PRÁCTICA DE ALGEBRA LINEAL ISOMETRÍAS

1. Isometrías y matrices asociadas

A lo largo de la práctica, consideraremos un tipo particular de aplicaciones lineales definidas en los espacios vectoriales euclídeos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, las isometrías. En concreto estamos interesados en describir sus matrices asociadas en la base canónica correspondiente. Las isometrías se identifican a partir de cualquiera de sus matrices asociadas en bases ortonormales. Más concretamente, las matrices asociadas a una isometría en bases ortonormales del espacio vectorial (de dimensión finita) son matrices ortogonales. Recordamos que una matriz A es ortogonal si $AA^t=I$.

■ Ejemplo:

Consideramos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ siguiente:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right)x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)z,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2},\ \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right)z\right)$$

Para comprobar si se trata de una isometria calculamos en primer lugar la matriz asociada a f en la base canónica (base ortonormal):

```
f[{x_, y_, z_}] :=
  {1/4 (-2 + √2) x - y/2 + 1/4 (2 + √2) z, x/2 + y/√2 + z/2, 1/4 (2 + √2) x - y/2 + 1/4 (-2 + √2) z}
B = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};

A = Transpose[Table[f[B[[i]]], {i, 3}]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right), -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right), -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right)\right\}\right\}$$

y, para verla mejor

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right) & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$$

Comprobamos a continuación si la matriz obtenida es ortogonal

```
Simplify[A.Transpose[A]]
```

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

Deducimos que f es una isometría.

2. Isometrías en el plano

En esta sección describimos los dos tipos de isometrías en el plano: los giros de ángulo θ ($\theta \in [0,2\pi)$) y las simetrías respecto de una recta r de ecuación $y=a\,x$, estudiando las matrices asociadas a las mismas en la base canónica.

■ Giro de ángulo θ

La matriz asociada a un giro T de ángulo θ en la base canónica es

$$M(T,\ B_c) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo siguiente representamos el efecto de tal isometría sobre un vector

■ Ejemplo

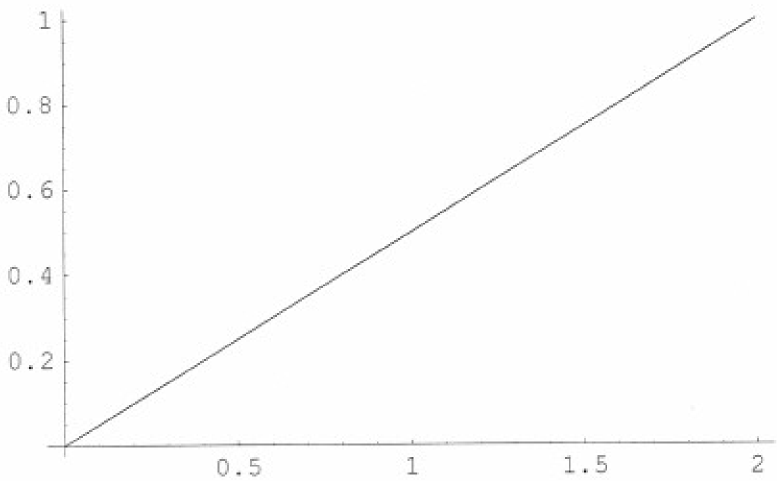
Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el giro de ángulo $\pi/6$. Representamos el efecto de dicho giro aplicado al vector de coordenadas (2,1). Para representar el vector consideramos el segmento con origen (0,0) y extremo (2,1)

```
v = {0, 0}; u = {2, 1};

du = Graphics[Line[{v, u}]]

- Graphics -

Show[du, Axes -> Automatic]
```




```
- Graphics -
```

Calculamos la imagen del vector u (imu) y representamos juntos el vector (du) y su imagen(gu)

```
G = {{Cos[Pi / 6], -Sin[Pi / 6]}, {Sin[Pi / 6], Cos[Pi / 6]}}
```

$$\left\{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$$

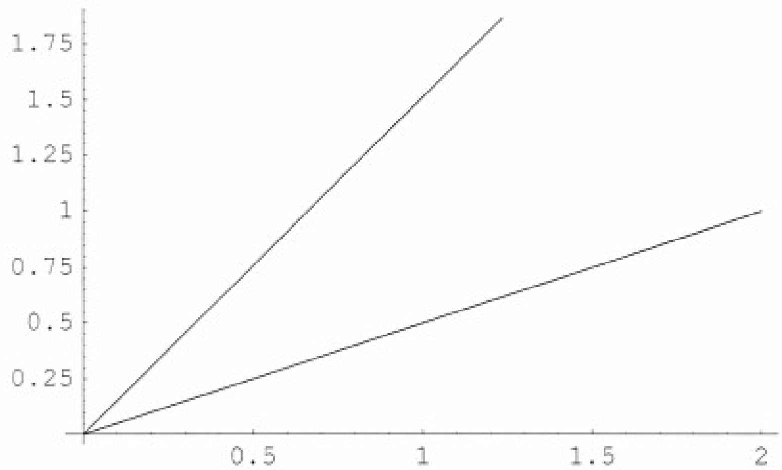
```
imu = G.u
```

$\left\{-\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

