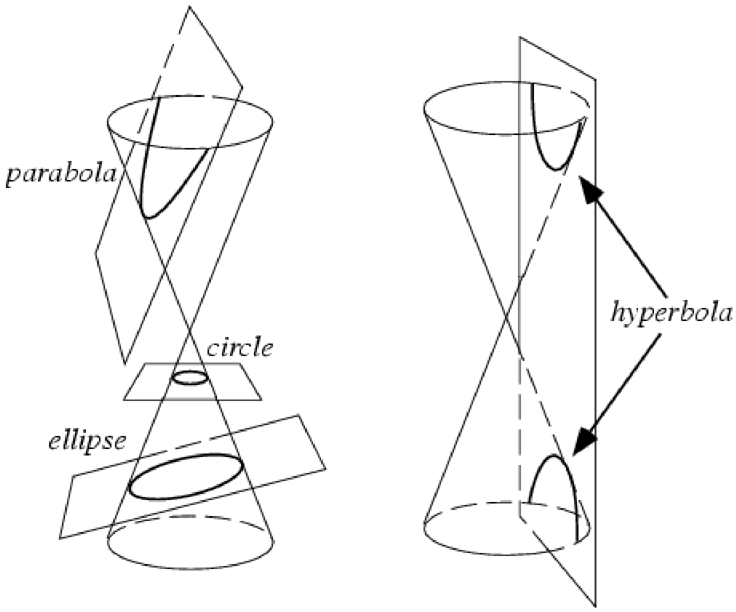
Secciones Cónicas



■ Realizado por

Pedro González Rodelas
15 de Mayo, 2006

■ A partir de un notebook de

Eric W. Weisstein (August 3, 2004)
Downloaded from http://mathworld.wolfram.com/notebooks/PlaneGeometry/ConicSection.nb.
For more information, see Eric's *MathWorld* entry http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html.

■ y usando la siguiente bibliografía

"Álgebra Lineal y Geometría Analítica" Tomo 2, de Joseph Heinhold y Bruno Riedmüller. Edit. Reverté, 1981.

■ Inicialización

```
In[143]:=
        << Graphics`
```

```
In[144]:=
        << Graphics`ImplicitPlot`
        << Graphics`Colors`
```

Expresión general

In[146]:=
```
conica[{x_, y_}, {p_, e_}] := (1 - e^2) x^2 - 2 p x + y^2
```

Tipos de cónicas

Punto doble

El origen

Cualquier punto del plano de coordenadas (x0, y0)

In[148]:=
```
ec1 = Simplify[conica[{x - x0, y - y0}, {0, 0}]] == 0
```

Out[148]=
$$(x - x0)^2 + (y - y0)^2 == 0$$

In[149]:=
```
Solve[ec1, x, y]
```

Out[149]=
$$\left\{\left\{x \to x0 - \sqrt{-y^2 + 2\, y\, y0 - y0^2}\right\}, \left\{x \to x0 + \sqrt{-y^2 + 2\, y\, y0 - y0^2}\right\}\right\}$$

Dos rectas que se cortan

En el origen

En cualquier punto del plano de coordenadas (x0, y0)

