Inicio

Bibliografía

ω-primalidad
Trabajo previo
Cálculo de la ω-primalidad
Algoritmo

ω-primalidad asintótica
Trabajo previo
Generados por 2 elementos
Arquimedianos
Interpretación

ω-primalidad y ω-primalidad asintótica

Algoritmos e interpretación

J. I. García García
M. A. Moreno Frías
A. Vigneron Tenorio

Universidad de Cádiz

14 de julio de 2013

1. ω-primalidad: Método general de cálculo
2. ω-primalidad asintótica: Algoritmo para monoides cancelativos arquimedianos

Definidos para monoides atómicos
S es un monoide atómico finitamente generado

Bibliografía

D.F. Anderson and S. T. Chapman,
How far is an element from being prime,
J. Algebra Appl. 9 (2010), no. 5, 779–789.

D.F. Anderson, S.T. Chapman, N. Kaplan, and D. Torkornoo,
An Algorithm to compute ω-primality in a numerical monoid,
Semigroup Forum 82 (2011), no. 1, 96–108.

V. Blanco, P. A. García-Sánchez and A. Geroldinger,
Semigroup-theoretical characterizations of arithmetical invariants with applications to numerical monoids and Krull monoids,
arXiv:1006.4222v1

P.A. García Sánchez, I. Ojeda and A. Sánchez-R-Navarro,
Factorization invariants in half-Factorial Affine Semigroups,
J. Algebra Comput. 23 (2013), 111–122.

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, and J. I. García-García,
Irreducible Ideals of Finitely Generated Commutative Monoids,
J. Algebra **238** (2001) 328–344.

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, and J. I. García-García,
Atomic Commutative Monoids and Their Elasticity,
Semigroup Forum Vol. 68 (2004) 64–86.

J. C. Rosales and J. I. García-García,
Hereditary archimedean commutative semigroups
Intern. Math. Journal **5** (2002) 467–472.

Definición

Definición

(extraido de [2]) Let S be an atomic monoid with set of units $S^\times$ and set of irreducibles $\mathcal{A}(S)$. For $s \in S \setminus S^\times$, we define $\omega(x) = n$ if n is the smallest positive integer with the property that whenever $x|a_1 + \cdots + a_t$, where each $a_i \in \mathcal{A}(S)$, there is a $T \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$ with $|T| \leq n$ such that $x|\sum_{k\in T} a_k$. If no such n exists, then $\omega(s) = \infty$. For $x \in S^\times$, we define $\omega(x) = 0$.

$x|a \Leftrightarrow \exists b \text{ tal que } x + b = a$

Si $\omega(x) = 3$ y $x|(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \Rightarrow$
$\exists i_1, i_2, i_3 \subset \{1, \ldots, 5\}$ tal que $x|(a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3})$

Inicio

Bibliografía

ω-primalidad

Trabajo previo

Cálculo de la ω-primalidad

Algoritmo

ω-primalidad asintótica

Trabajo previo

Generados por 2 elementos

Arquimedianos

Interpretación

Trabajo previo

- AN ALGORITHM TO COMPUTE ω-PRIMALITY IN A NUMERICAL MONOID
- SEMIGROUP-THEORETICAL CHARACTERIZATIONS OF ARITHMETICAL INVARIANTS WITH APPLICATIONS TO NUMERICAL MONOIDS AND KRULL MONOIDS
- FACTORIZATION INVARIANTS IN HALF-FACTORIAL AFFINE SEMIGROUPS

La siguiente proposición se prueba en [3, Proposition 3.3]. En [2, Proposition 2.2] una proposición similar nos da una versión para semigrupos numéricos

Proposición

Sea $S = \mathbb{N}^p/\sigma$ un monoide finitamente generado y $a \in S$. Tenemos que la siguiente igualdad

$$\omega(a) = \max\{\| \delta \| : \delta \in \operatorname{Minimals}_{\leq} \mathrm{E}(a + S)\}$$

