Modelo del nucleón como solitón topológico.

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\not{D} - M)q + \frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

1. Simetría quiral:

En ausencia de masas de quarks QCD tiene simetría $SU_L(N_f)\otimes SU_R(N_f)$ (entre otras)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_R i\not{D} q_R + \bar{q}_L i\not{D} q_L - \bar{q}_L M q_R - \bar{q}_R M q_L + \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

$$q = q_R + q_L, \quad \bar{q} = \bar{q}_R + \bar{q}_L$$

~~$q_{R,L} = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)q, \ \bar{q}_{R,L} = \bar{q}P$~~

$$q_{R,L} = P_{R,L}\,q, \qquad \bar{q}_{R,L} = \bar{q}\,P_{L,R} \equiv (q_{R,L})^\dagger\gamma^0, \quad P_{R,L} = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)$$

$$q_{R,L}(x) \Rightarrow U(\Omega_{R,L})\,q_{R,L}\,U^{-1}(\Omega_{R,L}) = \Omega^\dagger_{R,L}\,q_{R,L}(x), \quad \Omega_{R,L} \in SU_{R,L}(N_f)$$

$$\bar{q}_{R,L} \to \bar{q}_{R,L}\Omega_{R,L}$$

La simetría quiral LR está parcialmente rota: la parte vector $\Omega_R = \Omega_L$, es una simetría incluso en presencia de masa si $M = mI$, (sim. isospín cuando $N_f = 2$). La simetría axial $\Omega_R = \Omega_L^\dagger$ está rota por $m \neq 0$ (rot. explícita) pero también lo está espontáneamente incluso cuando $m \to 0$. (Bosones de Goldstone, $\vec{\pi}$, $\vec{K}$, ~~η~~ en $N_f = 3$).

Esto es análogo al modelo $O(3)$ no lineal $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi})^2$, $\vec{\phi}^2 = 1$.

El vacío (clásico) es $\vec{\phi}(x) = \vec{\phi}_0$, el grupo de sim. $G = O(3)$ y el vacío es inv. bajo un subgrupo $H = O(2)$ (rot. alrededor de $\vec{\phi}_0$), G/H es el ~~subgrupo~~ no espontaneamente roto, (?)

En QCD, $|0\rangle$ es invariante bajo $SU_V(N_f) = \{\Omega_R = \Omega_L\} = H$ pero no invariante bajo $G/H = SU_L(N_f)\otimes SU_R(N_f) / SU_V(N_f)$

$\cong SU_A(N_f)$ ($\{\Omega_R = \Omega_L^\dagger\}$ no forma grupo si $\{\Omega\}$ no es abeliano)

SU_V no es un subgrupo normal

$a = 1, \ldots, N_f \qquad A = 1, \ldots, N_f^2 - 1$

$$M_U{}^a{}_{\cdot b} \equiv 2 \langle U | \bar{\Psi}_{Lb} \Psi_R^a | U \rangle$$

$$\lambda_A{}^a{}_{\cdot b} \lambda_A{}^{a'}{}_{\cdot b'} = 2 \delta^a_{b'} \delta^{a'}_b$$

$$= 2 \langle 0 | \hat{U}^\dagger(\Omega_L, \Omega_R) \bar{\Psi}_{Lb} \Psi_R^a \hat{U}(\Omega_L, \Omega_R) | 0 \rangle$$

$$= 2 \langle 0 | (\bar{\Psi}_L \Omega_L^\dagger)_b (\Omega_R \Psi_R)^a | 0 \rangle$$

$$= (\Omega_R M_0 \Omega_L^\dagger)^a{}_b$$

$$M_0 = c \mathbb{1} \qquad (\text{por } M_0 = \Omega M_0 \Omega^{-1} \ \forall \Omega)$$

$$\operatorname{tr} M_0 = c N_f$$

$$\| $$

$$2 \langle 0 | \bar{\Psi}_L \Psi_R | 0 \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{paridad}}}{=} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \qquad c = \frac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle}{N_f}$$

$$\boxed{M_U = \frac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle}{N_f} \Omega_R \Omega_L^\dagger = \frac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle U}{N_f}}$$

$$M_U = -2 \langle \Psi_R \bar{\Psi}_L \rangle_U$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \langle \bar{\Psi}_L \Psi_R \rangle_U = \operatorname{tr} M_U = \dfrac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_0}{N_f} \operatorname{tr} U \\ 2 \langle \bar{\Psi}_R \Psi_L \rangle_U \underset{L \leftrightarrow R}{=} \dfrac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_0}{N_f} \operatorname{tr} U^\dagger \end{array}\right\} \quad \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_U = \frac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_0}{2 N_f} \operatorname{tr}(U + U^\dagger)$$

$(\Omega_L, \Omega_R) \in SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f) \longrightarrow \hat{U}(\Omega_L, \Omega_R)$ en $\mathcal{H}$

$$\hat{U}(\Omega_L, \Omega_R)|0\rangle = \hat{U}(I, \Omega_R \Omega_L^\dagger)\, \hat{U}(\Omega_L, \Omega_L)|0\rangle = \hat{U}(I, \Omega_R \Omega_L^\dagger)|0\rangle$$

luego la acción sólo depende de $U \equiv \Omega_R \Omega_L^\dagger \in SU_A(N_f)$

$|U\rangle \equiv \hat{U}(I, U)|0\rangle$ parametriza los distintos vacíos.

bajo una trasformación quiral)

$$\hat{U}(\Omega_L, \Omega_R)|U\rangle = \hat{U}(\Omega_L, \Omega_R)\hat{U}(I, U)|0\rangle$$
$$= \hat{U}(\Omega_L, \Omega_R U)|0\rangle = \hat{U}(I, \Omega_R U \Omega_L^\dagger)|0\rangle = |U'\rangle$$

es decir, $U \to U' = \Omega_R U \Omega_L^\dagger$

bajo paridad $\quad L \Leftrightarrow R \quad \to \quad U \longrightarrow U' = U^\dagger = \Omega_L \Omega_R^\dagger$

$|0\rangle \to |0\rangle$

Un parámetro de orden de la transición a la fase sin sim. axial

es $\quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle + \langle \bar{\psi}_R \psi_L \rangle$

Definiendo $\quad M_U = \sum_A \langle U | \bar{\psi}_L \lambda_A \psi_R | U \rangle \lambda_A, \qquad A = 0, \dots, N_f^2 - 1$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{N_f}} \qquad \mathrm{tr}(\lambda_A \lambda_B) = 2\delta_{AB} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M\lambda_A)\lambda_A \ \forall M$$

$$\Rightarrow M_U = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(2\psi_R |U\rangle\langle U| \bar{\psi}_L) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(\Omega_R\, 2\psi_R|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_L\, \Omega_L^\dagger) = \Omega_R M_0 \Omega_L^\dagger \quad (*)$$

$$M_0 = \langle 0 | \bar{\psi}_L \lambda_A \psi_R | 0 \rangle \lambda_A \underset{\substack{\uparrow \\ SU_V(N_f)}}{=} \frac{2}{N_f}\langle 0 | \bar{\psi}_L \psi_R | 0 \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Paridad}}}{=} \frac{1}{N_f}\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0$$

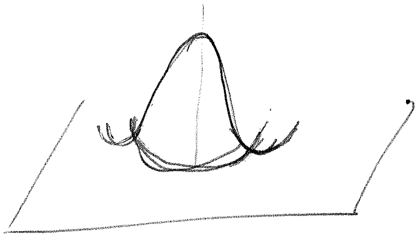
$$M_U = M_0 \Omega_R \Omega_L^\dagger = \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0}{N_f} U,$$

luego este observable distingue entre los distintos vacíos.