In[153]:=
```
ec2 = Simplify[conica[{x - x0, y - y0}, {0, √2}]] == 0
```

Out[153]=
$$-(x - x0)^2 + (y - y0)^2 == 0$$

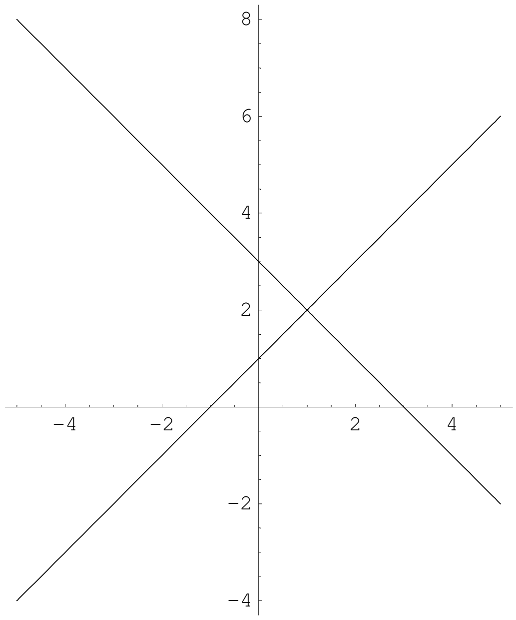
In[154]:=
```
Solve[ec2, x, y]
```

Out[154]=
$$\{\{x \to x0 + y - y0\}, \{x \to x0 - y + y0\}\}$$

In[155]:=
```
ec2 = ec2 /. {x0 → 1, y0 → 2}
```

Out[155]=
$$-(-1 + x)^2 + (-2 + y)^2 == 0$$

In[156]:=
```
ImplicitPlot[ec2, {x, -5, 5}];
```



■ Recta doble

■ Eje Ox

■ Cualquier otra recta paralela al eje Ox

In[159]:=
```
ec3 = Simplify[conica[{x - x0, y - y0}, {0, 1}]] == 0
```

Out[159]=
$(y - y0)^2 == 0$

In[160]:=
```
Solve[ec3, y]
```

Out[160]=
{{y → y0}, {y → y0}}

■ Círcunferencia

■ Centrada en el origen (0, 0) y de radio r

■ Centrada en (x0, 0)

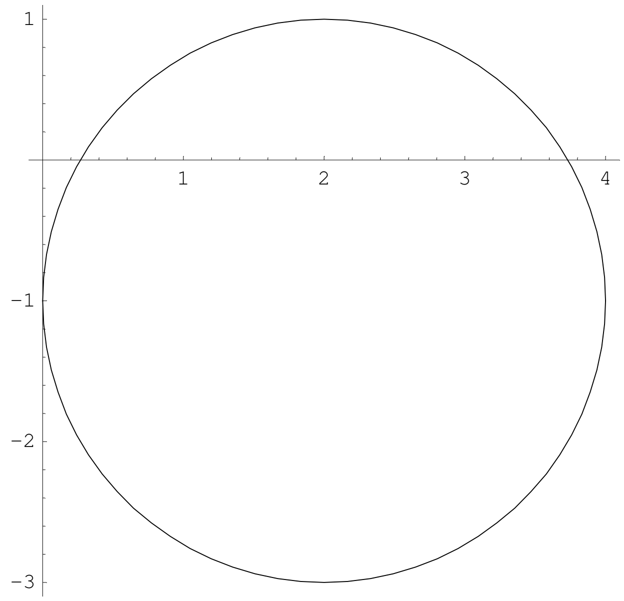
■ Centrada en (x0, y0)

In[165]:=
```
eccircunf = Simplify[conica[{x - x0, y - y0}, {0, 0}]] == r^2
```

Out[165]=
$(x - x0)^2 + (y - y0)^2 == r^2$

In[166]:=

```
ImplicitPlot[eccircunf /. {x0 → 2, y0 → -1, r → 2}, {x, -5, 5}];
```



■ Elipse

Una elipse puede ser definida como el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (también llamados focos) F_1 y F_2 (con $F_1 \neq F_2$) es una constante *2a* (se supone en valor absoluto, con $a>0$). Así pues, si se supone que en un determinado sistema de coordenadas, dichos puntos tienen de coordenadas *(-d,0)* y *(d,0)* respectivamente (con $0<d\leq a$).

Así pues, bastará con ir elevando al cuadrado y simplificando en la siguiente ecuación que expresa dicha relación

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2}+\sqrt{(x+d)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+d)^2+y^2}$$

$$(x-d)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+d)^2+y^2}+(x+d)^2+y^2$$

$$-2dx=4a^2-4a\sqrt{(x+d)^2+y^2}+2dx$$

$$a\sqrt{(x+d)^2+y^2}=a^2+dx$$

$$a^2((x+d)^2+y^2)=a^2a^2+2a^2dx+d^2x^2$$

$$a^2(x^2+2dx+d^2+y^2)=a^2a^2+2a^2dx+d^2x^2$$

$$(a^2-d^2)x^2-a^2(a^2-d^2)+a^2y^2=0$$

$$\left(1-\left(\frac{d}{a}\right)^2\right)x^2+y^2=(a^2-d^2)$$

por lo que bastará con tomar en nuestra ecuación general de las cónicas: $e=\frac{d}{a}$, p=0 e igualarla a (a^2-d^2) , para obtener la ecuación de la elipse que queremos obtener. Además, si seguimos simplificando podemos verificar que de hecho se trata de una elipse sobre los ejes coordenados de semiejes a y $\sqrt{a^2-d^2}$ (recuérdese que se había impuesto que $0<d\leq a$).

