Solitones clásicos

Frecuentemente las soluciones clásicas de teorías de campos son disipativas, es decir, para soluciones no singulares de energía finita

$$\lim_{t\to\infty}\left(\max_{\vec{r}} T_{00}(\vec{r},t)\right)=0$$

$T^{\mu\nu}$ = tensor de energía-momento. Un solitón es una solución no singular de energía finita y localizada (la energía) moviéndose con velocidad uniforme. ~~Por invariancia Lorentz basta que exista una solución no disipativa estática.~~ Hay dos formas de que estas configuraciones sean estables

a) Conservación de energía: su energía es menor que la de los posibles estados producto de la desintegración. Solitón no topológico

b) Solitón topológico: su energía es mayor pero hay una obstrucción topológica para conectar esta solución con otras disipativas.

Sólo vamos a considerar solitones topológicos. Sin embargo veamos que la teoría libre no tiene solitones no topológicos. Sea Q una carga

$$Q = ie\int d^3r\,(\phi^*\partial_0\phi - \partial_0\phi^+\phi)$$

$$E = \int d^3r\,(\partial_0\phi^*\partial_0\phi + \vec{\nabla}\phi^+\vec{\nabla}\phi + m^2\phi^*\phi)$$

$$E \geq \int d^3r(\partial_0\phi^+\partial_0\phi + m^2\phi^+\phi) \geq \frac{m|Q|}{e}$$

ya que $(\dot{\phi}^*\mp im\phi^*)(\dot{\phi}\pm im\phi)\geq 0 \Rightarrow \dot{\phi}^*\dot{\phi}+m^2\phi^+\phi \geq \pm im(\dot{\phi}\phi^+-\dot{\phi}^*\phi)=\pm m q^0$

luego $\forall\,\phi(x)$ siempre hay otra configuración con igual carga y menor energía $\frac{m|Q|}{e}$ consistente en $\phi'(x)=\sqrt{\frac{Q}{2me}}\,\frac{e^{-imt}}{\sqrt{V}}$ que no es localizada (es un solitón en 1+1)

Véase que ϕ' no existe para $m=0$ y de hecho $f(kx)$ con $k^2=0$ es una sol.

- R.F. Alvárez-Estrada, etc "Models of Hadron Structure Based on ~~Quantum~~ QCD" ~~Springer~~ Lecture Notes in Physics 259, Springer-Verlag 1986
- R. Rajaraman, "Solitons and instantons", North-Holland, 1982
- R. Bhaduri, "Models of the Nucleon", Addison-Wesley 1988.

1+1

solitones en dos dimensiones

Un caso particular de solitón es una solución estática, y por invariancia Lorentz existirá entonces sol. con velocidad uniforme.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi)$$, U acotado inferiormente

(campo escalar real en $D=1+1$ sin acoplamientos derivativos)

$$\Box \phi + U'(\phi) = 0$$ ec. de movimiento

$$E = P^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + U(\phi) \right)$$ se conserva

Elegimos $\min U(\phi) = U_0 \equiv 0$. Este mínimo puede ocurrir en general en varios valores de ϕ

$$U(\phi) = 0 \quad \text{para} \quad \phi = \phi_i^{(0)} \qquad i = 1, \dots, M$$

$$E[\phi] = 0 \quad \text{sii} \quad \phi_{(x)} = \phi_i^{(0)}.$$

Buscamos ahora sol. estáticas solitónicas:

$$\phi''(x) = U'(\phi) \quad , \qquad E = \int dx \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + U(\phi) \right)$$

para que E sea finita, $\phi(+\infty) = \phi_i^{(0)}$, $\phi(-\infty) = \phi_j^{(0)}$,

En lugar de resolverlo directamente, podemos hacer una analogía con la ecuación de Newton $m\ddot{x} = F(x)$ aquí $(m=1)$, "x" es ϕ pseudo

pseudo "Fuerza" $= U'(\phi)$, "potencial" pseudo V es $-U(\phi)$, la "energía" pseudo es

$$W = \frac{1}{2}\phi'^2 - U(\phi)$$ que se "conserva": $\frac{dW}{dX} = 0$ en función del "tiempo" pseudo x

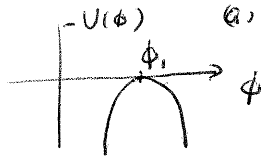
como $U(\phi) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$ $\quad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=\pm\infty} = 0$ $\quad W = 0$ para la partícula equivalente

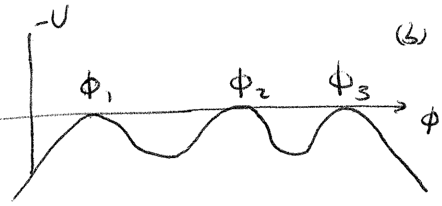
E equivale a la pseudo acción de la partícula equivalente

$$E_{\text{solitón}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, 2U = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \phi'^2$$

a) un solo mínimo

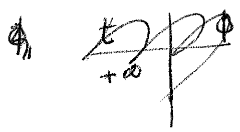
b) varios mínimos





en el caso (a) la única solución $\boxed{\text{es } \phi = \phi_1 \text{ con } W=0}$. No hay solitones

en el caso b) tenemos ~~cuatro~~ soluciones con $W=0$, no triviales
(arriba, corrigiendo "cuatro": "desviaciones y")