- $a + S = \{a + x | x \in S\} \subseteq S$
- $E(A) = \varphi^{-1}(A) \subset \mathbb{N}^p$, donde $\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^p/\sigma$
- $\| \delta \| = \sum_{i=1}^{p} \delta_i$

Cálculo de los minimales

En el conjunto $a + S$ están todos los múltiplos de a, su cardinalidad puede no ser finita y hemos de calcular sus minimales
Tenemos que

$$\omega(a) = \max\{\| \delta \|: \delta \in \mathrm{Minimals}_{\leq} \mathrm{E}(a + S)\} = \max\{\| \delta \|: \delta \in \mathrm{Minimals}_{\leq} \mathrm{E}_a(\{\tilde{a}\})\}$$

donde $\mathrm{E}_a = \tilde{\varphi}^{-1}$, con $\tilde{\varphi} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^p/\sigma_a$ y σ_a la congruencia de Rees asociada al ideal $a + S$

Buscamos los generadores del ideal $\mathrm{E}(a + S)$ que coinciden con los generadores de $\mathrm{E}_a(\{\tilde{a}\})$

Algoritmo

Tenemos $\sigma = \langle \rho \rangle$, $a + S$, $a = [\gamma]_\sigma$
Calculamos κ un sistema canónico de generadores de σ_a a partir de $\rho_a = \rho \cup \{(\gamma, \gamma + e_i) | i = 1, \ldots, p\}$ con respecto a un orden $\preceq$

Algoritmo

Input: γ, κ *Output:* $\omega(a)$.

(Step 1) *Use [5, Algorithm 16] to compute the set* $\Delta = \mathrm{Minimals}_{\leq} \mathrm{E}_a(\{[\gamma]_{\sigma_a}\})$.

(Step 2) *Set* $\Psi = \{\| \mu \| : \mu \in \Delta\}$.

(Step 3) *Return* máx Ψ.

Algoritmo válido para monoides cancelativos y no cancelativos

Ejemplo

El siguiente semigrupo aparace en [5, Example 25], es atómico pero no es cancelativo

Sea σ la congruencia generada por $\{((5,0,0,0),(0,7,0,0)),((0,0,6,0),(0,0,1,0))\}$, S el monoide $\mathbb{N}^4/\sigma$ y $a = [(3,3,6,5)]_\sigma$
El conjunto $\mathrm{Minimals}_{\leq}\, \mathrm{E}_a(\{\tilde{a}\}) = \mathrm{Minimals}_{\leq}\, \mathrm{E}(a+S)$ es igual a $\{(8,0,1,5),(0,10,1,5),(3,3,1,5)\}$
Tenemos así que
$\omega(a) = \text{máx}\{\| (8,0,1,5) \|, \| (0,10,1,5) \|, \| (3,3,1,5) \|\} = 16$.

Definición

Dado S un monoide atómico y $x \in S$, definimos $\overline{\omega}(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\omega(nx)}{n}$ la ω-primalidad asintótica de x
La ω-primalidad asintotica de S se define como $\overline{\omega}(S) = \{\overline{\omega}(x) | x \text{ is irreducible}\}$ (ver [1]).

Inicio

Bibliografía

ω-primalidad
Trabajo previo
Cálculo de la ω-primalidad
Algoritmo

ω-primalidad asintótica
Trabajo previo
Generados por 2 elementos
Arquimedianos
Interpretación

Trabajo previo

- AN ALGORITHM TO COMPUTE ω-PRIMALITY IN A NUMERICAL MONOID

Realizado para semigrupos numéricos generados por dos elementos

Generados por dos elementos

Monoides de la forma $S = \mathbb{N}^2/\sigma$ con $\sigma = \langle \rho \rangle$,
$\rho = \{((\alpha, 0), (0, \beta))\}$ y $\alpha, \beta > 1$

$\Updownarrow$

S es cancelativo, reducido y minimamente generados por dos elementos (es atómico)

Resultados

Lema

Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2$, *entonces*

$$\mathrm{E}([\gamma]_\sigma + S) = (\{\gamma + \lambda(\alpha, -\beta) | \lambda \in \mathbb{Z}\} + \mathbb{N}^2) \cap \mathbb{N}^2$$