$$\frac{x^2}{\frac{a^2-d^2}{\left(1-\left(\frac{d}{a}\right)^2\right)}}+\frac{y^2}{a^2-d^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}=1$$

In[167]:=

```
a = 4; d = 3;
ec4 = Simplify[conica[{x, y}, {0, d/a}]] == a^2 - d^2
```

Out[168]=

$$\frac{7x^2}{16}+y^2==7$$

In[169]:=

```
ecelipse = Expand[1/(a^2 - d^2) conica[{x, y}, {0, d/a}]] == (a^2 - d^2)/(a^2 - d^2)
```

Out[169]=

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} == 1$$

In[170]:=

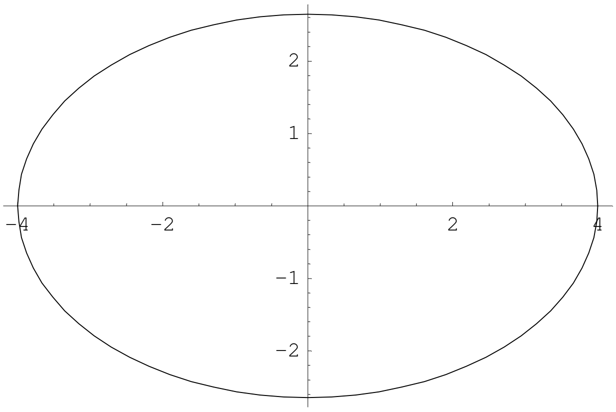
```
Solve[ecelipse, y]
```

Out[170]=

$$\left\{\left\{y \to -\frac{1}{4} \sqrt{7} \sqrt{16 - x^2}\right\}, \left\{y \to \frac{1}{4} \sqrt{7} \sqrt{16 - x^2}\right\}\right\}$$

In[171]:=

```
ImplicitPlot[ecelipse, {x, -5, 5}, AspectRatio → Automatic];
```



Si ahora lo que queremos es aplicarle un giro de ángulo θ seguido de una traslación dada por el vector $v=(v_1, v_2)$ entonces bastará con realizar previamente la correspondiente transformación.

In[172]:=

```
Clear[θ]
Mg = ( Cos[θ]  -Sin[θ]
       Sin[θ]   Cos[θ] );
```

In[174]:=

```
Inverse[Mg] // Simplify
```

Out[174]=

```
{{Cos[θ], Sin[θ]}, {-Sin[θ], Cos[θ]}}
```

In[175]:=

```
(* bastará tomar el opuesto del ángulo que nos den *)
```

In[176]:=

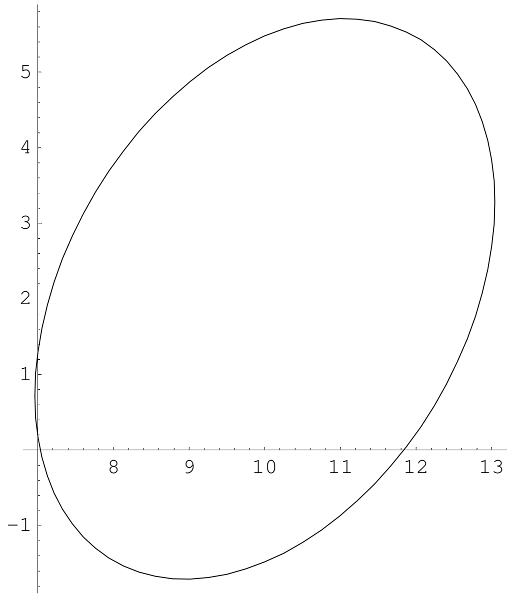
$$\theta = -\frac{\pi}{3};\ \mathbf{v} = \{10, 2\};$$

$$\mathbf{ecelipseb} = \mathbf{Expand}\left[\frac{1}{a^2 - d^2}\ \mathbf{conica}\left[\mathbf{Mg}.(\{x, y\} - v),\ \left\{0, \frac{d}{a}\right\}\right]\right] == \frac{a^2 - d^2}{a^2 - d^2}$$

```
ImplicitPlot[ecelipseb, {x, -5, 50}, AspectRatio → Automatic];
```