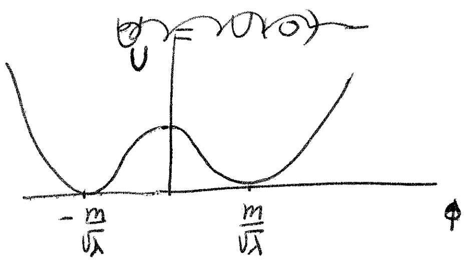


$\phi(-\infty)$	$\phi(+\infty)$
ϕ_1	ϕ_2
ϕ_2	ϕ_1
ϕ_2	ϕ_3
ϕ_3	ϕ_2

en realidad cada solución depende del origen de pseudotiempo. Si $\phi(x)$ es una solución, $\phi(x-x_0)$ también. La solución explícita es

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2U(\varphi)}}$$

Teoría ϕ^4 $\quad U(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \qquad \lambda, m^2 > 0$

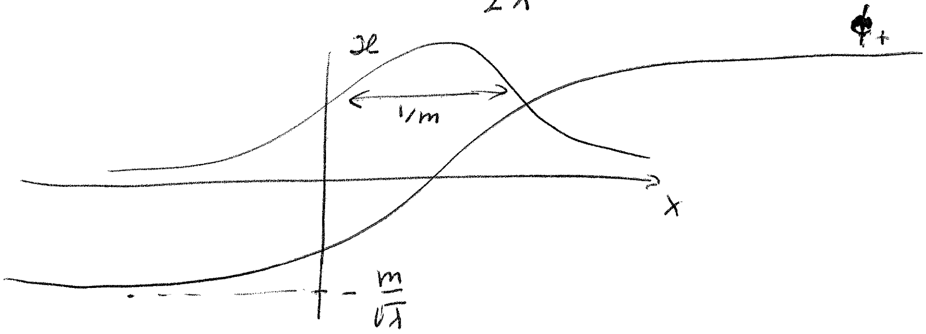


admite un solitón, $\phi(\pm\infty) = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ kink

y otro $\phi(\pm\infty) = \mp\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ antikink

$$\phi_\pm(x) = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right)$$ es la sol. explícita

$$\mathcal{H}(x) = 2U(\phi) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right)$$ densidad de energía



La energía del kink es $M = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\mathcal{H}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\lambda} < +\infty$

Nótese que hay dos simetrías, translacional y $\phi \to -\phi$

las soluciones de menor energía $\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ no respetan $\phi \to -\phi$
vacíos clásicos

el kink conecta los dos vacíos y rompe invariancia traslacional.
y $\phi \to -\phi$ trasforma el kink en el antikink y viceversa.

Además $\phi_v(x,t) = \phi_{kink}(\gamma(x - x_0 - vt))$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

también es un solitón, moviéndose con velocidad v,
$E = \gamma M$, $P = v\gamma M$. Al cuantizar la teoría el kink representará
una partícula (cuya masa cambia por correcciones cuánticas)
Otro punto importante es que el kink es no perturbativo:

$$U(\phi) = -\frac{m^4}{4\lambda} - m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

la masa es taquiónica, y λ es la cte de acoplamiento

$$\Box\phi - m^2\phi = -\lambda\phi^3$$

se puede hacer teoría de perturbaciones en λ, pero el kink
va como $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ y por tanto no puede obtenerse así.

aniquilación kink-antikink

Índices topológicos

De nuevo ~~...~~ $U(\phi_i) = 0$ $i = 1, \ldots, M$, $U(\phi) \geq 0$ mín.

pero no necesariamente $\partial_0 \phi = 0$. $\{\phi_i\}$ discreto (no nec. finito)

Para que E sea finita $\phi(x = +\infty, t_0) = \phi_i$ para cierto i

pero por continuidad y como $\{\phi_i\}$ es discreto, $\phi(+\infty, t) = \phi_i \; \forall t$

ídem $\phi(-\infty, t) = \phi_j$. Los valores (ϕ_i, ϕ_j) son invariantes

luego tenemos una ley de conservación. Sin embargo no es de tipo Noether, sino topológica: dos soluciones con distinta topología no pueden conectarse bajo deformación y en particular bajo evolución temporal sin pasar por $E = +\infty$.

Ej. en la teoría $\frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2$ hay dos valores ϕ_i y por tanto cuatro sectores topológicamente no conexos. Se puede definir una corriente topológica y una carga topológica

$$J^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \qquad Q = \int dx\, J^0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\left(\phi(+\infty) - \phi(-\infty)\right)$$

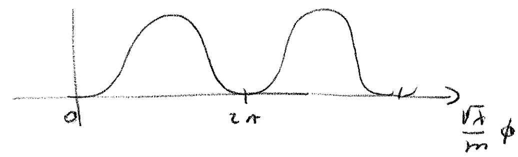
por lo dicho antes $\frac{dQ}{dt} = 0$, además $\partial_\mu J^\mu = 0$ pero se anula idénticamente, sin usar las ec. del mov., esto es típico de las corrientes topológicas.

Los dos vacíos clásicos tienen $Q = 0$, mientras que el kink y el antikink tienen $Q = \pm 1$.

no

Otro ejemplo en 1+1 es

<u>solitón sine-Gordon</u>



$$U(\phi) = \frac{m^4}{\lambda}\left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right)\right)$$

$\lambda > 0$

$$= \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \dots$$

para $\lambda = 0$, es una teoría libre con masa m.