(*) Otra forma de hacerlo, $M_U = \langle 0 | \bar{\psi}_L \Omega_L^\dagger \lambda_A \Omega_R \psi_R | 0 \rangle \lambda_A = \Omega_R (\langle 0 | \bar{\psi}_L \lambda'_A \psi_R | 0 \rangle \lambda'_A) \Omega_L^\dagger$
con $\lambda'_A \equiv \Omega_L^\dagger \lambda_A \Omega_R$, $\quad = \Omega_R M_0 \Omega_L^\dagger$ ya que $\mathrm{tr}(\lambda'_A \lambda'_B) = 2\delta_{AB}$.

deformaciones del vacío sim. quiral $\to \pi, K$ σ^-

" del vacío no sim. $\to \rho$ etc (resonancias, exc.)



En el límite $m_{u,d} \to 0$ ($SU(2)$) QCD sólo tiene una escala (de hecho infinitas) $m_{nucleón}$, σ (string-tension), Λ_{QCD}, m_ρ

todas proporcionales, $\not\propto m_\pi \to 0$

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) = -\frac{f_\pi^2}{4} tr(L_\mu L^\mu) \quad \left(= -\frac{f_\pi^2}{4} tr(R_\mu R^\mu)\right)$$

$\boxed{\delta A^{-1} = -A^{-1}\delta A A^{-1}}$

$\cancel{\delta\, \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger} =$

$$L_\mu \equiv U^\dagger \partial_\mu U \to \Omega_L L_\mu \Omega_L^\dagger$$
$$R_\mu \to \Omega_R R_\mu \Omega_R^\dagger$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} tr(\partial_\mu \delta U \partial^\mu U^\dagger + \partial_\mu U \partial^\mu \delta U^\dagger)$$
$$= \frac{f_\pi^2}{4}\left(\partial_\mu tr(\delta U \partial^\mu U^\dagger + \delta U^\dagger \partial^\mu U) - tr(\delta U \partial_\mu \partial^\mu U^\dagger + \delta U^\dagger \partial_\mu \partial^\mu U)\right)$$
$$= \frac{f_\pi^2}{4}\left(\partial_\mu tr(-U^\dagger \delta U L^\mu - \underbrace{U \delta U^\dagger R^\mu}_{U^\dagger \delta U L^\mu}) + tr(\underbrace{\delta U \partial_\mu(L^\mu U^\dagger)}_{U^\dagger \delta U \partial_\mu L^\mu - \delta U L^\mu \underbrace{U^\dagger \partial_\mu U U^\dagger}_{L_\mu}} + U^\dagger \delta U \underbrace{U^\dagger \partial_\mu(U L^\mu)}_{L_\mu L^\mu + \partial_\mu L^\mu})\right)$$

se debe evitar R^μ y $\partial_\mu U^\dagger$ desde el principio

$\partial_\mu U^\dagger = -L_\mu U^\dagger$

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{2} tr(\delta L_\mu L^\mu) = -\frac{f_\pi^2}{2} tr(-U^\dagger \delta U L_\mu L^\mu + U^\dagger(\partial_\mu \delta U) L^\mu)$$
$$= -\frac{f_\pi^2}{2} tr(-U^\dagger \delta U L_\mu L^\mu + \partial_\mu(\delta U L^\mu U^\dagger) - \delta U \partial_\mu(L^\mu U^\dagger))$$
$$= -\frac{f_\pi^2}{2} tr(-U^\dagger \delta U L_\mu L^\mu)) + \frac{f_\pi^2}{2} tr(U^\dagger \delta U \partial_\mu L^\mu)$$
$$= \partial_\mu\left(-\frac{f_\pi^2}{2} tr(U^\dagger \delta U L^\mu)\right)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi$$

$$\delta\psi = i\alpha\psi \qquad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$$

$$\delta\mathcal{L} = -i\alpha\bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)i\alpha\psi$$

$$= -i\alpha\bar{\psi}\{i\not{\partial}\psi\} + (\bar{\psi}\, i\overleftarrow{\not{\partial}})i\alpha\psi + \partial_\mu(i\alpha\bar{\psi}\, i\gamma^\mu\psi)$$

$$= -i\alpha$$

$$\delta\mathcal{L} = \delta\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\delta\psi$$

$$= \delta\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\delta\psi - m\bar{\psi}\delta\psi$$
$$+ \partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi)$$

$$= \delta\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m)\delta\psi + \partial_\mu\underbrace{(\bar{\psi} i\gamma^\mu\delta\psi)}_{\delta J^\mu}$$

conserva la si $\delta\psi$ sim, $\quad \delta\psi = i\alpha\psi \quad$ α global

2. Lagrangiano efectivo: sector del vacío

Si $m=0$ todos los vacíos $|U\rangle$ están degenerados.

(por unidad de volumen)

Si hay una pequeña masa $\frac{\delta E}{V} = \langle U| m\bar{\psi}\psi |U\rangle - \langle 0| m\bar{\psi}\psi|0\rangle$

$$= \frac{m}{2}\,\mathrm{tr}(M_U + M_U^\dagger) - \frac{m}{2}\,\mathrm{tr}(M_0+M_0^\dagger) = -\frac{m\langle\bar\psi\psi\rangle_0}{N_f}\,\mathrm{tr}\left(I - \frac{U+U^\dagger}{2}\right)$$

>0 por $\langle\bar\psi\psi\rangle_0 < 0$ (δ se refiere perturbación en m)

Por otro lado si U no es exactamente cte, sino que depende suavemente de $\vec{x}$, la energía tendrá una contribución del tipo
$$\delta E = \int d^3x\, \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{tr}(\vec\nabla U\cdot\vec\nabla U^\dagger) > 0$$
, salvo órdenes superiores en gradientes. A nivel de acción, para $m=0$

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{tr}(\partial_\mu U\,\partial^\mu U^\dagger) \qquad U\in SU(N_f)$$

es el lagrangiano efectivo con menor número de derivadas y la simetría quiral correcta $U' = \Omega_R U \Omega_L^\dagger \Rightarrow \delta\mathcal{L}=0$, y por tanto debe ser exacto a bajas energías* (si $m=0$). Igual que el modelo $O(3)$ no lineal, este lagrangiano tiene rotura espontánea de simetría. Elegimos el vacío $U_0 = I$. Este lagrangiano tiene las simetrías de QCD.

y paridad

Es una representación de QCD a bajas energías

Ec. de mov: usando $\delta U^\dagger = -U^\dagger\delta U\, U^\dagger$ por $UU^\dagger = I$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{2}\,\mathrm{tr}(U^\dagger\delta U\,\partial^\mu L_\mu) + \partial_\mu\left(-\frac{f_\pi^2}{2}\,\mathrm{tr}(U^\dagger\delta U L_\mu)\right)$$

con $L_\mu \equiv U^\dagger\partial_\mu U$, $R_\mu = U\partial_\mu U^\dagger = -\partial_\mu U U^\dagger = -UL_\mu U^\dagger$

---

* Otras trasformaciones del vacío no asociadas a simetrías (espontáneamente rotas) costarían mucha energía y por tanto no son relevantes a baja energía.

$$-\delta U\, \partial_\mu \partial^\mu U^\dagger \quad - \partial^\mu \partial_\mu U\, \delta U^\dagger$$

$$L_\mu \equiv U^\dagger \partial_\mu U \qquad \partial^\mu L_\mu = -U^\dagger \partial^\mu U U^\dagger \partial_\mu U = -L^\mu L_\mu$$

$$\partial_\mu \partial^\mu U^\dagger = -\partial_\mu (L^\mu U^\dagger) = -\partial_\mu L^\mu\, U^\dagger + L^\mu L_\mu U^\dagger$$

$$= -2\, \partial_\mu L^\mu\, U^\dagger$$

$$U = e^{i \frac{\phi_a \lambda_a}{f_\pi}} \qquad L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$$

$$= i \frac{\lambda_a}{f_\pi} \partial_\mu \phi_a + O(\phi^2)$$

por tanto

ec. mov.* $\quad \frac{f_\pi^2}{2} \partial^\mu L_\mu = 0 \quad$ ó $\quad \frac{f_\pi^2}{2} \partial^\mu R_\mu = 0$

corrientes $\quad \delta J_\mu = -\frac{f_\pi^2}{2} \mathrm{tr}(U^\dagger \delta U L_\mu) = -\frac{f_\pi^2}{2} \mathrm{tr}(U \delta U^\dagger R_\mu)$

(la ligadura $|U| = 1$ no modifica las ec. del mov.)

