RELACIÓN DE EXÁMENES DE GEOMETRÍA III

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría III
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

Segundo Parcial de Geometría III

Granada, 5 Junio de 1.996

1. Fórmulas de variación de la longitud (sin demostrar) y Teorema de Bonnet (con demostración).

2. Sea S una superficie compacta y conexa con $K > 0$.
   (a) Si H/K es constante, probar que S es una esfera.
   (b) Si tiene una curvatura principal constante, probar que S es una esfera.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva plana regular tal que $I \cong \alpha(I)$. Sea considera la superficie parametrizada $X(u, v) = \alpha(u) + vA$, $u \in I$, donde A es un vector perpendicular al plano que contiene a $\alpha(I)$. Calcular todas las geodésicas de la superficie. Estudiar si es completa. Probar que dos puntos cualesquiera de la superficie se pueden unir por una geodésica, determinando una de ellas.

4. Sea S una superficie regular y $X : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \to X(u, v) \in S$ una parametrización ortogonal en la que E y G dependen sólo de u. Sea $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ una geodésica p.p.a. con $\alpha(0) = X(0, 0)$, $u'(0) > 0$ y $G(0)v'(0) = c$. Supongamos que $C = \{u \in \mathbb{R}; G(u) = c^2\} \neq \emptyset$ y llamemos β_u a la curva determinada por $u =$ constante, para cada $u \in C$.
   (a) Probar que la función $f(s) = G(u(s))v'(s)$ es constante.
   (b) Demostrar que si β_u es una geodésica de S, entonces α no corta a β_u.
   (c) Probar que si $u_1 = \min\{u \in C; u > 0\}$, entonces existe $s_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $\lim_{s \to s_0} \alpha(s) \in \beta_u$.

Examen final de Geometría III

Granada, 26 de Junio de 1.996.

Primer parcial

1. (Teoría) Triedro y fórmulas de Frenet.

2. (a) Probar que no hay superficies compactas y minimales.

   (b) Probar que la suma de las curvaturas normales para cualquier par de direcciones ortogonales en un punto $p \in S$, es constante.

   (c)

Segundo parcial

1. (Teoría) Desarrollar: Superficies completas.

2. Razonar

   (a) ¿Una superficie donde para cada dos puntos existe una geodésica minimizante es completa?

   (b) Sea una superficie completa donde existe $\delta > 0$ tal que $H \geq \delta$. ¿Es compacta?

   (c) Sea S una superficie compacta con diámetro menor que $\pi/\sqrt{\delta}$, $\delta > 0$. ¿$K \geq \delta$?

3. (a) Sea S una superficie compacta homeomorfa al toro de revolución T que resulta de girar respecto del eje z una circunferencia de radio 1 y centrada en el punto $(2, 0, 0)$. Probar que existen en S puntos donde la curvatura de Gauss es positiva, negativa y cero.

   (b)
   - (Grupo A) Calcular la curvatura geodésica del paralelo superior.
   - (Grupo B) Transporte paralelo.

Examen de Septiembre de Geometría III

Granada, 19 de Septiembre de 1996

Razonar todas las respuestas

1. (Teoría) Enunciar y demostrar el Teorema de Minding.
2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura positiva. Demostrar que son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:
   (a) Todos los planos osculadores de α son concurrentes.
   (b) La curva α es plana.
3. Sea $S = \{p \in \mathbb{R}^3; |p|^2 - \langle p, a\rangle^2 = r^2\}$, con $|a| = 1$ y $r > 0$ un cilindro circular recto de radio r y cuyo eje es la recta que pasa por el origen en la dirección de a. Demostrar que $T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle p, v\rangle - \langle p, a\rangle\langle v, a\rangle = 0\}$. Concluir que todas las rectas normales a S cortan ortogonalmente a su eje. Probar explícitamente que $K = 0$.
4. (a) Encontrar una parametrización de la curva α tal que $\alpha(0) = (1, 0, -5)$ y $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.
   (b) Probar que, si una superficie orientable tiene sus dos curvaturas principales constantes, entonces cada punto suyo es umbilical ó $K \leq 0$.
   (c) Dar un ejemplo de una geodésica en una superficie que tenga longitud mayor que otra curva no geodésica con sus mismos extremos.