$U(\phi)$ tiene un conjunto infinito de mínimos en $\phi_n = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}2\pi n$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

con un cambio de unidades $\bar{x}^\mu = m x^\mu$, $\bar{\phi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{m^4}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\left(\bar{\partial}_\mu \bar{\phi}\right)^2 - (1 - \cos\bar{\phi})\right)$$

a nivel clásico se puede tomar $\frac{m^4}{\lambda} = 1$, $\quad U(\phi) = 1 - \cos\phi$, $\quad \Box\phi + \operatorname{sen}\phi = 0$

$\mathcal{L}$ es invariante Lorentz, $\phi \to -\phi$ y $\phi \to \phi + 2\pi n$.

Las soluciones caen en sectores topológicos (n_1, n_2)

$$n_1 = \frac{\phi(-\infty)}{2\pi}, \quad n_2 = \frac{\phi(+\infty)}{2\pi}$$

$$Q = n_2 - n_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \partial_x\phi, \quad J^\mu = \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

si ϕ es una variable angular, ϕ y $\phi + 2\pi n$ están identificados

y sólo $Q = n_2 - n_1$ importa.

~~$Q=1$ es el solitón de sine-Gordon, $Q=-1$ el antisolitón~~

~~Las soluciones están caracterizadas por el número de solitones que contiene.~~ Con esta identificación hay dos soluciones estáticas, el solitón con $Q=1$ y el antisolitón $Q=-1$ de sine-Gordon

$$\phi(x) = 4\tan^{-1}(e^{x-x_0}) = \phi_s(x)$$

$$\phi_{\bar{s}}(x) = -\phi_s(x)$$

ambas con $M = 8\frac{m^3}{\lambda}$

Entre las soluciones no estáticas ~~hay~~ cualquier valor de Q es posible, Q representa el número de solitones de la solución. En particular hay un tercer tipo de solitón (no sup. energía localizada, pero no estático) llamado el doblete y que puede interpretarse como un estado ligado solitón-antisolitón, con $E < 2M$

NO

Teorema de Derrick

Consideremos una teoría en $D+1$ dim. con campos escalares sin acoplamientos derivativos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - U(\vec{\phi}), \qquad U(\vec{\phi}) \geq 0$$

Para una solución estática $\nabla^2\vec{\phi} = \frac{\partial U}{\partial\vec{\phi}}$

que deriva de $\delta W[\vec{\phi}] = 0$, con $W[\vec{\phi}]$ la energía estática

$$W[\vec{\phi}] = \int d^Dx\,\left(\tfrac{1}{2}\nabla_i\vec{\phi}\cdot\nabla_i\vec{\phi} + U(\vec{\phi})\right) \equiv V_1[\vec{\phi}] + V_2[\vec{\phi}]$$

sea $\vec{\phi}(\vec{x})$ una solución. Defino $\vec{\phi}_\lambda(\vec{x}) = \vec{\phi}(\lambda\vec{x})$

$$W[\vec{\phi}_\lambda] = \lambda^{2-D}V_1[\vec{\phi}] + \lambda^{-D}V_2[\vec{\phi}]$$

por ser solución $\left.\frac{dW}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = (2-D)V_1 - DV_2 = 0$ (teorema del virial)

como $V_1, V_2 \geq 0$, si $D \geq 3$ $V_1 = V_2 = 0$ es la única solución y por tanto no hay soluciones no triviales (estáticas)

Por tanto para que haya soluciones estáticas no triviales en $3+1$ dim. hace falta introducir acoplamientos derivativos u otros campos con espín, etc.

Modelo O(3) no lineal

Si $\overset{2+1}{D=2}$, $V_2[\vec{\phi}] = 0$ según el teorema de Derrick

(el teorema también vale cuando hay ligaduras, si estas son no derivativas)

Para que la solución sea no trivial hace falta que $U(\phi)$ tenga un conjunto continuo de ceros (mínimos). El modelo O(N) consiste en $\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi}$, $\vec{\phi}^{\,2} = 1$ (u otra cte)

con $\vec{\phi}$ de N componentes. Para $N\equiv 3$ hay sol. interesantes.

Sim. SO(3) interna
y O(3)
+ Lorentz externa
Poincaré

La acción es $S[\phi] = \int d^3x \,(\mathcal{L}(x) - \frac{\lambda(x)}{2}(\vec{\phi}^{\,2}(x) - 1))$

con $\lambda(x)$ un multiplicador de Lagrange

$$\Box\phi + \lambda\phi = 0, \quad \vec{\phi}^{\,2} = 1 \qquad \text{ec. mov.}$$

$$\lambda = \lambda\vec{\phi}^{\,2} = \vec{\phi}(\lambda\vec{\phi}) = -\vec{\phi}\Box\vec{\phi} = -\partial_\mu(\underbrace{\vec{\phi}\,\partial^\mu\vec{\phi}}_{0}) + (\partial_\mu\vec{\phi})^2 = (\partial_\mu\vec{\phi})^2$$

Para soluciones estáticas

$$0 = \nabla^2\vec{\phi} + (\nabla\vec{\phi})^2\vec{\phi}, \quad \vec{\phi}^{\,2} = 1$$

$$E = \frac{1}{2}\int (\nabla\vec{\phi})^2\, d^2x$$

La energía es mínima con $\vec{\phi}(x,t) = \vec{\phi}_0$, donde $\vec{\phi}_0$ es un vector unitario fijo. Por tanto hay rotura espontánea de simetría $SO(3)$, a nivel clásico **pero con un conjunto continuo de vacíos clásicos.**