Se puede parametrizar $\quad U = \exp \frac{i \phi_a \lambda_a}{f_\pi}$, $\quad a = 1, \ldots, N_f^2 - 1$, $\quad \phi_a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + O(\phi^4)$$

que representa un bosón de masa nula, el bosón de Goldstone de la simetría axial rota, además es un pseudoescalar ya que

Paridad $L \leftrightarrow R \equiv U_{(x)} \leftrightarrow U^\dagger_{(\tilde{x})} \equiv \phi(x) \leftrightarrow -\phi(\tilde{x})$

se identifica con $(\vec{\pi}, K, \eta)$ en $N_f = 3$.

corrientes quirales: $\quad \Omega_{R,L} = \exp - i \vec{\theta}_{R,L} \vec{\lambda}/2 \;)$

$$\delta U = -i \vec{\theta}_R \frac{\vec{\lambda}}{2} U + i \vec{\theta}_L U \frac{\vec{\lambda}}{2} \qquad \delta J_\mu = \vec{\theta}_L \cdot \vec{J}^L_\mu + \vec{\theta}_R \cdot \vec{J}^R_\mu$$

$$\vec{J}^\mu_L = -i \frac{f_\pi^2}{4} \mathrm{tr}(L_\mu \vec{\lambda}), \qquad \vec{J}^\mu_R = -i \frac{f_\pi^2}{4} \mathrm{tr}(R_\mu \vec{\lambda})$$

$$\vec{J}^\mu_{R,L} = \frac{1}{2} \vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi} \mp \frac{f_\pi}{2} \partial_\mu \vec{\phi} + O(\phi^3)$$

con $(\vec{\phi} \times \vec{\psi})_a = f_{abc} \phi_b \psi_c$, usando $\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c) = 2(i f_{abc} + d_{abc})$

f_{abc} completamente antisimétrico

d_{abc} " simétrico.

---

* Si hay masa $\quad 0 = \frac{f_\pi^2}{2} \partial^\mu L_\mu - \frac{m \langle \bar{\psi} \psi \rangle_0}{2 N_f} (U - U^\dagger)$

$$W = \frac{1}{2} \langle \log m^2 (1 + m^{-1} m' + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4)(1 - m^{-1} m'$$

$$[+ \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_4) \rangle$$

$$-\frac{f_\pi^2}{2} \operatorname{tr} \operatorname{tr} \vartheta_R \frac{\lambda}{2} U U^\dagger$$

$$= \frac{i}{4} \theta_n \operatorname{tr} \lambda U U^\dagger$$

$$= \frac{1}{2} \langle \log (m^2 + 2m^2 \vartheta_2 + m m' m^{-1} m' + m m' \vartheta_2 - m^2 \vartheta_2 m^{-1} m'$$

$$+ 2 m^2 \vartheta_4 + m m' \vartheta_3 - m^2 \vartheta_3 m^{-1} m' + m^2 \vartheta_2^2) \rangle$$

1+1 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi)$ $\quad U(\varphi) = \lambda (\phi^2 - a^2)^2$

$$\frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda})^2$$

$$\varphi = \phi - \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \qquad \phi^2 = (\varphi + \frac{m}{\sqrt{\lambda}})^2 = \varphi^2 + \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \varphi + \frac{m^2}{\lambda}$$

$$U = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 + \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \varphi)^2 = \frac{\lambda}{4} (\varphi^4 +$$

$$e^{-i \frac{\lambda_a}{2} \theta_a} \qquad e^{-i \frac{\lambda_a}{2} \theta_a \gamma_5}$$

$$m \langle U | \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L | U \rangle$$

$$\delta J_\mu = \vec{\theta}_R \, \vec{J}_\mu^R + \vec{\theta}_L \vec{J}_\mu^L$$

$$U_\lambda = U(\lambda x) \qquad E_{2,\lambda} = \int d^3x \, \lambda^2 \mathcal{L}_2 (\lambda x) = \lambda^{-1} E_2$$

$$E_{4,\lambda} = \int d^3x \, \lambda^4 \mathcal{L}_4 (\lambda x) = \lambda E_4$$

$P_R - P_L = \gamma_5$

de donde $\vec{A}^\mu = \vec{J}_R^\mu - \vec{J}_L^\mu = -f_\pi \partial_\mu \vec{\phi} + O(\phi^3)$

$$\partial_\mu \vec{A}^\mu = -f_\pi \Box \vec{\phi} = + f_\pi m_\pi^2 \vec{\phi} \quad \text{que es PCAC.}$$

(identificando ~~a~~f_π).

donde $\mathcal{L}_m = \dfrac{m\langle\bar\Psi\Psi\rangle_0}{N_f} \operatorname{tr}\left(I - \dfrac{U+U^\dagger}{2}\right) = -\dfrac{m^2_\pi}{2}\vec{\phi}^{\,2} + \cdots$

$$\Rightarrow f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{2m\langle\bar\Psi\Psi\rangle_0}{N_f} \quad (+\,O(m^2))$$

3. Sector solitónico

Para soluciones de energía finita $U(x) \to U_0 = I$, por $m \neq 0^+$

luego $\mathbb{R}^3 \to S^3$, compactificado y $U(x): S^3 \to SU(N_f)$

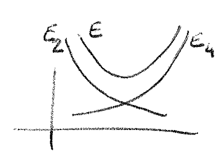
y $\Pi_3(SU(N_f)) = \mathbb{Z}$, $N_f \geq 2$, luego hay configuraciones topológicamente no triviales. Sin embargo no son energéticamente estables de acuerdo con el teorema de Derrick. La estabilidad proviene de términos con mayor número de derivadas

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \operatorname{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) = -\frac{f_\pi^2}{4} \operatorname{tr}(L_\mu L^\mu)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\epsilon^2}{4} \operatorname{tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu])$$

fue propuesto por Skyrme (1961) y es el término más simple con cuatro derivadas y las simetrías correctas que estabiliza el solitón:

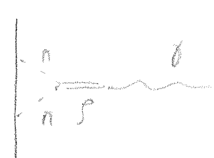
$U(\vec{x}) \to U(\lambda\vec{x})$, $\quad E \to \lambda^{-1} E_2 + \lambda E_4$



El mismo término resulta de dominancia vectorial con

$$\epsilon^2 = \frac{1}{8 f_{\rho\pi\pi}^2}, \quad g_\rho \equiv f_{\rho\pi\pi}$$

≈ 6



Skyrme identificó el número topológico con el número bariónico de $|U(\vec{x})\rangle$. El motivo es que si $U(\vec{x}) = \dfrac{\lambda_A \langle \bar{\psi}_L \lambda_A \psi_R \rangle_B}{\langle \bar{\psi}\psi\rangle_0 / N_f}$, B = barión

debe reflejar el número bariónico, $U(\vec{x})$ debe tener una carga discreta, y a nivel clásico las únicas cargas discretas son los números topológicos, ya que $\delta B = 0$ por ser discreto $\Rightarrow$ B invariante topológico.

Desde el punto de vista de la teoría efectiva de piones (incluyo K, η) el nucleón es un estado formado por piones, lo cual es chocante, pero debe ser así ya que QCD y la teoría efectiva coinciden (espectro, funciones de green) a bajas energías (hay que tener en cuenta que cada sector topológico va por separado por lo que bajas energías se refiere, respecto del estado **fundamental** de cada sector topológico / bariónico).

La relación topología - número bariónico puede verse en 1+1 dim.