Examen de Diciembre de Geometría III

Granada, 13 de Diciembre de 1996

Razonar todas las respuestas

1. (Teoría) Teorema de Hadamard para ovaloides.
2. Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ y la curva contenida en ella definida por $\alpha(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Calcular la curvatura y torsión de α.
   (b) Calcular la curvatura normal y geodésica de α.
   (c) Estudiar si la superficie es completa.
3. Se considera la superficie $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = xy\}$.
   (a) Calcular las líneas asintóticas.
   (b) Hallar las direcciones principales en cada punto.
   (c) Determinar la curvatura de Gauss.

Geometría III. Examen final

Granada, 23 de Junio de 1.997

Razonar todas las respuestas

1. (Teoría) Rigidez de la esfera.

2. Sobre el cono de ecuación $z^2 = \frac{5}{2}xy$ se considera la curva C de los puntos que distan 3 desde el origen de coordenadas. Determinad la curvatura y la torsión de C.

3. A partir de la curva

$$\alpha(s) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}}), \qquad s \in \mathbb{R}$$

se considera la superficie parametrizada

$$S = \{X(s,t) = \alpha(s) + tB(s), (s,t) \in \mathbb{R}^2\},$$

donde $B(s)$ es el vector binormal de la curva α en el punto s. Para cada $t \in \mathbb{R}$, se considera la curva $\alpha_t(s) = X(s,t)$.

   (a) Determinad los valores de t para los que α_t es línea de curvatura de S.

   (b) Determinad los valores de t para los que α_t es geodésica de S.

   (c) ¿Es S localmente isométrica a un plano, una esfera o a una seudoesfera?

4. (a) Estudiad si son isométricos (local y globalmente) los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) Sea $S = f^{-1}(a)$ una superficie de $\mathbb{R}^3$. Dado $\lambda > 0$, se define la superficie $M = g^{-1}(a)$, donde $g(p) = f(\lambda p)$ para todo p tal que λp está en dominio de f. Relacionad las curvaturas de Gauss de S y M

Examen de Diciembre de Geometría III

Granada, 10 de Diciembre de 1997

1. Se dice que una curva $\alpha(t)$ es una hélice si las tangentes de α forman un ángulo constante con una dirección fija. Si se supone que la torsión τ de α es no nula en todo punto, probar:

   (a) α es una hélice si y sólo si k/τ es constante.

   (b) La curva $\alpha(t) = (at, bt^2, t^3)$, donde $3a = 2b^2$, es una hélice.

2. Dadas las superficies $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ y $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$, se denotará por $S_p = \{(x, y, z) \in S; z < p\}$ y por $M_q = \{(x, y, z) \in M; z < q\}$, donde $0 < p, q \leq \infty$.

   (a) Probar que para cualesquiera p y q, S_p y M_q son superficies.

   (b) Estudiar para qué valores de p y q, S_p y M_q son difeomorfas; y en tal caso, dar de forma explícita un difeomorfismo entre ellas.

   (c) Estudiar para qué valores de p y q, S_p y M_q son localmente isométricas.

   (d) ¿Para qué valores de p, se puede asegurar que o bien S_p o M_p son superficies completas?

   (e) Sea $O = (0, 0, 0)$. Describir exp_O de las superficies S_p y M_p para todo p.

3. Estudiar las líneas de curvatura y las geodésicas de las superficies de revolución.

Geometría III. Primer parcial

Granada, 5 de Febrero de 1.997

Razonar todas las respuestas

1. (Teoría) La desigualdad isoperimétrica de curvas: enunciado y demostración, conceptos y resultados preliminares.

2. Se considera el cilindro $M \equiv x^2 + y^2 = 1$ y la curva intersección con la esfera $S \equiv (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hallar una parametrización de una de las dos componentes conexas de dicha curva y su torsión. Determinar la curvatura normal de la curva respecto del cilindro M.