Veamos si hay solitones, Para que la energía sea finita

$$r\,|\nabla\vec{\phi}| \to 0 \quad \text{con } r\to\infty$$

lo cual implica $\vec{\phi}(\vec{x}) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \phi_0$ con el mismo $\vec{\phi}_0$ en todas direcciones, ya que $\nabla\vec{\phi} = \hat{r}\,\partial_r\vec{\phi} + \hat{r}^\perp\frac{1}{r}\partial_\theta\vec{\phi}$

$$r|\vec{\nabla}\vec{\phi}| = (|r\partial_r\vec{\phi}|^2 + |\partial_\theta\vec{\phi}|^2)^{1/2} \to 0 \Rightarrow \partial_\theta\vec{\phi}\to 0$$

En este caso $\vec{\phi}(\infty) = \vec{\phi}_0$ (indep. de cómo se vaya a ∞)
≡ desde qué dirección

y el plano $\mathbb{R}^2$ está compactificado a S_2, la superficie de una esfera tridimensional, ya que $\vec{\phi}$ es univaluada ~~en~~ S_2 y no singular en S_2. Por tanto las $\vec{\phi}$ de energía finita no singulares son aplicaciones de

$$S_2 \longrightarrow S_2, \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{\phi}(\vec{x})$$

ya que $\vec{\phi}^2 = 1$ y por tanto es un punto de S_2.

El conjunto de aplicaciones continuas ~~homomorfismos~~ $f: S_n \to M$ donde M es una variedad dif. puede clasificarse topológicamente mediante una relación de equivalencia: f, g son equivalentes si puede deformarse una en otra continuamente, más precisamente, si $\exists\ h(x,t): S_n \times I \to M$, con $I = [0,1]$

h continua (respecto de (x,t)) con $h(x,0) = g$, $h(x,1) = f$.

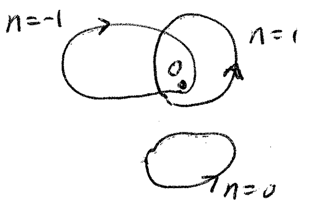
En este caso se dice que f y g son homotópicas.

El conjunto de clases de equivalencia o clases de homotopía se designa por $\Pi_n(M)$, que además tiene estructura de grupo (si M es conexo).

Si M es topológicamente trivial, difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, $\Pi_n(M) = 0$, es decir sólo tiene una clase de equivalencia, todas las aplicaciones son deformables unas en otras. En particular $\Pi_1(M) = 0$

es decir todas las curvas cerradas son homotópicamente equivalentes, lo cual equivale a decir que M es simplemente conexo.

Si a $\mathbb{R}^2$ se le quita un punto O que da una variedad M (abierta respecto de $\mathbb{R}^2$) no simplemente conexa



los caminos cerrados, $S_1 \to M$ son deformables entre sí si dan el mismo número de vueltas alrededor de O y en el mismo ~~sen~~ sentido, por tanto $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$

Forman grupo en el siguiente sentido: dados $f, g : S_1 \to M$, $\theta \to x$

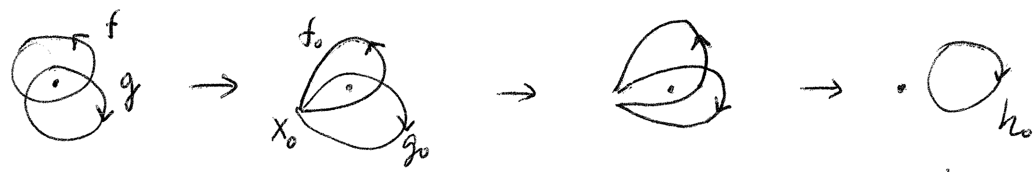
$0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\quad f(0) = f(2\pi)$, ídem g

$\exists\, f_0, g_0$ homotópicamente equivalentes a f, g resp. tal que

$f_0(0) = x_0$, $g_0(0) = x_0$, que son sus rep. canónicos

$h_0 \equiv f_0 g_0$ se define por $h_0(\theta) = \begin{cases} g_0(2\theta) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ f_0(2(\theta - \pi)) & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

es decir

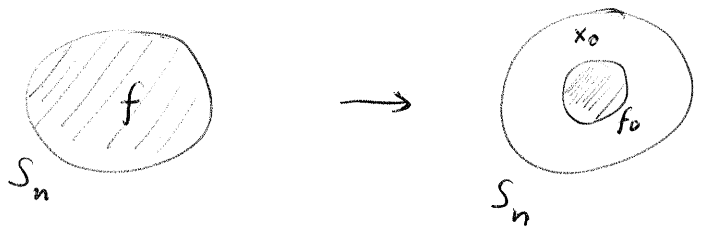


(la orientación no es un invariante homotópico si $n=0$), se prueba que no depende de los representantes elegidos y que

$n_f + n_g = n_h \qquad n_i =$ winding number de i.