Out[177]=

$$\frac{353}{28} - \frac{45\sqrt{3}}{56} - \frac{275\,x}{112} + \frac{9\sqrt{3}\,x}{112} + \frac{55\,x^2}{448} - \frac{37\,y}{112} + \frac{45\sqrt{3}\,y}{112} - \frac{9}{224}\sqrt{3}\,x\,y + \frac{37\,y^2}{448} == 1$$



■ Hipérbola

De una forma totalmente equivalente a la definición de la elipse, una hipérbola puede ser definida como el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (también llamados focos) F_1 y F_2 (con $F_1 \neq F_2$) es una constante $2a$ (se supone en valor absoluto, con $a>0$). Así pues, si se supone que en un determinado sistema de coordenadas, dichos puntos tienen de coordenadas *(-d,0)* y *(d,0)* respectivamente (con $0<a\leq d$).

Así pues, bastará con ir elevando al cuadrado y simplificando en la siguiente ecuación que expresa dicha relación, exactamente igual que hacíamos en el caso de la elipse

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2} - \sqrt{(x+d)^2+y^2} = \pm 2\,a$$

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+d)^2+y^2}$$

$$(a^2-d^2)\,x^2 - a^2\,(a^2-d^2) + a^2\,y^2 = 0$$

$$\left(1-\left(\frac{d}{a}\right)^2\right)x^2 + y^2 = (a^2-d^2)$$

por lo que bastará con tomar en nuestra ecuación general de las cónicas: $e=\frac{d}{a}$, p=0 e igualarla a (a^2-d^2) , para obtener la ecuación de la hipérbola que queremos obtener (sólo que ahora deberá ser $0<a\leq d$)

Además, si seguimos simplificando podemos verificar que de hecho se trata de una hipérbola (recuérdese que ahora $0<a\leq d$).

$$\frac{x^2}{\frac{a^2-d^2}{\left(1-\left(\frac{d}{a}\right)^2\right)}} + \frac{y^2}{a^2-d^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2-a^2} = 1$$

In[179]:=

```
a = 2; d = 3; e = d/a;
conica[{x, y}, {0, e}] == a^2 - d^2
```

Out[180]=

$$-\frac{5\,x^2}{4} + y^2 == -5$$

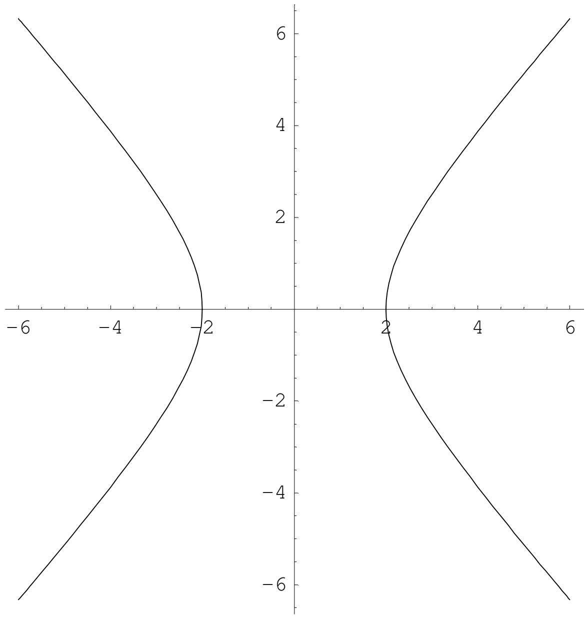
In[181]:=

```
echiperbola = Expand[1/(a^2 - d^2) conica[{x, y}, {0, e}]] == (a^2 - d^2)/(a^2 - d^2)
```

Out[181]=

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} == 1$$

In[182]:=
```
ImplicitPlot[echiperbola, {x, -6, 6}];
```



Si ahora lo que queremos es aplicarle un giro de ángulo θ seguido de una traslación dada por el vector $v=(v_1, v_2)$ entonces bastará con realizar previamente la correspondiente transformación.