3. Se considera la superficie $S \equiv z = x^3 - 3xy^2$. Estudiar si es difeomorfa al plano $P \equiv y = 0$. Calcular la curvatura de Gauss y los puntos umbilicales.

4. Sea la curva $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$, donde f es una función diferenciable definida en un cierto intervalo I. Sea también v un vector unitario que no pertenece al plano $z = 0$. Para cada $t \in I$, se define $L_t = \{\alpha(t) + sv; s \in \mathbb{R}\}$ y el conjunto $S = \cup_{t \in I} L_t$.

   Probar que S es una superficie. Encontrar las líneas de curvatura que pasan por cada punto. ¿Qué relación existe entre la curvatura de la curva α y la curvatura de Gauss de la superficie S?

Geometría III. Segundo parcial

Granada, 5 de Junio de 1.997

Razonar todas las respuestas

1. (Teoría) Variación primera de la longitud: enunciado y demostración; resultados previos y demostración; consecuencias.

2. (a) Sea P un plano, S una superficie y $f : P \to S$ una isometría local. Probar que
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
para cada par de puntos de $x, y \in P$.

   (b) Sea $\gamma : I \to S$ una geodésica en una superficie orientada S. Probar que si $\sigma_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 0$ ($\mathrm{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = 0$), $\forall s \in I$, entonces $\gamma(I)$ es un segmento de recta.

3. Sea la curva $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$, donde f es una función diferenciable definida en un cierto intervalo I. Sea también $v = (0, 0, 1)$. Para cada $t \in I$, se define $L_t = \{\alpha(t) + sv; s \in \mathbb{R}\}$. Se considera la superficie $S = \cup_{t \in I} L_t$. Estudiar en qué condiciones es una superficie completa y cuándo es isométrica (local o globalmente) al plano.

4. Sea S una superficie completa, γ una curva en $\mathbb{R}^3$ y un punto $p \in S$ que no pertenece a la traza de γ. Supongamos existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que
$$d(\gamma(s_0), p) \leq d(\gamma(s), p) \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$
Probar que la geodésica minimizante que une p con $\gamma(s_0)$ es perpendicular a γ en s_0. (Indicación: usar el Lema de Gauss).

Geometría III. Primer parcial. Grupo A

Granada, 28 de Enero de 1.998

1. Se considera la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Probar que la curvatura de α nunca se anula y calcular el número de vértices. ¿Contradice esto el teorema de los cuatro vértices?

2. Probar que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a. con curvatura $\kappa > 0$ tal que sus rectas normales son perpendiculares a una dirección dada, entonces κ/τ es constante.

3. Se consideran las superficies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que la aplicación $f : S_1 \to S_2$ dada por $f(x, y, 0) = (\cos y, \sin y, x)$ es un difeomorfismo local.

4. Sea $\alpha : I \to S$ una curva en una superficie orientada S y N la aplicación de Gauss de S. Caracterizar los puntos regulares de la curva $\beta = N \circ \alpha$ en función de la curvatura de Gauss K de S.

5. Sea S una superficie y P un plano afín de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $S \cap P$ es una curva regular y que S es tangente a P en cualquier punto de $S \cap P$. Probar que $K = 0$ en $S \cap P$.

6. (a) ¿Existen superficies compactas con curvatura media $H \equiv 0$?
   (b) Sea S una superficie compacta y $\kappa_1 \leq \kappa_2$ sus curvaturas principales. Probar que si κ_1 es constante, entonces S es una esfera.

7. Calcular las curvaturas principales de la superficie $S = \{(z, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ en el punto $p = (1, 1, 0)$.

NOTA. La máxima puntuación del examen es diez puntos. Cada pregunta vale un punto, excepto las preguntas 2, 5 y 6, las cuales valen dos puntos.

GEOMETRÍA III. Segundo parcial. Grupo A

Granada, 3 de Junio de 1.998

1. Sea S una superficie compacta y Ω su dominio interior. Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$ y se define $X(p) = \langle p, a\rangle b$. Calcular la divergencia de X y probar que

$$\int_S \langle p, a\rangle N(p) = -\mathrm{vol}(\Omega) a.$$

2. (a) Usando las fórmulas de Minkowski, probar que un ovaloide con $HK = 1$ es una esfera de radio 1.

