PRÁCTICA 8: DIAGONALIZACIÓN.

INTRODUCCIÓN

En esta práctica nos planteamos el problema de la diagonalización (por semejanza) de una matriz cuadrada A de orden n de coeficientes reales, esto es, encontrar si es posible una matriz diagonal Di y una matriz regular P (ambas cuadradas de orden n) de forma que

$$A=P\ Di\ P^{-1}.$$

Con el objeto de resolver, cuando sea posible, el problema de la diagonalización de una tal matriz A, resumimos los pasos a seguir recordando las sentencias de *Mathematica* que podemos utilizar en cada paso:

1. Determina todos los valores propios de A. Recuerda que, con tal fin, debes resolver la ecuación característica det $(A-\lambda\ Id)=0$. Usa para ello las sentencias Solve y Det.

2. Calcula los subespacios propios asociados a cada uno de los valores propios calculados en el apartado anterior. Repara en el hecho de que el subespacio propio $V\lambda$ coincide con el subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$(A-\lambda\ Id)\ x = 0,$$

por lo que basta resolver dicho sistema (usa la sentencia Solve, al igual que en la práctica anterior para hallar el núcleo de una aplicación lineal).

3. Estudia las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada valor propio de A. Las primeras se obtienen directamente de la ecuación característica y las geométricas mediante la sentencia RowReduce, ya que la multiplicidad geométrica de un valor propio λ viene dada por la igualdad

$$n - \text{rango}(A-\lambda\ Id).$$

4. Deduce si la matriz A es diagonalizable (equivalentemente, todos sus valores propios son reales y además, para cada uno de ellos, coincide la multiplicidad algebraica con la geométrica).

1. ALGORITMO DE DIAGONALIZACIÓN

En el siguiente ejemplo ilustramos el algoritmo de diagonalización (por semejanza) de una matriz cuadrada (de coeficientes reales)

■ Ejemplo 1:

Consideremos la matriz cuadrada de orden 3

In[5]:=
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Out[5]= `{{3, 1, 1}, {1, 3, 1}, {1, 1, 3}}`

In[2]:= `Id = IdentityMatrix[3]`

Out[2]= `{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}`

1. Calculamos las raíces del polinomio característico de A.

In[6]:= `Solve[Det[A - λ Id] == 0, λ]`

Out[6]= `{{λ → 2}, {λ → 2}, {λ → 5}}`

2. Si alguna raíz no es real, la matriz no es diagonalizable. En nuestro caso particular, las tres son reales, por lo que podemos continuar.

3. Hallamos las multiplicidades algebraicas y geométricas.
Algebraicas: valor propio λ=2, 2; valor propio λ=5, 1(ver ecuación característica).
Geométricas: valor propio λ=2, 2 valor propio λ=5, 1, ya que

In[7]:= `MatrixForm[RowReduce[A - 2 Id]]`

Out[7]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego 3-rango(A-2 Id)=2 y de la misma forma, como

```
In[8]:= MatrixForm[RowReduce[A - 5 Id]]
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que 3-rango(A-5 Id)=1.

4. Aplicamos la caracterización de la diagonabilidad. Si para cada valor propio las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, la matriz es diagonalizable, y en caso contrario no lo es. Para la matriz A considerada son iguales para cada valor propio y, por tanto, es diagonalizable.

5. Determinamos bases de los subespacios propios asociados a cada valor propio.

Valor propio λ=2:

```
Solve[(A - 2 Id).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables. More…

{{x → -y - z}}
```

Así, dado que la sentencia Solve nos proporciona unas ecuaciones paramétricas del subespacio propio asociado al valor propio λ=2 , una base del mismo será {{-1,1,0},{-1,0,1}}.

Valor propio λ=5:

```
Solve[(A - 5 Id).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.