In[183]:=
```
Clear[θ]
Mg = ( Cos[θ]  -Sin[θ]
       Sin[θ]   Cos[θ] );
```

In[185]:=
```
Inverse[Mg] // Simplify
```

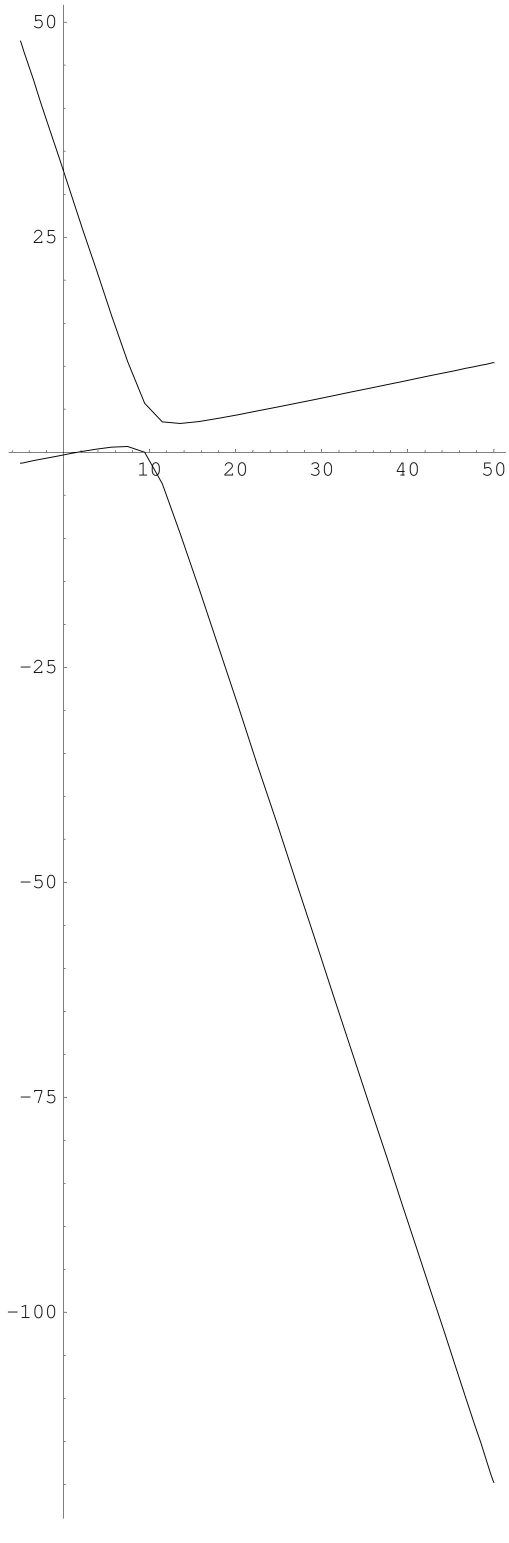
Out[185]=
```
{{Cos[θ], Sin[θ]}, {-Sin[θ], Cos[θ]}}
```

In[186]:=
```
(* bastará tomar el opuesto del ángulo que nos den *)
```

In[187]:=
```
θ = -π/3; v = {10, 2};
echiperbolab = Expand[1/(a^2 - d^2) conica[Mg.({x, y} - v), {0, d/a}]] == (a^2 - d^2)/(a^2 - d^2)
ImplicitPlot[echiperbolab, {x, -5, 50}, AspectRatio → Automatic];
```

Out[188]=

$$-\frac{41}{5}+\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{7x}{4}-\frac{9\sqrt{3}\,x}{20}-\frac{7x^2}{80}-\frac{11y}{20}-\frac{9\sqrt{3}\,y}{4}+\frac{9}{40}\sqrt{3}\,x\,y+\frac{11y^2}{80}==1$$


50
25
-25
-50
-75
-100
10
20
30
40
50

■ Parábola

Una parábola también puede definirse geométricamente, en este caso como el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija R y otro punto fijo $F \notin R$. Así pues, si consideramos un sistema de coordenadas en el plano respecto del cual la recta R tenga por ecuación $x=-\frac{1}{2}p$ (con $p>0$) y el punto fijo $F \equiv (\frac{1}{2}p, 0)$ se tendrá que satisfacer la siguiente relación