Sup. $N_f = 1$ $(N_c = 1)$ $H = -i\gamma^0\gamma^1 \partial = \gamma_5 p$ (teoría libre, $m=0$)

con f. propias $|p, h\rangle = \dfrac{e^{ipx}}{\sqrt{L}} |h\rangle$, $\gamma_5 |h\rangle = h|h\rangle$, $h = \pm 1$, $E_{ph} = hp$

$h = \dfrac{p}{E}$ = velocidad en 1+1. Con cond. p. contorno $p = \dfrac{2\pi k}{L}$, $k \in \mathbb{Z}$

La teoría tiene invariancia axial $\Omega_A = e^{i\gamma_5 \theta}$.

Bajo una transformación local $U(x) = \dfrac{\langle \bar{\psi}_L e^{2i\theta(x)} \psi_R \rangle_0}{\langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle_0} = e^{2i\theta(x)}$

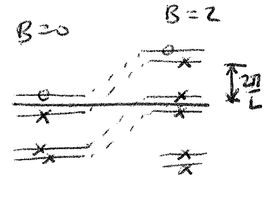
por continuidad $\theta(L) - \theta(0) = \pi n$,

$U(x): S_1 \longrightarrow U(1)$: $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$ hay homotopía no trivial

Tomando $\theta(x) = \dfrac{\pi n}{L} x$, $|E\rangle = \dfrac{e^{ipx}}{\sqrt{L}} |h\rangle \longrightarrow e^{i\gamma_5\theta(x)} |E\rangle$

$= e^{i(p + h\frac{\pi n}{L})x} |h\rangle = |E'\rangle$, con $E' = E + \dfrac{\pi n}{L}$

luego los niveles suben (si $n > 0$) y $B = n$ (n, par)



$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - S$ $S = \frac{1}{2}$

¿bosones → fermión?

4. número bariónico

$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \operatorname{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$ tiene la sim. quiral y la misma realización que en QCD, sin embargo le falta un ingrediente para ser QCD a bajas energías: si se acopla a un campo gauge externo no tiene la anomalía, por ej: si el campo es e.m. no tiene $\pi^0 \to \gamma\gamma$, que sí está presente en la teoría fermiónica subyacente.

Más evidente es que es inv. bajo $U(x) \to U^\dagger(x)$ además de bajo $U(x) \to U^\dagger(\tilde{x})$ que es paridad. Esta nueva sim. no lo es de QCD. ($\equiv \phi(x) \to -\phi(x) \Rightarrow$ conservación de $(-1)^{N_\pi}$ N_π = nº de (π, K, η) en una reacción, por ej. $K^+K^- \to \pi^+\pi^0\pi^-$ estaría prohibida en $\mathcal{L}_2$).

La modificación más simple a las ec. de mov. que respete paridad pero viole $(-1)^{N_\pi}$ (con menor número de derivadas) es

$$0 = \frac{f_\pi^2}{2} \partial_\mu L^\mu + i\lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^\mu L^\nu L^\rho L^\sigma$$ (sup. $m = 0$)

$= U L_\mu(\tilde{x}) U^\dagger$

bajo paridad $L^\mu_{(x)} \to R_\mu(\tilde{x})$, $\partial_\mu L^\mu(x) \to \partial^\mu R_\mu(\tilde{x}) = -U \partial_\mu L^\mu U^\dagger$

y la ec. cambia un signo global ($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$)

En cambio $U(x) \to U^\dagger(x)$ da $L^\mu(x) \to R^\mu(x)$, ~~y no es una sim. si $\lambda \neq 0$~~

$R^\mu = -U L_\mu U^\dagger$, $\partial_\mu L^\mu \to -U \partial_\mu L^\mu U^\dagger$

por lo tanto cambia el signo relativo y no es una simetría si $\lambda \neq 0$.

λ se determina, por ej., para ajustar la anomalía y resulta

$\lambda = -\frac{N_c}{48\pi^2}$. Esta parte de la ecuación de movimiento deriva de la acción de Wess-Zumino, que sin embargo no se puede escribir en la forma usual $\int d^4x \mathcal{L}_{WZ}$ manteniendo simetría quiral

E. Witten NPB223 (1983) 422; 433

Acción WZW

$\nexists$ $U(x)$ da ecuaciones $\delta\Gamma = \int_{M_4} d^4x \, tr(i\lambda \, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} L^\mu L^\nu L^\alpha L^\beta \times U^\dagger \delta U)$

con $\lambda = -\dfrac{N_c}{48\pi^2}$ (parece que uso $\epsilon_{0123} = +1$)

$d^4x \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = dx^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta$ (1-formas)

$L = L^i_\mu dx^\mu$

$\delta\Gamma = \int_{M_4} tr(i\lambda L^4 U^\dagger \delta U)$

$\Gamma = c \int_{D_5} tr(L^5)$ $\quad U(x) \to U(x,\tau) \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ U(x) & \tau = 1 \end{cases}$

$\partial D_5 = M_4$

$\Omega_5 = tr(L^5)$ cerrada $\quad d\Omega_5 = tr \, dL^5 = -tr \, L^6 = 0$

$dL = -L^2$

localmente exacta: $\Omega_5 \underset{loc.}{=} d\Omega_4$

$\Gamma \sim c \int_{M_4} tr \, \Omega_4$ $\quad c \, tr \, \Omega_4 = \mathcal{L}_{WZW}$ no es manifiestamente inv. quiral.

$\exists$ sólo localmente

$\delta\Gamma = 5c \int_{D_5} tr(L^4 \delta L)$

$tr \, L^4 \delta L = d \, tr(L^3 \delta L)$ $\quad$ ($\delta\Omega_5$ es cerrada)

$\delta dL = -\delta L^2$)

en efecto: $d \, tr(L^3 \delta L) = tr(-L^4 \delta L \cancel{+} d\delta L)$

$= tr(-L^4 \delta L + \delta L L + L \delta L) = tr(L^4 \delta L)$

$\delta\Gamma = 5c \int_{M_4} tr(L^3 \delta L)$

$$\langle L^3 \delta L \rangle = \langle L^3 \delta(U^\dagger dU) \rangle = \langle L^3 (-U^\dagger \delta U L + U^\dagger d\delta U) \rangle$$

$$= \langle L^3 (-U^\dagger \delta U L + d(U^\dagger \delta U) + L U^\dagger \delta U) \rangle \qquad dL^3 = -L^4$$

$$= \langle +(L^4 - L^4 + L^4) U^\dagger \delta U \rangle$$

$$= \langle L^4 U^\dagger \delta U \rangle$$

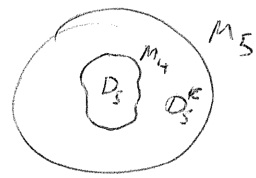
$$\delta \Gamma = 5c \int_{M_4} tr(L^4 U^\dagger \delta U) \qquad c = \frac{i\lambda}{5} = -\frac{iN_c}{240\pi^2}$$

Por argumentos puramente matemáticos

$$c = \frac{-in}{240\pi^2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

necesario para que $\displaystyle c \oint_{M_5} tr\, L^5 = 2\pi k$

($e^{i\Gamma}$ univaluado)



explícita excepto perturbativamente en $\vec{\Phi}$. Esto es análogo a un campo magnético monopolar $\frac{g}{r^3}\vec{r} = \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{B}$ tiene simetría esférica pero no hay un $\vec{A}$ con sim. esférica asociado.