```
gu = Graphics[Line[{v, imu}]]
```

- Graphics -

```
Show[{du, gu}, Axes -> Automatic]
```



- Graphics -

Simetría respecto de una recta r

Consideremos la recta r de ecuación $y=ax$ y la simetría S_r respecto de dicha recta. Si elegimos una base $B=\{u,v\}$ donde u es un vector en la dirección de la recta y v un vector ortogonal a u es claro que $S_r(u) = u$ y $S_r(v) = -v$. La matriz M(S_r,B) asociada a S_r en la base B es entonces

$$\mathrm{M}\,(S_r,\ B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la base canónica se obtiene a continuación realizando el adecuado cambio de base:

$$\mathrm{M}\,(S_r,\ B_c) = \mathrm{C}_{BB_c}.\mathrm{M}\,(S_r,\ B).\mathrm{C}_{B_c B}.$$

Ejemplo

Consideramos la simetria de $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta de ecuación $y=1/3\ x$. Una base adecuada al problema es, por ejemplo,

```
B = {{3, 1}, {-1, 3}}
```

```
{{3, 1}, {-1, 3}}
```

La matriz, que llamamos A, asociada a la simetría en dicha base es

```
A = {{1, 0}, {0, -1}};
```

Para terminar la matriz que representa a la simetría en la base canónica, que notamos Ac se obtiene como producto de las tres matrices cam1 (matriz del cambio de base de la base B a la base canónica, A, y cam2 (matriz del cambio de base de la base canónica a la base B):

```
cam1 = Transpose[B]
```

```
{{3, -1}, {1, 3}}
```

```
cam2 = Inverse[Transpose[B]]
```

$$\left\{\left\{\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right\}, \left\{-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right\}\right\}$$

```
Ac = cam1.A.cam2
```

$$\left\{\left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}, \left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}\right\}$$

Comprobamos que se trata de una matriz ortogonal:

```
Ac.Transpose[Ac]
```

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

Representamos a continuación el efecto de dicha simetría sobre el vector u=(1,2).

```
v = {0, 0}; u = {1, 2};
```

```
du = Graphics[Line[{v, u}]]
```

```
- Graphics -
```

Calculamos la imagen del vector u (imu) y representamos juntos la recta de simetría (rec) el vector (du) y su imagen (gu)

```
imu = Ac.u
```

```
{2, -1}
```

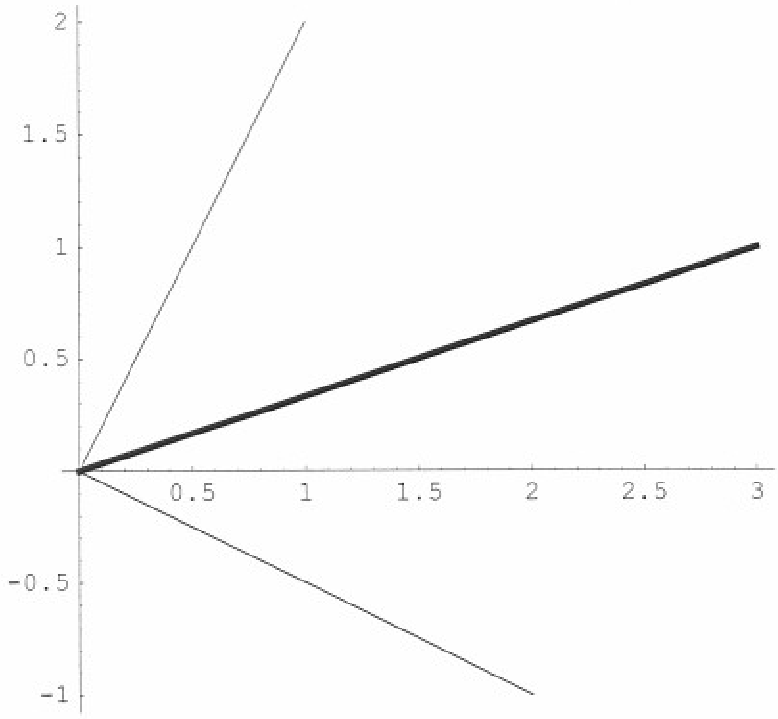
```
gu = Graphics[Line[{v, imu}]]
```

```
- Graphics -
```

```
rec = Plot[1 / 3 x, {x, 0, 3}, PlotStyle -> Thickness[0.01], DisplayFunction -> Identity]
```