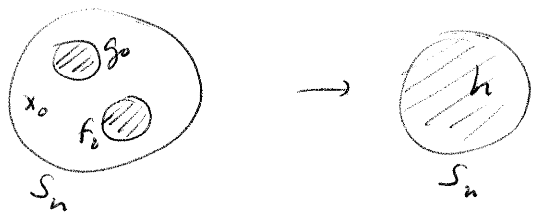
Para S_n se define en forma análoga (deformando f, g para que sean constantes e iguales a x_0 sobre los dos hemisferios de S_n respectivamente

Otra forma de plantearlo es: en el espacio S_n

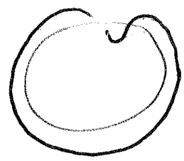


idem g

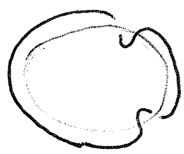
h_0 =



ej. $S_1 \to S_1$ $f = g =$



$h =$



$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\theta\,\partial^\mu\theta = \frac{1}{2}(\dot\theta^2 - \theta'^2)$ θ angular y condic. periodica (+) c.c.t

$\omega = e^{i\theta}$

si $\theta(L) = 2\pi n + \theta(0)$

$E = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}(\dot\theta^2 + \theta'^2)$

$\mathcal{H} = \dot\theta\pi - \mathcal{L}$

$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \dot\theta$

sup. sol. estacionaria $E = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}\theta'^2$

$\dot\theta = \theta'$

$j_\mu = -\frac{1}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\theta$ $\epsilon_{01} = +1$ $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \ni n$

$Q = \int_0^L dx\, j^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^L dx\, \partial_x\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\theta = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$
$= n$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\omega^*\partial^\mu\omega$ $j_\mu = \frac{i}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}\,\omega^*\partial^\nu\omega$

$j^0 = -\frac{i}{2\pi}\omega^*\partial_1\omega$

$\omega : S^1 \to S^1$

$1+1$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\theta\,\partial^\mu\theta = \frac{1}{2}(\dot\theta^2 - \theta'^2)$$

θ angular y condic. periódica $[0, L]$

si $\theta(L) = 2\pi n + \theta(0)$

$\omega = e^{i\theta}$

$$E = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}(\dot\theta^2 + \theta'^2)$$

$$\mathcal{H} = \dot\theta\pi - \mathcal{L}$$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \dot\theta$$

sup. sol. estacionaria $E = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}\theta'^2$

$$\ddot\theta = \theta''$$

Esta variedad es homotópicamente equivalente a S_1 (una circunferencia)

luego $\pi_1(S_1) = Z$

$f: S_1 \to S_1$, la clase de homotopía se puede asociar
$\theta \to \Lambda$
$w = e^{i\Lambda}$ a una carga $Q = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\Lambda}{d\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi i} \frac{dw}{w d\theta}$

Teniendo en cuenta que tanto θ como Λ están definidas modulo 2π
y con continuidad. $Q = \frac{\Lambda(2\pi) - \Lambda(0)}{2\pi}$ es evidentemente
invariante bajo deformaciones.

$\Lambda_n(\theta) = n\theta$ $n \in Z$ es un rep. de la clase $Q = n$.

Algunos resultados interesantes son

$\Pi_n(A \times B) = \Pi_n(A) \times \Pi_n(B)$

$\Pi_n(S_m) = 0$, $n < m$

$\Pi_n(S_n) = Z$

$\Pi_n(S_1) = 0$, $n > 1$

$\Pi_2(S_n) = 0$, $n \neq 2$

$\Pi_3(S_n) = 0$, $n \neq 2, 3$

$\Pi_3(S_2) = Z$

$\Pi_1(U(n)) = Z$, $n \geq 1$

$\Pi_1(SU(n)) = 0$, $n \geq 2$

$\Pi_1(SU(n)/Z_n) = Z_n$ $n \geq 2$

$\Pi_2(G) = 0$, G grupo de Lie

$\Pi_3(G) = Z$, G g. Lie simple

$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H)$ si G es un g. Lie simple. conexo (mente) $\Pi_1(G) = 0$

$\Pi_n(M)$ abeliano si $n \geq 2$

Volviendo al modelo $O(3)$ no lineal. La propiedad relevante es que $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$, luego hay configuraciones no singulares no triviales de energía finita caracterizadas por un entero Q, y ~~ya que~~ como E está acotado inferiormente debe haber una solución en cada sector Q al menos.*

Nótese que en este caso, a diferencia del kink y sine-Gordon, la topología viene de la ligadura $\vec{\phi}^2 = 1$ y no de los valores de $\vec{\phi}$ en el infinito, $\vec{\phi}_0$ es arbitrario. Si no hubiera ligadura $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\phi} \xrightarrow[r\to\infty]{} \vec{\phi}_0$ cte, $S_2 \to \mathbb{R}^3$, $\pi_2(\mathbb{R}^3) = 0$, no habría solitones. Para soluciones no estáticas $\vec{\phi}(\infty, t) = \vec{\phi}_0(t)$ no es un invariante (al menos no inv. topológico), pero sí lo es Q ya que t es un parámetro continuo.

