,e) = \omega(e,g) = 1$

$$U(g_1 \cdot g_2) = \omega(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2) \qquad \omega \text{ una fase.}$$

Puede ocurrir que sea una rep. proyectiva trivial; si U' es una rep. no proyectiva ~~si $\omega(g, g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ (separable)~~

y defino $U(g) = e^{i\alpha(g)} U'(g)$, U es proyectiva con

$$\omega(g_1, g_2) = e^{i\alpha(g_1 g_2)} e^{-i\alpha(g_1)} e^{-i\alpha(g_2)} = \omega_1(g_1 g_2)\, \bar{\omega}_1(g_1)\, \bar{\omega}_1(g_2)$$

cuando ω es así basta redefinir U (a U') para tener una rep. normal.

(*) Otro caso es que las fases de $U(g)$ se puedan elegir de modo que $\omega(g_1, g_2) = 1$ en un entorno de la identidad pero no globalmente. Esto ocurre con las rotaciones sobre partículas de spin semientero. Por ej. para $S = \frac{1}{2}$ $\quad U(R) = e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}/2}$ localmente es una rep. pero en general si $R(\vec{\omega}_{12}) = R(\vec{\omega}_1) R(\vec{\omega}_2)$, $\quad U(\vec{\omega}_{12}) = \pm U(\vec{\omega}_1) U(\vec{\omega}_2)$

así $e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_3} e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_3} = e^{-i\pi\sigma_3} = -1.$ $\quad$ se obtiene una rep. yendo a $SU(2) = \{e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}/2}\}$

$SU(2)/Z_2 \simeq SO(3)$

Finalmente puede ocurrir que $\omega(g_1, g_2)$ no se pueda eliminar ni localmente, como en el grupo de Galileo que veremos después.

Nótese que ω satisface una condición de consistencia:

$$U(g_1 g_2 g_3) = \omega(g_1 g_2, g_3) U(g_1 g_2) U(g_3) = \omega(g_1 g_2, g_3)\, \omega(g_1, g_2) U(g_1) U(g_2) U(g_3)$$

$$\parallel$$

$$\omega(g_1, g_2 g_3) U(g_1) U(g_2 g_3) = \omega(g_1, g_2 g_3)\, \omega(g_2, g_3) U(g_1) U(g_2) U(g_3)$$

$$\Rightarrow \quad \omega(g_1 g_2, g_3)\, \omega(g_1, g_2) = \omega(g_1, g_2 g_3)\, \omega(g_2, g_3) \qquad (\text{condición de } 2^{\circ}\text{ cociclo})$$

(*) Si la rep. es de dim finita el cociclo siempre es trivial o localmente trivial (⇒ siempre trivial para el álgebra) ⇑ en particular grupo compacto y rep. unitaria

El cociclo trivial se alcanza si el grupo es simplemente conexo, si dim finita

Si U' es una proyectiva $= e^{-i a^i G'_i}$

def. $G^{\$}_i = G'_i + \alpha_i 1$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$U \equiv e^{-i a^i G_i} = e^{-i a^i \alpha_i} U'$

Cuando la rep. es proyectiva. Todavía (no trivial, puede ser rec. redef. G_i)

$$U_1 = e^{-iG^{(1)}} \qquad \text{idem } U_2$$

$$a_1^i$$

(los op. asociados a $g(ta)$ se pueden definir así U^t

$$G_1^{(1)} = a_i^{(1)} G_i \in L$$

Lo que cambia a $-i[\overset{\mathcal{L}}{L}, \overset{\mathcal{L}}{L}] \in \overset{\mathcal{L}}{L}$:

$$U_1^{-1}U_2^{-1}U_1U_2 = e^{-\cancel{i}[G_1^{(1)}, G_2^{(2)}] + O(G^3)}$$

$$\parallel$$

$$U_{[12]}\, e^{-i\alpha_{[12]}} \qquad -iG_{[12]} - i\alpha_{[12]}\mathbb{1} = -[G_1^{(1)}, G_2^{(2)}].$$

$$-i[G^{(1)}, G^{(2)}] = G_{[12]} + \alpha_{[12]}\mathbb{1}$$

$$[G_i, G_j] = i\,c_{ijk}\, G_k + i\, c_{ij}\mathbb{1}$$ (extensión central del álgebra)

Una forma práctica de trabajar con auténticas rep. (para las cuales hay muchos resultados conocidos) es definir un nuevo grupo, el grupo extendido centralmente, que actúa transformando los estados y sus fases:

Los elementos son pares $(g,\omega)\in\tilde{G}$ $\tilde{\mathcal{G}} : {}^{G\times U(1)}$ donde $g\in\mathcal{G}$ $\omega\in\mathbb{C}$ $|\omega|=1$

(ω a elegir) se define mediante

$\tilde{G}/U(1)\simeq G$

$U(1)=\{(e,\omega)\}$ es central

$$(g_1,\omega_1)(g_2,\omega_2)=(g_{12},\omega_{12}) \text{ con}$$

$U(1)\otimes G=\tilde{G}$

$$g_{12}\equiv g_1g_2, \qquad \omega_{12}\equiv\omega^{-1}(g_1,g_2)\,\omega_1\omega_2$$ es la ley de multiplicación

actúan según $U(g,\omega)\equiv\omega U(g)$ sobre los vectores. Así

$$U(g_1,\omega_1)U(g_2,\omega_2)=\omega_1\omega_2U(g_1)U(g_2)=\omega_1\omega_2\omega^{-1}(g_1,g_2)U(g_1g_2)$$
$$=\omega_{12}U(g_{12})=U(g_{12},\omega_{12})$$ rep. no proyectiva.