```
- Graphics -
```

```
Show[{du, gu, rec}, Axes -> Automatic, AspectRatio -> Automatic]
```



- Graphics -

3. Isometrías en el espacio

En esta sección describimos los tres tipos de isometrías de $\mathbb{R}^3$, referidas a la base canónica. Para ello, haremos uso, al igual que en la simetría respecto a una recta en $\mathbb{R}^2$, del comportamiento de la composición de aplicaciones lineales en términos de sus matrices asociadas en convenientes bases.

■ Simetría respecto a un plano

Consideremos el plano π de ecuación ax+by+cz=0 y la simetría T respecto al mismo. En este caso, una base B *q*ue permite obtener de forma inmediata la matriz M(T,B) asociada a la simetría en dicha base de forma inmediata es B=$\{v_1, v_2, v_3\}$, donde v_1 es un vector perpendicular al plano y $\{v_2, v_3\}$ es una base del plano π. De esta forma,

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, un simple cambio de base proporciona la matriz de la simetría T respecto a la base canónica B_c:

$$M(T, B_c) = C_{BB_c} . M(T, B) . C_{B_c B} .$$

■ Ejemplo:

Sea T la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto al plano de ecuación 3x+y-z=0. Una base adecuada al problema será, por ejemplo,

```
B = {{3, 1, -1}, {0, 1, 1}, {1, -2, 1}}
```

```
{{3, 1, -1}, {0, 1, 1}, {1, -2, 1}}
```

Por tanto, si notamos por A a la matriz M(T,B), entonces

```
A = {{-1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

```
{{-1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Finalmente, la matriz que representa a T en la base canónica viene dada por el producto

```
Ac = Transpose[B].A.Inverse[Transpose[B]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{7}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{6}{11}\right\}, \left\{-\frac{6}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right\}, \left\{\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{9}{11}\right\}\right\}$$

Así, la imagen del vector (1,2,4/3) se calcula mediante el producto

```
Ac.{1, 2, 3 / 4}
```

$$\left\{-\frac{29}{22}, \frac{27}{22}, \frac{67}{44}\right\}$$

Dado que la base canónica es ortonormal, podemos comprobar que la matriz Ac es ortogonal:

```
Ac.Transpose[Ac]
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

■ Giro respecto a una recta

Si r es la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector (a,b,c) y $0 \le \theta < 2\pi$, entonces una base respecto a la cual la matriz asociada a l giro T de ángulo θ y eje r es $B=\{v_1, v_2, v_3\}$, donde v_1 es un vector de la recta (por ejemplo, v_1=(a,b,c)) y y $\{v_2, v_3\}$ es una base ortonormal del plano vectorial π formado por los vectores perpendiculares a r, esto es, el plano de ecuación ax+by+cz=0. Para determinar estos dos últimos vectores podemos hacer uso del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Así pues, la geometría de T da en este caso

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matriz asociada al giro T en la base canónica B_c no es más que

$$M(T, B_c) = C_{BB_c}.M(T, B).C_{B_c B}.$$

■ Ejercicio:

Determina la matriz que representa al giro en R^3 de ángulo $\theta=\frac{\pi}{3}$ respecto a la recta generada por el vector (2,0,6.25), así como la imagen de los vectores (7,9,-5) y (2,0,6.25). Comprueba además que la matriz anterior es ortogonal.

■ Composición del giro respecto a una recta con la simetría respecto al plano perpendicular a dicha recta

Dado un vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, consideramos la recta r=L({(a,b,c)}) y el plano π perpendicular a r, π: ax+by+cz=0. La simetría que describimos seguidamente es la composición $S \circ T$ del giro S respecto a la recta r de ángulo θ con la simetría T respecto al plano π. Fijando una base similar a la considerada en el caso del giro obtenemos

$$M(T, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(S, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

con lo que

$$M(S \circ T, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

Al igual que en los casos anterioires, un simple cambio de base permite obtener la matriz de la ismoetría $S\circ Ts$ respecto a la base canónica B_c:

$$M(S \circ T, B_c) = C_{BB_c}.M(S \circ T, B).C_{B_c B}.$$

■ Ejercicio:

Calcula la matriz asociada a la composición del giro de ángulo $\theta=\frac{\pi}{4}$ respecto a la recta r=>(2,-2,0.3)> con la simetría respecto al plano perpendicular a r.

Ejercicios

1. *a)* Calcula la matriz que representa la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta r de ecuación $y=5x$ en la base canónica.
   b) Calcula el simétrico del vector $v=(-2,5)$ respecto de la recta r.
   c) Calcula el subespacio de vectores fijos de la simetría anterior.

2. *a)* Calcula la matriz que representa el giro en $\mathbb{R}^2$ de ángulo $\theta=\pi/6$ en la base canónica.
   b) Calcula la imagen del vector $v=(-2,5)$ por el giro anterior.

3. Calcula la matriz que representa la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $L(\{(2,3)\})$ en la base canónica.

4. *a)* Calcula la matriz que representa la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano de ecuación $x+2y+3z=0$ en la base canónica.
   b) Calcula el simétrico del vector $v=(1,-2,3)$ respecto del plano anterior.

5. *a)* Calcula la matriz que representa el giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\theta=\pi/3$ y eje la recta generada por el vector (1,2,4) en la base canónica.
   b) Calcula la imagen del vector $v=(0,-1,1))$ por el giro anterior.

6. Calcula la matriz que representa la simetria en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $L(\{(2,1,-1),(1,1,0)\})$ en la base canónica.

7. Calcula la matriz que representa la composición del giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\theta=5\pi/4$ y eje la recta r generada por el vector (1,0,-2) con la simetría respecto del plano ortogonal a r.