Q en $S_2 \to S_2$ es el número de veces que $\vec{\phi}(\vec{x})$ recubre $S_2^{(\vec{\phi})}$

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij}\, \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi})\, d^2x$$

Si varío $\vec{\phi}$, $\quad \delta Q = \dfrac{3}{8\pi} \displaystyle\int \epsilon_{ij}\, \delta\vec{\phi}\, (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi})\, d^2x$

pero $\delta\vec{\phi}, \partial_i \vec{\phi}, \partial_j \vec{\phi} \perp \vec{\phi}$ por $\vec{\phi}^2 = 1$, y como $\dim \vec{\phi}^{\perp} = 2$

$\delta Q = 0$. luego es un invariante topológico

* Esto funciona en $D = 1, 2$ pero en $D \geq 3$ por el teorema de Derrick no puede haber solitones ya que al contraer una configuración su energía disminuye a falta de acoplamientos derivativos.

de hecho ~~no depe~~ la forma de Q es la misma en todos los sistemas de coordenadas, y ~~compone~~ lo mismo para otros objetos análogos

$$\epsilon_{ij} \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial b}{\partial x^j} d^2x = \frac{\partial a}{\partial y^l} \frac{\partial b}{\partial y^m} \epsilon_{ij} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} d^2x$$

$$= \frac{\partial a}{\partial y^l} \frac{\partial b}{\partial y^m} \epsilon_{lm} \left| \frac{\partial (y^1, y^2)}{\partial (x^1 x^2)} \right| d^2x = \epsilon_{ij} \frac{\partial a}{\partial y^i} \frac{\partial b}{\partial y^j} d^2y$$

(lo mismo en n dimensiones)

Tomando ϕ_1 y ϕ_2 como coordenadas (a trozos)

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{abc} \, \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_2} d\phi_1 d\phi_2$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \phi_i} = -\frac{\phi_i}{\phi_3} \quad i,j = 1,2 \qquad \phi_a^2 = 1$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int (\phi_3 - \phi_1 \partial_1 \phi_3 - \phi_2 \partial_2 \phi_3) \, d\phi_1 d\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\phi_1 d\phi_2}{\phi_3} = \pm \int \frac{dS^{(int)}}{4\pi}$$

es decir el número de veces que $\vec{\phi} : S_2^{ext} \to S_2^{int}$ recubre $S_2^{(int)}$

(es casi más claro en la rep. de Q $\quad \vec{\phi} \, d_1\vec{\phi} \times d\vec{\phi}_2 = d\vec{S}$

~~Por ej. $\vec{\phi}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r}$ tiene Q~~ $= 1$

Como ejercicio calcular una $\vec{\phi}$ con $Q = 1$

(sol. $(\phi_1, \phi_2) \parallel \hat{x}$, $\quad \phi_3 = \frac{r^2-4}{r^2+4}$, $(\phi_1, \mp\phi_2) = \frac{4r}{r^2+4} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$)

$$\delta Q = \int_V \delta\omega = \int_V d\,\delta\Omega$$

$$= 0 \quad \text{por } \partial V = 0 \qquad \text{"} \int_{\partial V} \delta\Omega \text{"}$$

ej: $\qquad S^1 \to S^1$

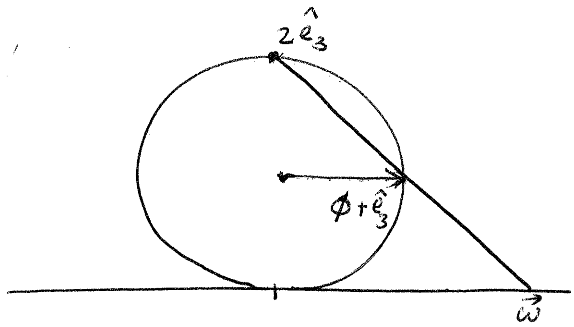
$$\omega = \frac{i}{2\pi} w^* dw \qquad w = e^{i\theta}$$

$$d\omega = \frac{i}{2\pi} dw^* dw = 0 \qquad \text{por } dw^* = -w^* dw\, w^*$$

$$\delta\omega = -\frac{i}{2\pi} w^* \delta w\, w^* dw + \frac{i}{2\pi} w^* d\,\delta w$$

$$= \frac{i}{2\pi} (\delta w\, dw^* + w^* d\,\delta w) = d\Big(\underbrace{\frac{i}{2\pi} w^* \delta w}_{\Omega} \Big)$$

Para resolver las ecuaciones conviene usar una rep. plana de $\vec{\phi}$



$$w_1 = \frac{2\phi_1}{1-\phi_3}$$

$$w_2 = \frac{2\phi_2}{1-\phi_3}$$

$$\vec{\phi}_3^{\,2} = 1$$

y tomando $w = w_1 + iw_2$, a cada $\vec{\phi}$ le corresponde un número complejo del plano extendido, $\vec{\phi} = (0,0,1) \to w = \infty$

$\vec{\phi}(\vec{x}) \to w(z)$ con $z = x_1 + ix_2$.

Una función como $w(z) = \left(\frac{z-z_0}{\lambda}\right)^n$

recubre n veces el plano w n veces. Idem $\left(\frac{z^*-z_0^*}{\lambda}\right)^n$

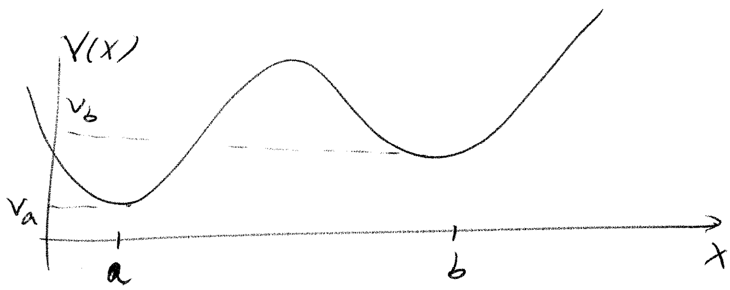
Por tanto tienen $Q = n, -n$ respectivamente.