Para obtener la corriente bariónica nos bastan las ec. del movimiento (haciendo trampa)

Usando $\partial_\mu L_\nu = -L_\mu L_\nu + U^\dagger \partial_\mu \partial_\nu U \rightarrow$

$dL = -L^2$

$d(L^3) = -L^4$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^\mu L^\nu L^\rho L^\sigma = -\partial^\mu \left(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^\nu L^\rho L^\sigma \right)$$

las ec. de mov. quedan

$$0 = \partial_\mu J^\mu_L \qquad \text{idem} \qquad 0 = \partial_\mu J^\mu_R$$

con
$$J^\mu_R = -i \frac{f_\pi^2}{2} R^\mu + \lambda\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_\nu R_\rho R_\sigma$$
$$J^\mu_L = -i \frac{f_\pi^2}{2} L^\mu - \lambda\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_\nu L_\rho L_\sigma$$

$$V^\mu = J^\mu_R + J^\mu_L = -i\frac{f_\pi^2}{2}(R^\mu + L^\mu) + \lambda\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(R_\nu R_\rho R_\sigma - L_\nu L_\rho L_\sigma)$$

$$= \sum_{A=0}^{N_f^2-1} V^\mu_A \lambda_A$$

$$V^\mu_{\underset{A}{a}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(V^\mu \lambda_a) = \langle \bar{\psi} \frac{\lambda_a}{2} \gamma^\mu \psi \rangle_v$$

$$(V^\mu)^a{}_b = \langle \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi^a \rangle_v$$

entonces para la carga bariónica

$$B^\mu(x) = \frac{1}{N_c} \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle_v = \frac{1}{N_c}\,\mathrm{tr}(V^\mu) = -\frac{2\lambda}{N_c} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}(L_\nu L_\rho L_\sigma)$$

topológica

$\partial_\mu B^\mu = 0$

$$B^\mu(x) = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}(U^\dagger \partial_\nu U\, U^\dagger \partial_\rho U\, U^\dagger \partial_\sigma U)$$

$$B = -\int d^3x\, \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}(U^\dagger \partial_i U\, U^\dagger \partial_j U\, U^\dagger \partial_k U)$$

que es precisamente la carga topológica de $U(\vec{x}) : S_3 \rightarrow SU(N_f)$

(confirma $\lambda = -\frac{N_c}{48\pi^2}$)

14. usando $\gamma^\mu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\mu + 2g^{\mu\alpha}$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha = \gamma^\mu(-\gamma^\alpha\gamma^\nu + 2g^{\alpha\nu}) = -\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + 2g^{\alpha\nu}\gamma^\mu$$

$$= \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu - 2g^{\alpha\mu}\gamma^\nu + 2g^{\alpha\nu}\gamma^\mu$$

ídem $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha = \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\mu - 2g^{\alpha\nu}\gamma^\mu + 2g^{\alpha\mu}\gamma^\nu$

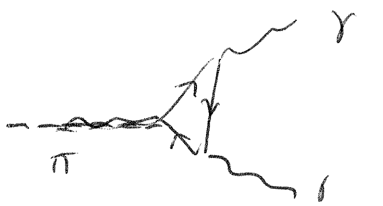
$$[\sigma^{\mu\nu},\gamma^\alpha] = [\tfrac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu),\gamma^\alpha] =$$

$$= \tfrac{i}{2}\big(\gamma^\alpha(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$\epsilon \quad U^\dagger\partial_\mu U \; A_\nu F_{\alpha\beta}$ rompe gauge ([illegible])

π^0 [illegible]

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\ \phi\ F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ rompe quiral $\phi \to \phi + \theta(x)$



($\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ violaría paridad)

no sale de couplings de $\mathcal{L}_4$

$U = e^{i\pi_0\tau_3/f_\pi} \longrightarrow \Omega_R\, e^{i\pi_0\tau_3/f_\pi}\,\Omega_L^\dagger = U'$ $\qquad \pi_0' = \pi_0 + f_\pi\frac{(\theta_L-\theta_R)_3}{2} = \pi_0 - f_\pi\theta_{A,3}$

$\Omega_R = e^{-i\theta_{R,3}\tau_3/2}$

5. Solución tipo erizo (Hedgehog): Skyrmión clásico

Es del tipo $\vec{\phi}(\vec{x}) = f_\pi \theta(r) \hat{r}$, $U(\vec{x}) = e^{i\theta(r)\vec{\tau}\cdot\hat{r}}$ $= \cos\theta + i\vec{\tau}\cdot\hat{r}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\exists$ para $N_f = 2$ (y luego en $SU(N_f)$ en la forma $\begin{pmatrix} U_2 & \\ & I \end{pmatrix}$ si $N_f > 2$)

Tiene la peculiaridad de que el isospín del pión en cada punto apunta en la dirección radial espacial, y es práctico para hacer cálculos. $\theta(r)$ está definido mód. 2π y por continuidad.

Por ej. $B^0(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r^2} \frac{d\theta}{dr}$ (haciendo unos cuantos cálculos)

$$B = \int d^3x\, B^0 = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 B^0 = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta(0)}^{\theta(\infty)} d\theta\, \mathrm{sen}^2\theta = \left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2\pi} \right)_{\theta(\infty)}^{\theta(0)}$$

la condición $U(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} I$ permite tomar $\underline{\theta(\infty) = 0}$, y para que U sea regular en $\vec{x} = 0$, $\underline{\theta(0) = n\pi}$, $U(0) = (-1)^n$

(si $U_{(0)} \neq \pm I$ $\Rightarrow$ no inv. bajo rot. isospín $\Rightarrow$ no inv. bajo rot. espaciales $\Rightarrow$ no continua en $\vec{0}$).

y $B = n$ es el número topológico (en general $\theta(0) - \theta(\infty) = \pi n$ y $\theta(\infty) = 2\pi k$).

Como es una configuración estática $E = -\int d^3x\, \mathcal{L}$, y sustituyendo en $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ de Skyrme ($\mathcal{L}_{W2} = 0$ para una configuración estática y para $N_f = 2$ aunque no fuera estática) mód$(i\pi)$

$$E = 4\pi \frac{f_\pi}{g_\rho} \int_0^\infty dx \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2\theta'^2 + \mathrm{sen}^2(\theta)}_{\mathcal{L}_2} + \underbrace{\mathrm{sen}^2(\theta)\,\theta'^2 + \tfrac{1}{2x^2}\mathrm{sen}^4(\theta)}_{\mathcal{L}_4} \Big)$$

con $x \equiv f_\pi g_\rho r$, $\theta' \equiv \frac{d\theta}{dx}$

los dos primeros términos vienen de $\mathcal{L}_2$ y los otros dos de $\mathcal{L}_4$, como también se ve viendo cómo escalan bajo $\theta(x) \to \theta(\lambda x)$.

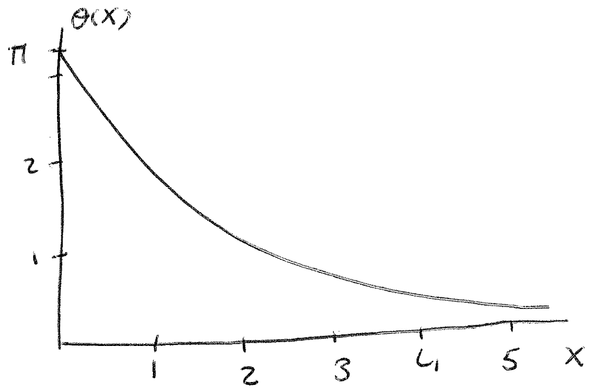
La ecuación del solitón se obtiene con $\delta E = 0$,

$$0 = \underline{(x^2}+2\,\mathrm{sen}^2\theta)\theta'' + \underline{2x\theta'} + \mathrm{sen}(2\theta)\,\theta'^2 - \underline{\mathrm{sen}(2\theta)} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}(2\theta) = 0$$

junto con $\theta(0) = \pi$, $\theta(\infty) = 0$ para $B=1$, el nucleón por ej.

Los términos subrayados vienen de $\mathcal{L}_2$, y no dan una solución estable.

Esta ecuación se puede resolver numéricamente, y para la sol. de menor energía se obtiene la siguiente curva (universal)



con $M = 73\,\frac{f_\pi}{g_\rho}$

(si $g_\rho \to \infty$ $\mathcal{L}_4 \to 0$
$M \to 0$, $r \to 0$)

el término $\mathcal{L}_4$ es irrelevante para $x \to \infty$ y el $\mathcal{L}_2$ para $x \to 0$.

