PRÁCTICA 6: APLICACIONES LINEALES.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la práctica es aprovechar las posibilidades del cálculo matricial con *Mathematica* para el estudio de las aplicaciones lineales.

1. DEFINICIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

A lo largo de la práctica, consideraremos aplicaciones lineales definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita, más concretamente, los espacios $\mathbb{R}^n$. Una aplicación lineal es un tipo particular de función de varias variables, cuya imagen es un vector. Para definir una tal función con *Mathematica* podemos hacerlo de dos formas, como mostramos en los ejemplos siguientes:

■ Ejemplo 1:

```
In[1]:= f[x_, y_, z_] := {3 x + y, 2 x + z}
        f[3, 0, 4]

Out[2]= {9, 10}

In[3]:= f[{x_, y_, z_}] := {3 x + y, 2 x + z}
        v = {3, 0, 4};
        f[v]

Out[5]= {9, 10}
```

La primera definición es adecuada cuando nos interesa la dependencia de la función de varias variables independientes. Por ejemplo, el volumen de un prisma V, es función de tres variables, largo, x, ancho, y, y alto,z. Escribimos entonces V(x,y,z). Este tipo de funciones se estudian en la asignatura de Cálculo. Sin embargo, en el marco de las aplicaciones lineales es más adecuada la segunda definición de la función, en la que se pone más claramente de manifiesto que la variable es un vector.

Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales *V* y *W* queda determinada, como sabemos, por las imágenes de vectores de una base *B* de *V*, expresadas en una base *B'* de *W.*

■ Ejemplo 2:

Sea f endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que f(1,0,0)=(2,3,2); f(0,1,0)=(3,4,5);f(0,0,1)=(3,-2,-1). Podemos entonces calcular la imagen de cualquier vector v de coordenadas en la base canónica (x,y,z) como sigue:

```
In[6]:= f[{x_, y_, z_}] := x {2, 3, 2} + y {3, 4, 5} + z {3, -2, -1}
        f[{x, y, z}]

Out[7]= {2 x + 3 y + 3 z, 3 x + 4 y - 2 z, 2 x + 5 y - z}
```

2. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Como sabemos, una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales *V* y *W* de dimensiones *n* y *m* respectivamente, puede describirse, fijada una base en cada espacio, mediante una matriz de orden *mxn*. En el ejemplo siguiente mostramos una forma de obtener tal matriz. (Recordamos que la matriz asociada a la aplicación lineal *f* en bases *B* de *V* y *B'* de *W* tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base *B* en *B')*

■ Ejemplo 3:

Consideramos la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ siguiente: f(x,y,z)=(x-2y,3x+z). Podemos obtener la matriz asociada a f en las bases canónicas de ambos espacios como sigue

```
In[8]:= f[{x_, y_, z_}] := {x - 2 y, 3 x + z}
        B = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

La imagen de los vectores de la base es:

```
In[10]:= f[B[[1]]]
         f[B[[2]]]
         f[B[[3]]]

Out[10]= {1, 3}

Out[11]= {-2, 0}

Out[12]= {0, 1}
```

La matriz es entonces:

```
In[13]:= A = Transpose[Table[f[B[[i]]], {i, 3}]]

Out[13]= {{1, -2, 0}, {3, 0, 1}}
```

y, para verla mejor

```
In[14]:= MatrixForm[A]

Out[14]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como sabemos, la matriz *A* asociada a la aplicación lineal en bases fijadas *B* y *B'*, nos permite calcular la imagen de cualquier vector v de coordenadas *X* en *B* (multiplicando *A* por *X*).

■ Ejemplo 4:

Consideramos la aplicación lineal del ejemplo anterior. La imagen del vector v=(3,-2,4) puede obtenerse como sigue:

```
In[15]:= v = {3, -2, 4};
         A.v
Out[16]= {7, 13}

In[17]:= f[v]
Out[17]= {7, 13}
```

3. MATRICES ASOCIADAS A UNA APLICACIÓN LINEAL EN DIFERENTES BASES

Dada una aplicación lineal *f* de *V* en *W*, consideramos *B1* y *B1'* dos bases de *V*, y *B2* y *B2'* bases de *W*. Si llamamos A a la matriz asociada a *f* en las bases *B1* y *B2*, y A' a la matriz asociada a *f* en las bases *B1'* y *B2'* sabemos que la relación entre ambas matrices viene dada por la igualdad A'=QAP, donde P es la matriz del cambio de base (en *V)* de la base *B1'* a la base *B1* y Q es la matriz delcambio de base (en *W*) de la base *B2* a la base *B2'.*

■ Ejemplo 5:

Consideramos una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como matriz asociada en las bases canónicas de ambos espacios la matriz A={{2,0},{-1,5},{3,2}}. Queremos obtener la matriz A' asociada a f en las bases {(1,1),(1,-1)} de $\mathbb{R}^2$ y {(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)} de $\mathbb{R}^3$.

```
In[18]:= A = {{2, 0}, {-1, 5}, {3, 2}};
         B1 = {{1, 0}, {0, 1}};
         B1p = {{1, 1}, {1, -1}};
         B2 = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
         B2p = {{1, 1, 0}, {1, 0, 1}, {0, 1, 1}};
```