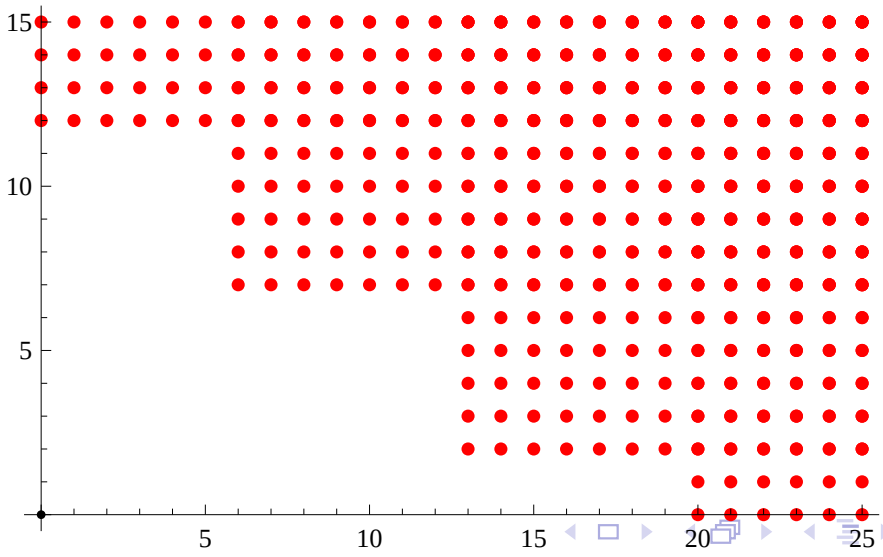
Obtenemos que

$$\text{máx}\{\| x \| : x \in \mathrm{E}([\gamma]_\sigma)\} \leq \omega([\gamma]_\sigma) < \text{máx}\{\| x \| : x \in \mathrm{E}([\gamma]_\sigma)\} + \text{máx}\{\alpha, \beta\}$$

Esto nos permite acotar ω (después dividimos por n):

$$n\gamma_1 + \lfloor \frac{n\gamma_2}{\beta} \rfloor \alpha + n\gamma_2 - \lfloor \frac{n\gamma_2}{\beta} \rfloor \beta \leq \omega(n[\gamma]_\sigma)$$

$$< n\gamma_1 + \lfloor \frac{n\gamma_2}{\beta} \rfloor \alpha + n\gamma_2 - \lfloor \frac{n\gamma_2}{\beta} \rfloor \beta + \alpha$$



Resultados

Proposición

$S = \mathbb{N}^2/\sigma$, $\rho = \{((\alpha, 0), (0, \beta))\}$ *con* $\alpha, \beta > 1$ *y* $\sigma = \langle \rho \rangle$.

- $\alpha \geq \beta \Rightarrow \overline{\omega}([\gamma_1, \gamma_2]_\sigma) = \gamma_1 + \frac{\alpha}{\beta}\gamma_2 = \frac{\beta\gamma_1 + \alpha\gamma_2}{\beta}$
- $\alpha < \beta \Rightarrow \overline{\omega}([\gamma_1, \gamma_2]_\sigma) = \frac{\beta}{\alpha}\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\beta\gamma_1 + \alpha\gamma_2}{\alpha}$

Corolario

$S = \mathbb{N}^2/\sigma$, $\rho = \{((\alpha, 0), (0, \beta))\}$ *con* $\alpha, \beta > 1$ *y* $\sigma = \langle \rho \rangle$.

Entonces:

- $\alpha \geq \beta \Rightarrow \overline{\omega}([e_1]_\sigma) = 1$ *y* $\overline{\omega}(S) = \overline{\omega}([e_2]_\sigma) = \frac{\alpha}{\beta}$.
- $\alpha < \beta \Rightarrow \overline{\omega}([e_2]_\sigma) = 1$ *y* $\overline{\omega}(S) = \overline{\omega}([e_1]_\sigma) = \frac{\beta}{\alpha}$.