   (b) Si $a, b \in \mathbb{R}^3$, calcular explícitamente

$$\int_{S^2} \langle p, a\rangle \langle p, b\rangle.$$

3. Sea $\alpha : I \rightarrow P$ una curva regular contenida en un plano P y sea a un vector unitario perpendicular a P. Supongamos que α es un embebimiento y se considera la superficie $S = X(I \times \mathbb{R})$, donde

$$X(s, t) = \alpha(s) + ta$$

es una carta coordenada de S. Calcular las geodésicas de S. Probar que si α tiene longitud infinita, la aplicación exponencial de S está definida en todo T_pS, para cualquier $p \in S$.

4. Razonar:

   (a) Hallar explícitamente la aplicación exponencial de un plano P.

   (b) Sea $f : S \rightarrow S'$ una isometría entre dos superficies. Probar que área(S)= área(S').

   (c) Sea f una homotecia de $\mathbb{R}^3$ y S una superficie. Estudiar si f lleva geodésicas de S en geodésicas de $f(S)$.

GEOMETRÍA III. Examen final. Grupo A

Granada, 22 de Junio de 1.998

1. Se considera la curva $\alpha(t) = (1 - 2\sin t)(\cos t, \sin t)$. Probar que α es una curva periódica, calcular su periodo y dibujarla. Probar que la curvatura tiene signo y estudiar el número de vértices ¿Hay contradicción con el teorema de los cuatro vértices?.

2. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y = 0\}$.
   (a) Probar que es una superficie y que es orientable.
   (b) Sea la curva $C = S \cap \{z = 0\}$. Estudiar si C es una línea de curvatura y si C es una geodésica en S.
   (c) Estudiar si S es difeomorfa o isométrica al plano $\{z = 0\}$.

3. (a) Sea una superficie compacta S. ¿Existen puntos con $H = 0$? ¿Es posible que $\int_S H < 0$? ¿Y que $\int_S K \leq 0$?
   (b) Probar que una superficie cerrada que satisface $H^2 - K = -1$ es compacta.
   (c) Probar que un ovaloide incluido en una bola de radio r tiene área menor o igual que $4\pi r^2$.

4. Se considera el toro S de la figura.
   (a) Relacionar los triedros de Frenet y de Darboux de la curva $S \cap \{z = 1\}$.
   (b) Hallar los puntos umbilicales de S.
   (c) Hallar $\int_S (H^2 - K)$.

GEOMETRÍA III. Examen de Septiembre. Grupo A
Granada, 9 de Septiembre de 1.998

1. Se considera la curva $\alpha(t) = (1 - 2\sin t)(\cos t, \sin t)$. Probar que α es una curva periódica, calcular su periodo y dibujarla. Probar que la curvatura tiene signo y estudiar el número de vértices ¿Hay contradicción con el teorema de los cuatro vértices?.

2. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y = 0\}$.

   (a) Probar que es una superficie y que es orientable.

   (b) Sea la curva $C = S \cap \{z = 0\}$. Estudiar si C es una línea de curvatura y si C es una geodésica en S.

   (c) Estudiar si S es difeomorfa y si es isométrica al plano $\{z = 0\}$.

3. (a) Sea una superficie compacta S. ¿Existen puntos con $H = 0$? ¿Es posible que $\int_S H < 0$? ¿Y que $\int_S K \leq 0$?

   (b) Estudiar si una superficie cerrada que satisface $H^2 - K = -1$ puede ser compacta.

   (c) Probar que un ovaloide incluido en una bola de radio r tiene área menor o igual que $4\pi r^2$.

4. Se considera el toro de revolución S definido al girar la circunferencia de la figura respecto del eje z.

   (a) Relacionar los triedros de Frenet y de Darboux de la curva $S \cap \{z = 1\}$.

   (b) Hallar los puntos umbilicales de S.