{{x → z, y → z}}
```

Por tanto, de estas ecuaciones paramétricas deducimos que una base del subespacio propio asociado al valor propio λ=5 es {{1,1,1}}.

6. Uniendo (por columnas) las bases de cada subespacio propio obtenemos la matriz de paso P:

```
P = Transpose[{{-1, 1, 0}, {-1, 0, 1}, {1, 1, 1}}]

{{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 1, 1}}
```

7. La matriz diagonal Di se calcula colocando en la diagonal los valores propios, tantas veces como indique su multiplicidad y en el mismo orden en el que se construyó la matriz P. Para nuestra matriz A concreta

```
Di = DiagonalMatrix[{2, 2, 5}]
{{2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 5}}
```

8. Comprobación de la solución: las matrices A, P y Di deben satisfacer la identidad

$$A=P\ Di\ P^{-1}.$$

Para nuestro ejemplo

```
A - P.Di.Inverse[P]
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Observamos que cuando los valores propios no son enteros el proceso anterior puede dar lugar a errores. Comprobad que sucede si intentamos seguir los pasos anteriores con la siguiente matriz:

```
In[1]:= A = {{Pi, 2.1, 3}, {2, 5, 3}, {2.1, 4, 0}}
Out[1]= {{π, 2.1, 3}, {2, 5, 3}, {2.1, 4, 0}}
```

2. VALORES Y VECTORES PROPIOS. SENTENCIAS DIRECTAS.

Mathematica incluye sentencias que permiten hallar los valores propios y una base de vectores propios de forma directa y evitar los problemas anteriores: Eigenvalues y Eigenvectors, respectivamente. Volviendo a la matriz del ejemplo primero

■ Ejemplo 2:

```
Eigenvalues[A]
{2, 2, 5}
Eigenvectors[A]
{{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}
```

Obviamente se pueden usar (¡de forma adecuada!) en el curso del algoritmo de diagonalización. Con el siguiente ejemplo ilustramos cuales son las respuestas de *Mathematica* ante matrices no diagonalizables.

■ Ejemplo 3:

```
A = {{-1, -5, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 1}};
Eigenvalues[A]
{-1, -1, 1}
```

```
Eigenvectors[A]
{{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}}
```

Observamos que no se obtiene una base de vectores propios del espacio (la dimensión del subespacio de vectores propios asociado al valor propio -1 es 1). La matriz no es diagonalizable.

3. DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA ORTOGONAL

Finalizamos esta práctica presentando una mejora del proceso de diagonalización cuando la matriz a diagonalizar es simétrica (de coeficientes reales). Recordemos que para una tal matriz la diagonalización siempre es posible. Más aún, podemos conseguir que la matriz de pado P sea ortogonal, en el sentido de que $P^{-1} = P^t$.

Para ello, basta obtener bases ortonormales de los subespacios propios.

■ Ejemplo

Consideramos la matriz A 3x3 del primer ejemplo:

```
In[17]:= A = {{3, 1, 1}, {1, 3, 1}, {1, 1, 3}};
         Eigenvalues[A]
Out[18]= {5, 2, 2}

In[19]:= Eigenvectors[A]
Out[19]= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}

In[20]:= << LinearAlgebra`Orthogonalization`
```

Calculamos una base ortonormal de cada uno de sus subespacios propios. Empezamos por el asociado al valor propio 2 y a continuación el asociado a 5:

```
In[21]:= GramSchmidt[{{-1, 1, 0}, {-1, 0, 1}}]
```

Out[21]= $\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$

In[22]:= `GramSchmidt[{{1, 1, 1}}]`

Out[22]= $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

Así pues, la matriz P de paso ortogonal que obtenemos es

$$P=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

P es ortogonal y satisface la identidad A=P Di P^{-1}(comprueba ambas afirmaciones).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea A la matriz cuadrada de orden 3 siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que 2 es un valor propio de A y {1,1,0} un vector propio asociado.
b) Calcula su polinomio característico.
c) Determina todos los valores propios de A.
d) Calcula los subespacios propios asociados a cada uno de los valores propios calculados en el apartado anterior.
e) Analiza si la matriz es diagonalizable.

2. Diagonaliza, cuando sea posible, las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

diagonalízala y comprueba que si A= P Di P^{-1}, entonces A^9= P Di^9 P^{-1}.

4. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 1 & \pi & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo diagonalízala.

5. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Indica si es diagonalizable y por qué.

2) Diagonaliza, si es posible, la matriz B.

3) Diagonaliza ortogonalmente, si es posible, la matriz B.