Para $x \to \infty$ $\theta(x) \to \frac{a}{x^2}$, lo cual refleja que el pión no tiene masa, si se añade un término de masa $\theta(x) \sim \frac{e^{-m_\pi r}}{r}$

6. Cuantización del skyrmión

El skyrmión que hemos visto es un solitón clásico y por tanto hay que cuantizarlo para que se parezca a un nucleón o una delta. Esto se debe a que rompe invariancia rotacional y de isospín: no tiene $\vec{J}$ definido ni $\vec{T}$ def. Esto es general: los solitones conectan distintos vacíos y sólo lo pueden hacer rompiendo nuevas simetrías, por ej. el kink no era invariante traslacional.

El skyrmión es $U(\vec{x}): S_3^{ext} \to S_3^{int}$ recubre S_3^{int} una vez luego pasa por todos los vacíos: la simetría quiral se reestablece en parte dentro del skyrmión (correspondiendo al vacío perturbativo del modelo de saco).

En la cuantización semiclásica hay que considerar los modos normales de excitación y las coordenadas colectivas. Estas últimas son las únicas relevantes a bajas energías porque están asociadas a simetrías. En este caso rotaciones espaciales y de isospín (traslacional es trivial)

$$U(\vec{x},t) = A(t)\, U_0(\vec{x})\, A^\dagger(t) \quad , \quad U_0(\vec{x}) = e^{i\theta(r)\vec{\tau}\cdot\hat{r}} = \text{skyrm. estát.}$$

$A(t) \in SU_T(2)$ son las coordenadas colectivas y indican tanto una rotación de espín como de isospín. (El resto del grupo quiral está congelado porque $\dot{U} \underset{r\to\infty}{\to} 0$ para que sea una excitación de energía finita).

$$A(t) = a_0(t) + i\,\vec{a}(t)\vec{\tau} \qquad \text{con} \quad a_0^2 + \vec{a}^{\,2} = 1 \qquad a_\mu \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en el lagrangiano $L = L_2 + L_4$ resulta

$$L(t) = -M + \lambda \operatorname{tr}(\dot{A}\dot{A}^\dagger) = -M + 2\lambda\, \dot{a}_\mu^2 \qquad (\lambda \text{ no es el } \lambda_{WZW})$$

La forma de $\mathcal{L}_4$ no permite $\dot{A}^3$ ó $\dot{A}^4$ ó $\ddot{A}$ etc

$\not{\,}$ WZW

donde $\lambda = \lambda_2 + \lambda_4 = \dfrac{53.3}{f_\pi g_\rho^3}$

$$\lambda_2 = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{f_\pi g_\rho^3} \int_0^\infty dx \, \text{sen}^2\theta \, x^2$$

$$\lambda_4 = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{f_\pi g_\rho^3} \int_0^\infty dx \, x^2 \, \text{sen}^2\theta \left(\theta'^2 + \frac{\text{sen}^2\theta}{x^2} \right)$$

notar que se escala como $M\langle r^2 \rangle$, de hecho es el momento de inercia del skymión como se verá.

El hamiltoniano cuántico es

$$H = M + \frac{p_\mu^2}{8\lambda} \qquad \text{con} \quad p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial a_\mu} \quad \text{y} \quad a_\mu^2 = 1$$

es decir una partícula sobre una esfera S_3. El generador de $SO(4)$ es $N_{\mu\nu} = a_\mu p_\nu - a_\nu p_\mu$ es el "momento angular" en 4 dim. El C.C.O.C. sobre S_3 es $\frac{1}{2} N_{\mu\nu} N_{\mu\nu}$, N_{03} y N_{12} análogo de $\vec{L}^2, L_z$ en S_2. Con soluciones

$$\frac{1}{2} N_{\mu\nu}^2 \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2) = l(l+2) \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$N_{12} \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2) = m_1 \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$N_{03} \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2) = m_2 \, Y^l_{m_1 m_2}(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$$

con
$$a_1 = \text{sen}\,\theta \cos\varphi_1$$
$$a_2 = \text{sen}\,\theta \,\text{sen}\,\varphi_1$$
$$a_0 = \cos\theta \cos\varphi_2$$
$$a_3 = \cos\theta \,\text{sen}\,\varphi_2$$

$l = 0, 1, 2, \ldots$

$m_1 = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$

$m_2 = |m_1| - l, |m_1| - l + 2, \ldots, l - |m_1| - 2, l - |m_1|$

$(l+1)^2$ en total.

llamados armónicos hiperesféricos (en cuatro dimensiones)

Esto de $\Psi(a_\mu)$ ó equiv. $\Psi(A)$

Para interpretar las soluciones construyo los op. $\vec{J}$ y $\vec{T}$:

bajo una rotación $\vec{\alpha}$ y una rotación de isospin $\vec{\beta}$

$$U(x) = A\, U_0(\vec{x})\, A^\dagger \longrightarrow U'(x) = e^{-i\vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}}\, U(R^{-1}x)\, e^{i\vec{\beta}\vec{\tau}/2}$$

$$= e^{-i\vec{\beta}\vec{\tau}/2} A(t)\, e^{i\theta(r)\hat{r}\cdot R\vec{\tau}} A(t)\, e^{i\vec{\beta}\vec{\tau}/2}$$

$$= e^{-i\vec{\beta}\vec{\tau}/2} A(t)\, e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}/2}\, U_0(\vec{x})\, e^{-i\vec{\alpha}\vec{\tau}/2} A^\dagger(t)\, e^{i\vec{\beta}\vec{\tau}/2}$$

es decir $\quad A(t) \longrightarrow A'(t) = e^{-i\vec{\beta}\vec{\tau}/2} A(t)\, e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}/2}$

obviamente $SU_R(2)$ y $SU_T(2)$ conmutan, $[\vec{J}, \vec{T}] = 0$

$$\delta a_0 = -\vec{\alpha}\frac{\vec{a}}{2} + \vec{\beta}\frac{\vec{a}}{2}, \quad \delta\vec{a} = \vec{\alpha}\frac{a_0}{2} - \vec{\beta}\frac{a_0}{2} + \vec{\alpha}\times\frac{\vec{a}}{2} + \vec{\beta}\times\frac{\vec{a}}{2}$$

$$\delta\psi = -\delta a_\mu \partial_\mu \psi = \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{J} - i\vec{\beta}\cdot\vec{T}\right)\psi$$

de donde
$$J_i = \frac{1}{2}\left(N_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} N_{jk}\right)$$
$$T_i = \frac{1}{2}\left(-N_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} N_{jk}\right)$$

Es inmediato comprobar que
$$\vec{J}^2 = \vec{T}^2 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2} N_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4}\, l(l+2) \Rightarrow \quad J = T = \frac{l}{2}$$

(todo esto son propiedades de $SO(4) \subset SU_1(2) \times SU_2(2)$, $SO(4)$ sólo tiene representaciones $j_1 = j_2$ de $SU(2)\times SU(2)$)

$$H = M + \left.\frac{p_\mu^2}{8\lambda}\right|_{a_\mu^2 = 1} = M + \frac{1}{8\lambda}\,\frac{1}{2} N_{\mu\nu}^2 = M + \frac{1}{2\lambda} J(J+1)$$

$J = T$ se observa exp. en los dos bariones de menor energía construidos con $N_f = 2$, N tiene $J = T = \frac{1}{2}$, Δ $J = T = \frac{3}{2}$

$l=1$ $\quad l=3$

$$M_\Delta - M_N = \frac{3}{2\lambda} = 0.028\, f_\pi g_\rho^3$$

En el caso $N_f \geq 3$ se puede probar que el solitón cuántico es necesariamente un fermión si N_c es impar y un bosón si N_c par, utilizando la acción de Wess-Zumino. Para $N_f = 2$ puede ser un fermión, eligiendo l impar. De hecho bajo una rotación espacial de 2π, $A(t) \longrightarrow -A(t)$ ó $a_\mu \longrightarrow -a_\mu$, y $Y^{l}_{m_1 m_2}(-\hat{a}_\mu) = (-1)^l \, Y^{l}_{m_1 m_2}(\hat{a}_\mu)$

luego el solitón cuántico es bosón o fermión según l par o impar.