Para que la ley de multiplicación sea consistente debe ser asociativa:

$$((g_1,\omega_1)(g_2,\omega_2))(g_3,\omega_3)=(g_1g_2,\omega^{-1}(g_1,g_2)\omega_1\omega_2)(g_3,\omega_3)=$$
$$=(g_1g_2g_3,\ \omega^{-1}(g_1g_2,g_3)\,\omega^{-1}(g_1,g_2)\,\omega_1\omega_2\omega_3)$$
$$\|$$
$$(g_1,\omega_1)(g_2g_3,\omega^{-1}(g_2,g_3)\omega_2\omega_3)=(g_1g_2g_3,\ \omega^{-1}(g_1,g_2g_3)\,\omega^{-1}(g_2,g_3)\,\omega_1\omega_2\omega_3)$$

coinciden por la condición de cociclo que satisface $\omega(g,g')$.

El grupo extendido tiene un parámetro más, Físicamente hace lo mismo pero su rep. es no proyectiva.

Poniendo $\omega=e^{-i\varphi}$ φ real, la contribución al generador es $^{-i\delta G}$

$-i\delta\varphi\,1$ $\quad 1$ = op. identidad $\qquad G_k=i\left.\dfrac{\partial U(g)}{\partial a^k}\right|_0$ como antes

$$-i\delta\tilde{G}=\underbrace{\sum_k(-i\delta a_kG_k)}_{\substack{\text{en } G \text{ (grupo)}\\ \shortparallel \\ -i\delta G}}-i\delta\varphi\,1$$ (grupo ext. centralmente)

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ ⋮ c-número

Al hacer $[\delta_1 \overset{\tilde{L}}{\tilde{G}}, \delta_2 \overset{L}{\tilde{G}}] = i\,\delta_{[12]} \tilde{G}$ para obtener las relaciones de conmutación $\delta_1\varphi$, $\delta_2\varphi$ se cancelan en l.h.s., lo único nuevo es $i\delta_{[12]}\varphi$ en r.h.s. Como los g se multiplican como antes las c_{ijk} entre g son las de antes (*)

ctes $c_{ij}\,\varphi$

$$[G_i, G_j] = i C_{ij}^{k} G_k + i c_{ij}$$

es decir es el álgebra de G pero con términos constantes añadidos (extensión central del álgebra)

Dado un grupo abstracto, para ver sus posibles realizaciones físicas hay que considerar todas sus extensiones centrales inequivalentes, es decir, soluciones de la condición de cociclo inequivalentes. A nivel de álgebra buscar c_{ij}'s tales que la extensión central sea consistente con Jacobi.

Ej. SU(2) ó SO(3) rep. unitaria

sup. $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k + i c_{ij}$, $c_{ij} = -c_{ji} = c_{ij}^*$

después $\vec{J}' = \vec{J} + \vec{a}$, $[J'_i, J'_j] = i\epsilon_{ijk} J'_k + i c_{ij} - i\epsilon_{ijk} a_k$

basta tomar $a_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} c_{ij}$ y es equivalente a una rep. normal.

($e^{-i\vec{\omega}\vec{J}'} = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{a}} e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$ $U'(g) = \omega(g) U(g)$ son equivalentes)

En efecto en un entorno de la identidad (álgebra) SO(3) no tiene rep. proy.

(*)

$$i \tilde{C}_{AB}^{\ C}\, \delta_1 \tilde{a}^A \delta_2 \tilde{a}^B \tilde{G}_C$$

$$[\delta_1 a_i G_i + \delta_1\varphi, \delta_2 a_j G_j + \delta_2\varphi] = i\,\delta_{[1,2]} a_k G_k + i\,\delta_{[1,2]}\varphi \equiv i \tilde{C}_{ijk}\, \delta_1 \tilde{a}_i\, \delta_2 \tilde{a}_j\, \tilde{G}_k$$

$$\delta_1 a_i\, \delta_2 a_j\, [G_i, G_j] = i c_{ijk}\, \delta_1 a_i\, \delta_2 a_j\, G_k + i c_{ij}\, \delta_1 a_i\, \delta_2 a_j$$

↑ determinadas por $\omega(g_1, g_2)$

no dep. de $\delta_{1,2}\varphi$