$$\sqrt{(x-\frac{1}{2}p)^2+y^2} = x+\frac{1}{2}p$$

$$(x-\frac{1}{2}p)^2+y^2 = x^2+x\,p+\frac{1}{4}p^2$$

$$x^2-x\,p+\frac{1}{4}p^2+y^2 = x^2+x\,p+\frac{1}{4}p^2$$

$$y^2-2\,x\,p = 0$$

In[190]:=

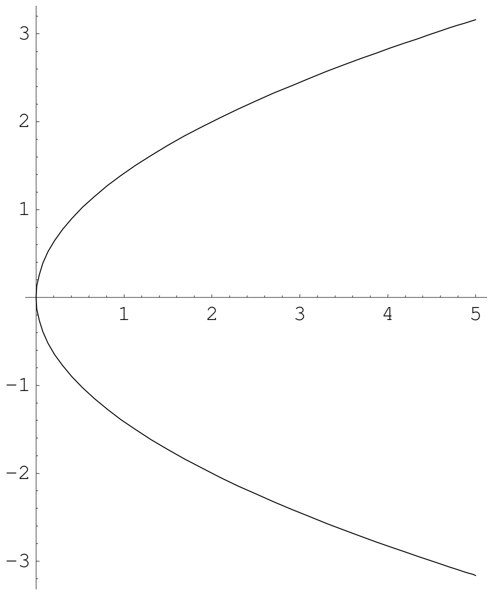
```
parabola = Simplify[conica[{x, y}, {p, 1}]]
```

Out[190]=

$-2\,x+y^2$

In[191]:=

```
parabola = ImplicitPlot[conica[{x, y}, {p, 1}] == 0 /. p → 1, {x, -5, 5}];
```



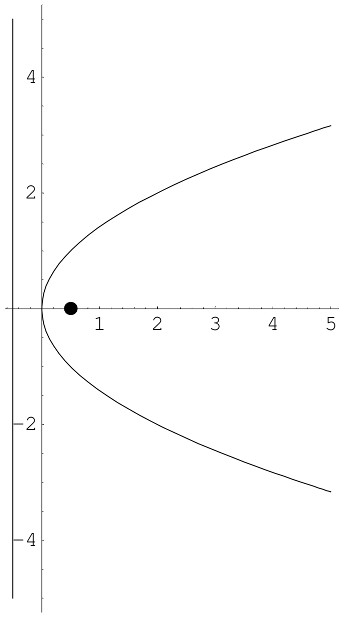
In[192]:=

```
p = 1;
recta = Graphics[Line[{{-p/2, -5 p}, {-p/2, 5 p}}]];

punto = Graphics[{PointSize[0.04], Point[{p/2, 0}]}];
```

In[195]:=

```
Show[parabola, recta, punto];
```



Si ahora lo que queremos es aplicarle un giro de ángulo θ seguido de una traslación dada por el vector $v=(v_1, v_2)$ entonces bastará con realizar previamente la correspondiente transformación.

In[196]:=

```
Clear[θ]
Mg = ( Cos[θ]  -Sin[θ]
       Sin[θ]   Cos[θ] );
```

In[198]:=

```
Inverse[Mg] // Simplify
```

Out[198]=

```
{{Cos[θ], Sin[θ]}, {-Sin[θ], Cos[θ]}}
```

In[199]:=

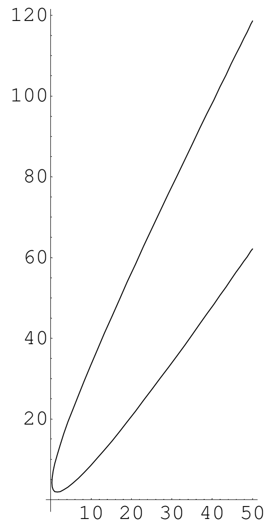
```
(* bastará tomar el opuesto del ángulo que nos den *)
```

In[200]:=

```
θ = -π/3; v = {1, 2};
parabolab = Simplify[conica[Mg.({x, y} - v), {p, 1}] == 0]
ImplicitPlot[parabolab, {x, -5, 50}, AspectRatio → Automatic];
```

Out[201]=

$$1 + 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\left(-2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}\,x + y\right)^2 == x + \sqrt{3}\,y$$



Ejercicios

1.- Practica con los ejemplos propuestos e intenta calcular y representar todas aquellas cónicas que se te ocurran, o que hayas visto en los ejemplos vistos en teoría.