Se demuestra (por sustitución por ej.) que son soluciones de las ec. de mov. con $E = 4\pi|Q|$, con $\mathcal{H}(x)$ localizada

De hecho cualquier función analítica o antianalítica meromorpha es una solución con $E = 4\pi|Q|$ (aunque ~~and~~ E no nec. finita o localizada), estas son las llamadas soluciones autoduales.

Cuantización de los solitones

Primero consideremos un caso más simple, 0+1 dimensiones, mecánica cuántica con número finito de grados de libertad, y de hecho ~~en una dim~~ una partícula en una dimensión.



$x=a$ es el vacío clásico, $x=b$ un estado no trivial clásicamente estable.

$$V(x) = V_a + \frac{1}{2}\omega^2 (x-a)^2 + \sum_{n>2} \frac{1}{n!}\lambda_n (x-a)^n$$

Si las funciones de onda de energía más baja no son muy extendidas $\langle (x-a)^n \rangle$ podrá despreciarse y la aprox. armónica podrá ser útil, $E_n \simeq V(a) + (n+\frac{1}{2})\omega + O(\lambda_n)$

y tratar los anarmónicos como una perturbación, y

~~$x = a$ + fluctuaciones cuánticas $= a + \eta$, $\eta \xrightarrow[\hbar\to 0]{} 0$~~

~~Haciendo esta aproximación semiclásica o perturbativa no se puede obtener el otro mínimo local $x=b$. tal efecto túnel (las gaussianas son~~

Una forma práctica de llevar las cuentas es introducir un parámetro g

$$V_g(x) \equiv \frac{1}{g^2} V(a + g(x-a))$$

y luego tomar $g = 1$

$$V_g(x) = \frac{V(a)}{g^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x-a)^2 + \sum_{n>2} \frac{\lambda_n g^{n-2}}{n!}(x-a)^n$$

de modo que perturbaciones alrededor de $g=0$ introducen los términos anarmónicos.

Las soluciones asociadas a la otra solución clásica estática $x=b$, no pueden obtenerse perturbativamente. En efecto, habrá un mínimo en $x = b_g = a + (b-a)/g$ $\quad (V(b) = g^2 V_g(b_g))$

$$V_g(x) = \frac{V(b)}{g^2} + \frac{1}{2}\omega'^2(x-b_g)^2 + \sum_{n>2} \frac{\lambda'_n}{n!} g^{n-2}(x-b_g)^n$$

con ω', λ'_n indep. de g. El solapamiento entre los dos tipos de soluciones será

$$\int dx N e^{-(x-a)^2\alpha^2/2} N' e^{-(x-b_g)^2\alpha'^2/2} \sim e^{-(a-b_g)^2\bar{\alpha}^2} = e^{-(b-a)^2\bar{\alpha}^2/g^2}$$

que tiende a cero en forma no perturbativa con $g \to 0$, y por tanto los estados $x=b$ no se expresan perturbativamente en la base $x=a$.

Como también se ve, el efecto túnel no es perturbativo y por tanto este desarrollo también puede considerarse un desarrollo semiclásico.

Lo adecuado es hacer el desarrollo alrededor de $x = b$ directamente. Este es el caso con solitones. Conviene hacer la cuantificación de las fluctuaciones cuánticas alrededor de la solución solitónica directamente, lo cual nos da el llamado sector solitónico del espacio de Hilbert. La cuantización de las fluctuaciones cuánticas sobre la teoría libre nos da el sector del vacío. Notar que el H_0 de QFT es cuadrático, y lo que se ha contado antes no es más que ~~las~~ teoría de perturbaciones usual en QFT.

La estabilidad del sector solitónico es una cuestión dinámica.

- En mecánica clásica no hay efecto túnel
- En mecánica cuántica siempre hay efecto túnel
- En teoría clásica de campos puede haber soluciones no disipativas
- En teoría cuántica de campos ocurre como en ~~me~~ mecánica estadística: las fluctuaciones cuánticas pueden destruir la estabilidad del solitón clásico en cuyo caso sólo hay un sector, el del vacío

o bien mantenerse, en cuyo caso hay un sector por cada valor de Q, la carga topológica, los sectores son ortogonales, más aún no conectados por ningún operador local, en particular el hamiltoniano.

En la práctica se hace una cuantización semiclásica ~~del kin~~ sobre el solitón:

Sup. 1+1, $\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - U(\phi)$

con vacíos clásicos ϕ_1, ϕ_2 (ctes), se define $\varphi(x) = \phi(x) - \phi_1$

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{g^2}\mathcal{L}[\phi_1 + g\varphi(x)] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{g^2}U(\phi_1 + g\varphi(x))$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \underbrace{\frac{1}{g^2}U(\phi_1)}_{0} - \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2(x) + \frac{\lambda_3}{3!}g\varphi^3 + \cdots$$

y tenemos teoría de perturbaciones usual. $\varphi(x)$ es un operador que rep. las fluctuaciones cuánticas sobre ϕ_1. Idem ϕ_2.
So much for the vacuum sector.

sector solitónico:

sea $\sigma(x)$ el $\phi(x)$ del solitón clásico, $\phi(x) = \sigma(x) + g\varphi(x)$