NPB 228 (1983) 552, PRL 51 (1983) 757

$$\mathcal{L} = \bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - \gamma^0 A_0(x)\right) q \qquad q \to e^{i\gamma_5\theta} q \;,\; \bar{q} \to \bar{q} e^{i\gamma_5\theta}$$

$$j^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q$$

$$\left(i\partial\!\!\!/ - \gamma^0 A_0(x)\right) q = 0 \qquad \gamma^0\gamma^1 = \gamma_5$$

$$E_n\, \cancel{q} = \left(i\partial_t - A_0(x)\right) q = i\gamma_5 \partial_x q$$

$$q_{x} = \underbrace{e^{+i\gamma_5 \int^x A_0\, dx'}}_{U(x)} q_0 \qquad \partial_x q = \gamma_5 A_0(x)\, q +$$

$$i\partial_t q = \left(i\gamma_5\partial_x + A_0\right) q = \underbrace{\left(i\gamma_5 \partial_x U\right)}_{-A_0 U} q_0 + U i\gamma_5 \partial_x q_0 + A_0 U q_0$$

$$= U\, i\gamma_5 \partial_x q_0 = U\, i\partial_t q_0$$

$$\text{si} \quad E_n q_0 = \left(i\gamma_5 \partial_x\right) q_0$$

$$\Rightarrow \quad E_n q = \left(i\gamma_5\partial_x + A_0(x)\right) q$$

$$\rho = q^\dagger q = q_0 U^\dagger U q_0 = \cancel{q_0 e^{-i\gamma_5 \int^x A_0 dx'}} \quad \rho_0$$

Anomalía (en 1+1)

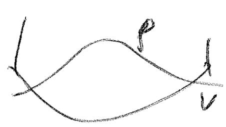
$$\gamma^{0\,2} = I,\; (\gamma^1)^2 = -I,\; \gamma^0 = \gamma^{0\dagger},\; \gamma^1 = -\gamma^{1\dagger}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 \qquad \gamma_5 = \gamma_5^\dagger \quad \gamma_5^2 = I$$

$$j_5^\mu(x) = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \;.\; j_5^0 = \bar{q}\gamma^1 q = j^1 \;,\; j_5^1 = \bar{q}\gamma^0 q = q^\dagger q = j^0$$

(estacionario) $\partial_\mu j_5^\mu(x) = \partial_x j_5^1(x) = \partial_x j^0(x) = \partial_x \rho(x)$

pot. $V(x) \Rightarrow \partial_x \rho \neq 0$



$\Rightarrow \partial_\mu j_5^\mu \neq 0$

no se conserva la simetría quiral axial

- diagramas a 1 loop $W = \sum$ 

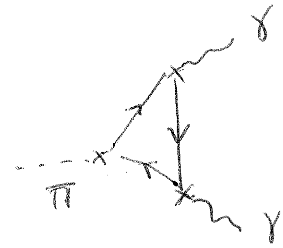
- ambigüedades permitidas en W.

- $\zeta_D(s)$ respeta todas las simetrías no anómalas (transf. de semejanza)

- ¿Teorema del índice?

- Acción de WZW (2 dim).

$\pi^0 \to \gamma\gamma$

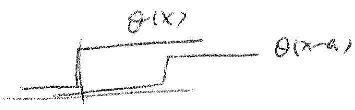


el diagrama diverge UV (log), $\Rightarrow$ hay que regular y luego tomar tomar el límite (o renormalizar). Esto puede romper simetrías (las rompe el regulador y no se recupera luego)

Ejemplo: $\int dx\, f(x) = \int dx\, f(x-a)$ (simetría)

$\Rightarrow \int dx\, (f(x) - f(x-a)) = 0$ NO si $\int$ no converge absolutamente

$f(x) = \theta(x)$, $\int dx\, (\theta(x) - \theta(x-a)) = \int_0^a dx = a \neq 0$



Meto regulador $\Lambda \to \infty$ e indep. de f: $\int_\Lambda dx\, f(x) \equiv \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dx\, f(x)$, rompe la simetría explícitamente

$\int_\Lambda dx (\theta(x) - \theta(x-a)) \underset{\Lambda > |a|}{=} a \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} a$ no se recupera la sim.

es una rotura anómala.

Una forma práctica de calcular diagramas / amplitudes es acoplar el fermión (quarks) a campos externos y considerar el funcional generador

$$\not{D} = i\not\partial + \not{V} + \not{A}\gamma_5 + M U^{\gamma_5} \qquad U = e^{i\phi/f_\pi}$$

ϕ campo del mión (ej: π^0, todo abeliano)

El término de la acción efectiva que describe $\pi^0 \to \gamma\gamma$

es del tipo $\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = c\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \phi\, F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ (ϕ pseudo escalar)

$\mathcal{L}$ conserva paridad y gauge (vector)

Bajo axial global $\quad \phi \to \phi + 2\alpha f_\pi \quad \delta F_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \delta\mathcal{L} \neq 0$ anomalía

$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi} \not{D} \psi$ euclídeo, $S = \int d^D x \, \mathcal{L}(x)$

En presencia de campos gauge $\not{D} = i\not{\partial} + \not{V} + \not{A}\gamma_5 + M$

por ej.

$$Z = e^{-W} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{-S}$$, W es la acción efectiva.

si se considera una transformación de los campos externos $\delta \not{D}$

$$\delta W = -Z^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, e^{-S}(-\delta S) = \langle \int d^D x \, \bar{\psi} \, \delta \not{D} \psi \rangle$$

en particular consideramos una transformación $U_A(1)$ local

$$\not{D} \to e^{-i\alpha\gamma_5} \not{D} e^{-i\alpha\gamma_5}$$ α c-núm. función de x. infinitesimal

$$\delta \not{D} = \{-i\alpha\gamma_5, \not{D}\}$$

~~$\int d^D x \, \bar{\psi} \{-i\alpha\gamma_5, \not{D}$~~ sup. que $\not{D} = i\not{\partial} + \not{V}$

$V_\mu(x)$ c-número. $\delta \not{D} = \{-i\alpha\gamma_5, \gamma^\mu(i\partial_\mu + V_\mu)\}$

$= -i\gamma_5\gamma^\mu[\alpha, i\partial_\mu + V_\mu] = +\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\alpha$

$$\delta W = \langle \int d^D x \, \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \, \partial_\mu\alpha \rangle = -\int d^D x \, \alpha(x) \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle$$

con $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ la corriente axial singlete.

luego si hay simetría $U_A(1)$, $\delta W = 0$. En otro caso la simetría está rota anómalamente.

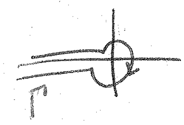
(rotura espontánea no viola $\partial_\mu j^\mu = 0$, y explícita no es:

~~$\delta S = \delta \mathcal{L} = \int -i\alpha \bar{\psi}\gamma_5(i\not{\partial}+\not{V})\psi$~~

$\psi \to e^{-i\alpha\gamma_5}\psi$, $\bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{-i\alpha\gamma_5}$ $\mathcal{L} \to \bar{\psi} e^{-i\alpha\gamma_5}(i\not{\partial}+\not{V}) e^{-i\alpha\gamma_5}\psi = \mathcal{L}$

α global

$$\not{D}^s = -\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, z^s \,\frac{1}{\not{D}-z}$$



Conviene meter una masa $m \to 0^+$ para evitar div. infrarrojas.