La matriz P del cambio de base de la base B1p a B1 es

```
In[23]:= P = Transpose[B1p]
Out[23]= {{1, 1}, {1, -1}}

In[24]:= MatrixForm[P]
Out[24]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que efectivamente esta matríz transforma coordenadas en B1p en coordendas en B1

```
In[32]:= P.{1, 0}
         P.{0, 1}
Out[32]= {1, 1}
Out[33]= {1, -1}
```

La matriz Q del cambio de base de la base B2 a B2p es

In[25]:=
```
Q = Inverse[Transpose[B2p]]
MatrixForm[Q]
```

Out[25]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$

Out[26]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que efectivamente esta matríz transforma coordenadas en B2 en coordendas en B2p

In[37]:=
```
Q.{1, 1, 0}
Q.{1, 0, 1}
Q.{0, 1, 1}
```

Out[37]= {1, 0, 0}

Out[38]= {0, 1, 0}

Out[39]= {0, 0, 1}

Así, la matriz Ap buscada es:

In[40]:=
```
Ap = Q.A.P
MatrixForm[Ap]
```

Out[40]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right\}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right\}, \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}\right\}$

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Realicemos a continuación algunas comprobaciones (se recomienda probar también con otros vectores v en la base canónica y ver que efectivamente $\overline{w}$=Ap.$\overline{v}$=Ap.$P^{-1}.v$, ya que $v = P.\overline{v}$)

In[70]:=
```
v = {1, 0};
w = A.v
```

Out[71]= {2, -1, 3}

In[72]:=
```
w̄ = Q.w
```

Out[72]= {-1, 3, 0}

In[73]:=
```
v̄ = Inverse[P].v
```

Out[73]= $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

In[74]:=
```
Ap.v̄
Ap.v̄ == w̄
```

Out[74]= {-1, 3, 0}

Out[75]= True

4. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

La matriz *A* asociada a una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión *n* y *m* respectivamente nos permite también conocer la dimensión del subespacio imagen de la aplicación (*dim(Im(f))=rango(-A)<=m*), asi como una base del dicho subespacio, la dimensión del núcleo *(dim(N(f))=n-rango(A)).*

■ Ejemplo 6:

Consideramos una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ que tiene como matriz asociada en las bases canónicas la matriz A siguiente

In[76]:=
```
A = {{2, -1, 3}, {-2, 0, 1}, {0, -1, 1}, {2, 3, -1}};
MatrixForm[A]
```

Out[77]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

In[78]:=
```
Ared = RowReduce[Transpose[A]]
MatrixForm[Ared]
```

Out[78]= `{{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, -4}}`

Out[79]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 3, por tanto la dimensión de la imagen es 3 y la dimensión del núcleo 0. Una base de la imagen es la determinada por las tres filas de la matriz reducida.

Para calcular el núcleo hallamos los vectores de coordenadas X cuya imagen obtenida como *A.X* es el vector 0. Para ello resolvemos el sistema *AX=0* con la sentencia **Solve** como sigue (obteniendo las ecuaciones paramétricas del núcleo):

■ Ejemplo anterior

In[80]:=
```
w = {x, y, z};
Solve[A.w == {0, 0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

Out[81]= `{{x → 0, y → 0, z → 0}}`

¿Es posible utilizar la sentencia **LinearSolve**? ¿por qué?

In[83]:=
```
LinearSolve[A, {0, 0, 0, 0}]
```

Out[83]= `{0, 0, 0}`

Mathematica tiene implementada una sentencia **NullSpace** que proporciona una base del núcleo de una aplicación lineal, a partir de la matriz, como muestra el ejemplo siguiente.

In[85]:= `NullSpace[A]`

Out[85]= `{}`

■ Ejemplo 7:

Consideramos la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por la matriz A siguiente en la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

In[86]:= `A = {{2, -1, 5}, {-2, 1, 0}, {-2, 1, 10}}`

Out[86]= `{{2, -1, 5}, {-2, 1, 0}, {-2, 1, 10}}`

In[87]:= `NullSpace[A]`

Out[87]= `{{1, 2, 0}}`

Con **Solve,** como hemos visto antes, obtenemos las ecuaciones paramétricas del núcleo:

In[89]:= `Solve[A.{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]`

```
Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

Out[89]= $\left\{\left\{x \to \frac{y}{2},\ z \to 0\right\}\right\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

---

1. Se considera la aplicación lineal *f* de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por *f(x,y,z)=(x+y,y+z)* . Halla la matriz asociada a *f* respecto de las bases *B={(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)}* y *B'={(1,2),(0,1)}.* Calcula una base del núcleo y de la imagen.

In[117]:= `f[{x_, y_, z_}] := {x + y, y + z}`

In[91]:=
```
B1 = IdentityMatrix[3];
B1p = {{1, 1, 1}, {0, 1, -1}, {1, 0, 0}};
B2 = IdentityMatrix[2];
B2p = {{1, 2}, {0, 1}};
```

In[107]:=
```
A = f[B1];
A // MatrixForm
```

Out[108]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[95]:= `P = Transpose[B1p]`

Out[95]= `{{1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 0}}`

In[96]:= `MatrixForm[P]`

Out[96]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que efectivamente esta matríz transforma coordenadas en B1p en coordendas en B1