   (c) Hallar $\int_S (H^2 - K)$.

GEOMETRIA III
Convocatoria de Septiembre. Curso 2001/02

1. El triedro de Frenet para curvas de $\mathbb{R}^3$. Teorema fundamental de curvas.

2. Sea $\phi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u))$, donde $(u,v) \in (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$ y la función f viene dada por
$$f(u) = \int_0^u \frac{2t}{\sqrt{1-4t^2}} dt.$$
   (a) Probad que $S = \phi((0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R})$ es una superficie regular.
   (b) Determinad la imagen de S mediante la aplicación de Gauss.
   (c) Calculad su curvatura de Gauss y su curvatura media.

3. Se considera superficie parametrizada
$$X(t,s) = \alpha(t) + s\ v(t),\ \ (t,s) \in I \times \mathbb{R}$$
donde α es una curva diferenciable y v es una función diferenciable de I en $\mathbb{R}^3$, verificando: $|v(t)| = 1$, $v'(t) \neq 0$ y $\langle \alpha'(t), v'(t) \rangle = 0$, $\forall t \in I$.
   (a) Caracterizad los puntos regulares.
   (b) ¿Bajo qué condiciones las curvas $\gamma_t(s) = X(t,s)$, (t fijo) son líneas de curvatura?
   (c) Encontrad condiciones necesarias y suficientes para que la superficie sea localmente isométrica al plano.

GEOMETRIA III
8 de Enero, 2002

1. Enuncia el teorema de los cuatro vértices.
   Sea α la curva 2π-periódica dada por $\alpha(t) = (1-2 \text{ sen } t)(\cos t, \text{ sen } t)$. Prueba que α tiene exactamente dos vértices. ¿Por qué no contradice el teorema de los cuatro vértices?

2. Sea la curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \text{ sen}^2 t,\ a \text{ sen } t \cos t,\ a \cos t)$, $a \in \mathbf{R}$. Determina el triedro de Frenet, la curvatura y torsión de α. Prueba que todos sus planos normales afines pasan por el origen.

3. (a) Se considera una curva $\alpha : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^3$ con $\kappa > 0$. Prueba que las rectas tangentes a α y las rectas tangentes a la curva de sus centros de curvatura, en los puntos correspondientes, son ortogonales.
   (b) Prueba que los segmentos de rectas y arcos de circunferencias son las únicas curvas planas cuyas rectas tangentes equidistan de un punto fijo.

N.B.: Todas las respuestas han de estar razonadas.

GEOMETRIA III

11 de Marzo, 2002

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por el arco, contenida en un plano vectorial P, y que es un embebimiento en $\mathbb{R}^3$. Sea $a \notin P$ un vector unitario de $\mathbb{R}^3$. Se considera el conjunto

$$S = \bigcup_{s \in I} \{\alpha(s) + ta; t \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Prueba que S es una superficie.

   (b) Se define la función $f : S \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $p = \alpha(s) + ta$, la suma del parámetro s y la longitud del segmento que une p con $\alpha(s)$. Halla los puntos donde f es diferenciable y, en éstos, calcula la diferencial de f.

2. Se considera la superficie parametrizada

$$X(u, v) = (2(u + v), 2(u - v), uv), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcula las curvaturas principales, de Gauss y media; y clasifica los puntos atendiendo a su curvatura de Gauss.

   (b) Prueba que las curvas $u = -v$ son líneas de curvatura.

3. Cuestiones:

   (a - grupo A) Sea S un grafo sobre un disco de $\mathbb{R}^2$ de radio r. Si S tiene curvatura media H y $|H| \geq a > 0$, prueba que $a \leq 1/r$.

   (b - grupo A) Sea $\Omega \subset \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; -a < x < a\}$, $a > 0$, un dominio y $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f = 0$ en $\partial\Omega$. Si el grafo S de f tiene curvatura media H con $0 < |H| \leq \frac{1}{2a}$, prueba que $0 < |f| < a$ en Ω.

(a - grupo B) Demuestra que los meridianos de una superficie de revolución son geo-désicas. ¿Lo son también los paralelos?