$$\langle x|\not{D}^s|x\rangle = -\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, z^s \,\langle x|\frac{1}{\not{D}-z+m}|x\rangle$$

$$\langle x|\frac{1}{\not{D}+m-z}|x\rangle = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\langle x|\frac{1}{\not{D}+m-z}|p\rangle\langle p|x\rangle, \qquad \langle x|p\rangle = e^{-ipx}$$

$$\langle p|x\rangle\langle x|\frac{1}{\not{D}+m-z}|p\rangle = \langle p|x\rangle\langle x|e^{-ip\hat{x}}\,e^{ip\hat{x}}(\not{D}+m-z)^{-1}|p\rangle$$

$$= \langle x|(\not{D}+\not{p}+m-z)^{-1}e^{ip\hat{x}}|p\rangle, \qquad e^{ip\hat{x}}\,i\partial_\mu e^{-ip\hat{x}} = i\partial_\mu + p_\mu$$

$$= \langle x|(\not{D}+\not{p}+m-z)^{-1}|0\rangle \qquad \langle x|0\rangle = 1.$$

$$= \langle x|\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{(\not{p}+m-z)}\left(\not{D}\,\frac{1}{\not{p}+m-z}\right)^N|0\rangle$$

$$\Big[\ (A+B)^{-1} = \cancel{(A(1+BA^{-1}))}^{-1} = \cancel{(1+BA^{-1})^{-1}A^{-1}} = \cancel{\sum_{N\geq 0}(-BA^{-1})^N} A^{-1}\sum_{N\geq 0}(-BA^{-1})^N\ \Big]$$

$$((1+BA^{-1})A)^{-1} = A^{-1}(1+BA^{-1})$$

$$\frac{1}{\not{p}+m-z} = \frac{-\not{p}+m-z}{p^2+(z-m)^2} = -\frac{\not{p}+(z-m)}{p^2+(z-m)^2} \qquad \{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$$

$$\langle x|(\not{D}+m-z)^{-1}|0\rangle = -\sum_{N=0}^{\infty}\int \langle x|\frac{(\not{p}+(z-m))\left(\not{D}(\not{p}+(z-m))\right)^N}{(p^2+(z-m)^2)^{N+1}}|0\rangle\,\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}$$

Para establecer si $\delta W = 0$ ó no hay que dar una def. de W dado que esta magnitud es $\boxed{\text{u.v.}}$ divergente:

Formalmente $\quad Z = \det(\not{D}) = \exp \operatorname{Tr} \log \not{D}$

$$W = -\operatorname{Tr} \log \not{D} = -\sum_n \log \lambda_n \quad \text{con} \quad \not{D} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

es div. u.v. Una definición es

$$\log \not{D} = \frac{d}{ds} \not{D}^s \Big|_{s=0} ,$$

$$W = -\frac{d}{ds} \operatorname{Tr} \not{D}^s \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \sum_n \lambda_n^s \Big|_{s=0}$$

La función $\zeta(s) = \sum_n \lambda_n^s$ está bien definida para $s < -D$ y se puede extender analíticamente en s: $\zeta(s)$ tiene polos en $s = -D, -D+1, \ldots, -1$. En particular es analítica en $s=0$.

$$\delta W = -\frac{d}{ds} \operatorname{Tr} \delta(\not{D}^s) \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \operatorname{Tr}\left(s \not{D}^{s-1} \{-i\alpha\gamma_5, \not{D}\}\right)\Big|_{s=0}$$

$$= +\frac{d}{ds}\, s \operatorname{Tr}(2i\alpha\gamma_5 \not{D}^s)\Big|_{s=0} = \operatorname{Tr}(2i\alpha\gamma_5 \not{D}^s)\Big|_{s=0}$$

Formalmente $\quad \delta W = \operatorname{Tr}(2i\alpha\gamma_5) = 0$

$$\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \langle x| (\not{D}+m-z)^{-1} |0\rangle\right) =$$

$$= -\sum_{N\geq 0} \langle x| \frac{\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \,(\not{p}+z-m)\left[\not{D}(\not{p}+(z-m))\right]^N\right)}{(p^2+(z-m)^2)^{N+1}} |0\rangle$$

$N=0 \to 0$
$\mathrm{tr}\,\gamma_5 =$
$= \mathrm{tr}\,\gamma_\mu \gamma_5 = 0$

$$= -\sum_{N\geq 1} \langle x| \frac{\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \not{D}\left[(\not{p}+z-m)\not{D}\right]^{N-1}\right)}{(p^2+(z-m)^2)^{N}} |0\rangle$$

$$= -\sum_{N\geq 0} \langle x| \frac{\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \not{D}\left((\not{p}+z-m)\not{D}\right)^{N}\right)}{(p^2+(z-m)^2)^{N+1}} |0\rangle$$

$$\delta W = \int \frac{d^Dx\, d^Dp}{(2\pi)^D} \int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} z^s \, 2i\alpha(x) \sum_{N\geq 0} \langle x| \frac{\mathrm{tr}\, \gamma_5 \not{D}\left((\not{p}+z-m)\not{D}\right)^N}{(p^2+(z-m)^2)^{N+1}} |0\rangle$$

~~veamos el caso $D=2$, $\not{D} = i\not\partial + \not{V}$ abeliano~~

$$I = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \int_\Gamma dz \frac{p^{2k}(z-m)^{N-2k}}{(p^2+(z-m)^2)^{N+1}} \frac{z^s}{2\pi i} \qquad k=0,\dots,\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{m^{s+D-(N+1)}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}+k)\,\Gamma(N+1-\frac{D}{2}-k)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(N+1)\,\Gamma(N-D+2)\,\Gamma(s+D-N)}$$

si $N \leq D-2$ $(s=0)$ la potencia de m es positiva, $I \xrightarrow[m\to 0]{} 0$

si $N \geq D$ $(s=0)$ $\Gamma(s+D-N) = \Gamma(D-N) = \infty$ $I=0$.

luego sólo cuenta el caso $N = D-1$

$$I_{\substack{s=0\\N+1=D}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}+k)\,\Gamma(\frac{D}{2}-k)}{\Gamma(D)}$$

Por ej. $D=2$, $\not D = i\not\partial + \not V$ abeliano:

$$\delta W = \int \frac{d^2x\, d^2p}{(2\pi)^2} \int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, z^s\, 2i\alpha(x)\, \frac{\langle x|\, tr(\gamma_5 \not D(\not p + z - m)\not D)\,|0\rangle}{(p^2+\epsilon-m_j^2)^2}\Bigg|_{s=0}$$

por sim. $p_\mu \to 0$, $k=0$ $\quad I=\frac{1}{4\pi}$ $\quad \Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$

$$= \int d^2x\; 2i\alpha(x)\, \langle x|\, tr(\gamma_5 \not D^2)\,|0\rangle\, \frac{1}{(4\pi)}$$

$$tr(\gamma_5 \not D^2) = tr(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu)\, D_\mu D_\nu \qquad \gamma_\mu\gamma_\nu = -\delta_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$$

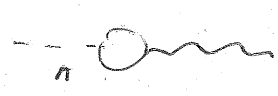
$$\sigma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}\sigma_{01} = \epsilon_{\mu\nu}\frac{1}{2}[\gamma_0,\gamma_1] = \epsilon_{\mu\nu}\gamma_5(+i) \qquad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1 \text{ Euclideo}$$

$$tr(\gamma_5 \not D^2) = i\,\epsilon_{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu] = \epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\delta W = \int d^2x\, \frac{i}{2\pi}\,\alpha(x)\,\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)$$

Esta ~~término~~ variación de la acción efectiva puede generarse con un término de tipo $W_{\pi\gamma} = \int d^2x \frac{i}{2\pi}\pi(x)\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)$ con $\pi(x)$ campo pseudo escalar tal que $\delta_A\pi = \alpha$ que es el campo del "pión" (en 1+1, $U_A(1)$)

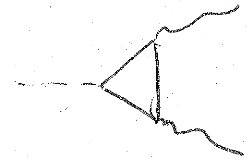
corresponde a



En 3+1 dim. $\delta W = \frac{e^2\alpha(x)}{48\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}N_c$

$$\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = \frac{N_c e^2}{48\pi^2}\frac{\phi_{\pi^0}}{f_\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \frac{\alpha N_c}{6\pi f_\pi}\phi_{\pi^0}F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}$$

$f_\pi = 93$ MeV



$$\langle \vec\pi_{(A)}|\, \vec j_5^{\,\mu}\,|0\rangle = i f_\pi q^\mu \delta_{AB}$$