```
In[97]:= P.{1, 0, 0}
         P.{0, 1, 0}
         P.{0, 0, 1}

Out[97]= {1, 1, 1}

Out[98]= {0, 1, -1}

Out[99]= {1, 0, 0}
```

La matriz Q del cambio de base de la base B2 a B2p es

```
In[100]:= Q = Inverse[Transpose[B2p]]
          MatrixForm[Q]

Out[100]= {{1, 0}, {-2, 1}}
```

Out[101]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que efectivamente esta matríz transforma coordenadas en B2 en coordendas en B2p

```
In[102]:= Q.{1, 2}
          Q.{0, 1}

Out[102]= {1, 0}

Out[103]= {0, 1}
```

Así, la matriz Ap buscada es:

```
In[109]:= Ap = Q.A.P
          MatrixForm[Ap]

Out[109]= {{-1, -2, 1}, {6, 3, 1}}
```

Out[110]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realicemos a continuación algunas comprobaciones (se recomienda probar también con otros vectores v en la base canónica y ver que efectivamente $\overline{w}$=Ap.$\overline{v}$=Ap.$P^{-1}.v$, ya que $v = P.\overline{v}$)

```
In[111]:= v = {1, 0, 0};
          w = A.v

Out[112]= {1, 3}

In[113]:= w̄ = Q.w

Out[113]= {1, 1}

In[114]:= v̄ = Inverse[P].v

Out[114]= {0, 0, 1}

In[115]:= Ap.v̄
          Ap.v̄ == w̄

Out[115]= {1, 1}

Out[116]= True
```

2. La aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ viene determinada por las relaciones siguientes: *f(2,-1)=(1,0,-1,3)* y *f(4,1)=(2,-2,3,1).* Halla la matriz asociada a f en las bases canónicas.

```
In[118]:= B1 = IdentityMatrix[2];
          B1p = {{2, -1}, {4, 1}};
          B2 = IdentityMatrix[4];
          B2p = B2;

In[122]:= P = Transpose[B1p]; P // MatrixForm
```

Out[122]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[124]:= Ap = Transpose[{{1, 0, -1, 3}, {2, -2, 3, 1}}]; Ap // MatrixForm
```

Out[124]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[129]:= Q = Inverse[Transpose[B2p]];
          A = Inverse[Q].Ap.Inverse[P]; A // MatrixForm
```

Out[130]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

```
In[133]:= (* comprobaciones *)
          A.{2, -1}
          A.{4, 1}

Out[133]= {1, 0, -1, 3}

Out[134]= {2, -2, 3, 1}
```

3. Se considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, dada por *f(1,0,0)=(-1,6,2), f(0,1,0)=(2,1,-1), f(0,0,1)=(0,13/2,3/2).*

a) Calcula la dimensión y una base de los subespacios núcleo e imagen, trabajando con fracciones.

b) Determina la matriz asociada a la aplicación en la base B={(1,0,2),(2,1,0),(0,2,1)}.

```
In[1]:= A = Transpose[{{-1, 6, 2}, {2, 1, -1}, {0, 13/2, 3/2}}]; A // MatrixForm
```

Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & \frac{13}{2} \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

```
In[2]:= Ared = RowReduce[Transpose[A]]; Ared // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{13} \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= NullSpace[A]
```

Out[3]= $\left\{\left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$

```
In[4]:= B = {{1, 0, 2}, {2, 1, 0}, {0, 2, 1}};

In[5]:= P = Transpose[B]; P // MatrixForm
        Q = Inverse[P];   Q // MatrixForm
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= Ap = Q.A.P;
        Ap // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{19}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{9} & \frac{7}{9} & \frac{17}{6} \\ \frac{83}{9} & \frac{55}{9} & \frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

```
In[38]:= (*comprobaciones*)
         P.IdentityMatrix[3] == Transpose[B]
         P.Ap.{1, 0, 0} == A.B[[1]]
         P.Ap.{0, 1, 0} == A.B[[2]]
         P.Ap.{0, 0, 1} == A.B[[3]]

Out[38]= True

Out[39]= True

Out[40]= True

Out[41]= True
```

4. Se considera el endomorfismo *f* de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$, que respecto de la base canónica tiene como matriz asociada

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Halla una base del núcleo de *f.*

b) Halla una base de la imagen de *f*.

c) ¿Es un isomorfismo?

d) Determina si el vector (-3,3,-2,-1) pertenece al subespacio imagen de *f*.

In[9]:= $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix};$

```
In[10]:= Det[A]
Out[10]= 2

In[11]:= NullSpace[A]
Out[11]= {}

In[12]:= RowReduce[Transpose[A]]
Out[12]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

Vemos pues que efectivamente se trata de un isomorfismo y por lo tanto cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ estará en el subespacio imagen de f.