(b - grupo B) Considera la recta $\mathbf{r} = \{(x, y, z); x = 1, y + z = 0\}$ en el hiperboloide reglado $\mathcal{H} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Transporta el vector $(0, 1, 0)$ tangente en el punto $(1, 0, 0)$ a $\mathcal{H}$, a lo largo de $\mathbf{r}$.

N.B.: Todas las respuestas han de estar razonadas.

GEOMETRIA III

3 de Junio, 2002

1. Desarrollad el siguiente tema: Rigidez de la esfera.

2. Se considera la superficie S grafo de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Hallad la curvatura geodésica de las curvas coordenadas cuando se considera la parametrización natural de S como grafo. Determinad qué curvas coordenadas son geodésicas.

3. Grupo A.

   (a) Sea $f : S \to S$ una isometría en una superficie completa S tal que existe $p_0 \in S$ con $f(p_0) = p_0$ y $df_{p_0} = 1_{T_{p_0}S}$. Probad que f es la aplicación identidad.

   (b) Sea $f : S \to M$ un difeomorfismo entre dos superficies con la propiedad de que existe $\delta > 0$ tal que $|df_p(u)| \leq \delta |u|$, $\forall u \in T_pS, p \in S$. Si M es una superficie completa, probad que S también lo es.

3. Grupo B.

   (a) Sea S una superficie compacta y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función integrable. ¿Qué debe verificar una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ para poder calcular con ella la integral $\int_S f$? Expresad la integral $\int_S f$ usando la parametrización X.

   (b) Sea S la esfera de radio R y sea $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Justificad que se puede aplicar el apartado anterior a la parametrización $X : U \to S$,

   $$X(u, v) = (R\ \mathrm{sen}(u)\cos(v), R\ \mathrm{sen}(u)\mathrm{sen}(v), R\ \cos(u))$$

   y a la función $f : S \to \mathbb{R}$ tal que $f(X(u, v)) = \mathrm{sen}(u)$, $\forall (u, v) \in U$ y $f(p) = 2$, $\forall p \in S - X(U)$. Calculad $\int_S f$.

N.B.: Todas las respuestas han de estar razonadas.

EXAMEN DE GEOMETRIA III
CONVOCATORIA DE JUNIO

27 de Junio, 2002

Nota. Aquéllos alumnos que tengan que recuperar alguno de los parciales, tendrá que hacer sólamente el ejercicio correspondiente. El resto de alumnos harán los tres ejercicios.

1. (1^er parcial)
   Considerad una de las componentes conexas de la intersección de los cilindros circulares rectos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 4$. Hallad, para dicha curva, la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet.

2. (2º parcial)
   Se considera la superficie de revolución S obtenida al girar la curva
   $\{y = x^3, z = 0, -1 < x < 1\}$ respecto de la recta $\{x = 1, z = 0\}$.
   (a) Clasificad los puntos atendiendo al signo de K.
   (b) Estableced explícitamente, si es posible, un difeomorfismo de S con un abierto de un plano.

3. (3^er parcial)
   (a) Sea $f : S \to S$ una isometría en una superficie completa S tal que existe $p_0 \in S$ con $f(p_0) = p_0$ y $df_{p_0} = 1_{T_{p_0}S}$. Probad que f es la aplicación identidad.
   (b) Sea $f : S \to M$ un difeomorfismo entre dos superficies con la propiedad de que existe $\delta > 0$ tal que $|df_p(u)| \leq \delta |u|$, $\forall u \in T_pS, p \in S$. Si M es una superficie completa, probad que S también lo es.

N.B.: Todas las respuestas han de estar razonadas.

GEOMETRIA III. Grupo A.
Examen para subir nota.

1. Demuestra el Teorema Fundamental de la teoría de curvas del espacio.
2. Demuestra el siguiente teorema: *Una superficie en la que todos sus puntos son umbilicales es un abierto de un plano o de una esfera.*
3. Establecer explícitamente una isometría entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z > 0$ menos un meridiano y un abierto de un plano