φ será el campo cuántico, $\mathcal{L}_g = \frac{1}{g^2}\mathcal{L}[\sigma + g\varphi]$

lo primero es calcular los modos normales lineales asociados al solitón,

$$V[\varphi] = \frac{1}{g^2}\int dx\left(\frac{1}{2}(D\phi)^2 + U(\phi)\right)$$

$$\left.\frac{\delta V[\varphi]}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{por elección de } \sigma(x)$$

$$V[\varphi] = V[0] + \underbrace{\int dx \left.\frac{\delta V}{\delta \varphi}\right|_{\varphi=0} \varphi(x)}_{0} + \frac{1}{2}\int dx\, dy \left.\frac{\delta^2 V}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi=0} \varphi(x)\varphi(y) + O(\varphi^3)$$

$$= \frac{M}{g^2} + \frac{1}{2}\int dx\, \varphi(x)\left(-\nabla^2 + U''(\sigma(x))\right)\varphi(x) + O(g)$$

$$\left(-\nabla^2 + U''(\sigma(x))\right)\varphi_i(x) = \omega_i^2\, \varphi_i(x)$$ son los modos normales

que son ortonormales y completos

$$\phi(x,t) = \sigma(x) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t)\, g\, \varphi_i(x)$$

$$L = -\frac{M}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dot{c}_n^2(t) - \omega_n^2 c_n^2(t)\right) + O(g)$$

$$H = +\frac{M}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi_n^2(t) + \omega_n^2 c_n^2(t)\right) + O(g)$$

con $\pi_n = \dot{c}_n$

La cuantización es la usual $[c_n, \pi_m] = i\delta_{nm}$

en efecto $$\pi(x) = \frac{1}{g^2}\dot{\phi}(x) = \sum_n \frac{1}{g}\pi_n \varphi_n(x)$$

$$[\phi(x), \pi(x')] = \left[\sum_n c_n g \varphi_n(x), \sum_m \frac{1}{g}\pi_m \varphi_m(x')\right] =$$

$$= i\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x') = i\,\delta(x-x')$$

En el orden más bajo en g

$$E = \frac{M}{g^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\left(N_n + \frac{1}{2}\right) + O(g)$$

cuando $N_n = 0$ tenemos el estado más bajo tipo ~~solitón~~, el solitón cuántico. Si hay φ_n ~~correspondientes a~~ de cuadrado integrable (estados ligados de U''), se interpretan como modos de excitación del ~~solitón~~ (análogo a un estado excitado atómico) y los φ_n del continuo se interpretan como ~~el solitón~~ un estado de colisión del solitón con bosones del sector del vacío.

$$E_{solitón} = \frac{M}{g^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \frac{1}{2} + O(g)$$

la energía física es $E_{sol} - E_{vacío}$, que usualmente todavía es divergente $M_{sol.} = \frac{M}{g^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n - \omega_n^0) + O(g)$ ($\omega_n^0 = \sqrt{k_n^2 + m_0^2}$), pero puede hacerse finita renormalizando m. Si la teoría es renormalizable, los demás observables ya resultan finitos como función de $m_{ren.}$, $g_{ren.}$ etc.

La renormalización es la misma en todos los sectores.

El método semiclásico está basado en que los órdenes superiores sean una perturbación, o equivalentemente en que $\varphi(x)$ sea pequeño lo cual requiere $\omega_n > 0$. Pero debido a la invariancia traslacional rota por el solitón, hay un modo cero:

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} + U'(\sigma) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + U''(\sigma)\right)\frac{d\sigma}{dx} = 0$$

luego $\varphi_0(x) = \sigma'(x)$ tiene $\omega_0 = 0$.

Esto mismo va ocurrir en cualquier teoría con un modo cero por cada simetría rota por el solitón (continua).

El método para evitar problemas al hacer teoría de perturbaciones es el de <u>coordenadas colectivas</u>. En este caso $\sigma(x)$ y $\sigma(x - x_0)$ son los dos soluciones degeneradas del problema: entonces trato x_0 como una de las coordenadas

$$\phi(x,t) = \sigma(x - X(t)) + g \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\, \varphi_n(x - X(t))$$

con σ, φ_n las de antes excepto que $n=0$ no está y con coordenadas $\{X, q_n \; n>0\}$

$$\dot{\phi}(x,t) = -\left(\sigma' + g \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n'\right)\dot{X} + g \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \varphi_n$$

es lineal en $\dot{X}$ y $\dot{q}_n$. Se hace la cuantización usual

$i[P, X] = 1, \quad [q_n, \Pi_n] = 1$ etc.

P coincide con el momento canónico. Y se comprueba de nuevo que las relaciones equivalen a $[\phi(x), \pi(x')] = i\,\delta(x-x')$ etc. Sólo hay que tener cuidado ~~de~~ al construir H ordenando los operadores igual que en $\int\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{D\phi^2}{2} + U(\phi)\right)dx = H$, del sector del vacío lo cual es factible en forma explícita. Por construcción X no aparece en H y $[P,H]=0$, y se puede trabajar en cada sector de P def. por separado sin modo cero (basta calcular $P=0$ y luego hacer un boost)

Por ej. $P=0$ $\quad H = \frac{M}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\right) + O(g)$

En un caso más general se introduce una coordenada colectiva por cada simetría $\boxed{\text{rota}}$ continua!

In (A1) we have used mirror symmetry to relate some of the functions A^k. In addition,

$$A^1_{12} = A^1_{21}, \quad A^2_{12} = -A^2_{21}, \quad A^6_{1234} = -A^6_{4321}. \tag{A4}$$

$$SU_V = \{ e^{-i\cdot \theta_A \frac{\lambda_A}{2}} \}$$

$$SU_A = \{ e^{-i \theta_A \frac{\lambda_A}{2} \gamma_5} \}$$ no es grupo.