Interpretación

Tomemos $\alpha \geq \beta$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

$\overline{\omega}([\gamma]_\sigma) = \gamma_1 + \frac{\alpha}{\beta}\gamma_2$

Tenemos $\alpha[e_1]_\sigma = \beta[e_2]_\sigma \rightsquigarrow \frac{[e_2]_\sigma}{[e_1]_\sigma} = \frac{\alpha}{\beta}$

Así que
$\beta[\gamma]_\sigma = \beta\gamma_1[e_1]_\sigma + \beta\gamma_2[e_2]_\sigma = \gamma_1\beta[e_1]_\sigma + \gamma_2\alpha[e_1]_\sigma = (\gamma_1\beta + \gamma_2\alpha)[e_1]_\sigma$

Abusando de la notación podemos escribir:
$\overline{\omega}([\gamma]_\sigma) = \frac{[\gamma]_\sigma}{[e_1]_\sigma} = \frac{\gamma_1[e_1]_\sigma + \gamma_2[e_2]_\sigma}{[e_1]_\sigma} = \gamma_1 + \gamma_2\frac{[e_2]_\sigma}{[e_1]_\sigma} = \gamma_1 + \gamma_2\frac{\alpha}{\beta}$.

Arquimedianos

Monoides finitamente generados, cancelativos, reducidos y arquimedianos (son atómicos)

Verifican que:
$\forall x, y \in S \setminus \{0\}$, existen $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $px = qy$ (ver [7, Theorem 2.1])

$\forall i = 2, \ldots, p$, $\exists a_i, b_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $a_i[e_1]_\sigma = b_i[e_i]_\sigma$.
Así,

$$a_2 \cdots a_p[e_1]_\sigma = b_2 a_3 \cdots a_p[e_2]_\sigma = \ldots = a_2 \cdots a_{p-1} b_p[e_p]_\sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\exists k_1, \ldots, k_p \text{ tales que } k_1[e_1]_\sigma = \ldots = k_p[e_p]_\sigma$$

$$\mathrm{E}([\gamma]_\sigma) \subseteq H_\gamma \text{ con } H_\gamma \text{ definido por } \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} x_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} \gamma_i$$

Resultados

Lema

$S = \mathbb{N}^p/\sigma = \langle s_1, \ldots, s_p \rangle$, $k_1 \geq \cdots \geq k_p \in \mathbb{N}$ tales que $k_1 s_1 = \ldots = k_p s_p$ y $\gamma \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$.
Todo elemento $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$ verificando

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} x_i \geq (p-1)\Pi_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} \gamma_i$$

pertenece a $\mathrm{E}([\gamma]_\sigma + S)$

De lo anterior obtenemos que los minimales de $\mathrm{E}([\gamma]_\sigma + S)$ están entre los hiperplanos

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} x_i = (p-1)\Pi_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} \gamma_i$$

y

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} x_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} \gamma_i$$

Resultados

$$\| n \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\gamma_i}{k_i} \right) k_1 e_1 + \sum_{i=2}^{p} \mu_{in}(k_1 e_1 - k_i e_i) \| \leq \omega(n[\gamma]_\sigma) \leq \left((p-1)\Pi_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_1 \cdots k_p}{k_i} n\gamma_i \right) / \Pi_{i=2}^{p} k_i$$

con $\sum_{i=2}^{p} \mu_{in} \leq p-1$
Dividiendo y tomando límites obtenemos $\overline{\omega}([\gamma]_\sigma)$

Teorema

Sea $S = \langle s_1, \ldots, s_p \rangle$ un monoide cancelativo reducido arquimediano. Existe una reordenación $\{t_1, \ldots, t_p\}$ del conjunto $\{1, \ldots, p\}$ tal que $\overline{\omega}(a) = \gamma_{t_1} + \sum_{i=2}^{p} \frac{k_{t_1}}{k_{t_i}} \gamma_{t_i}$ para todo $a = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i s_i \in S \setminus \{0\}$.

Si $k_1 \geq k_2 \geq \cdots k_p$, entonces $\{t_1, \ldots, t_p\} = \{1, \ldots, p\}$

Interpretación

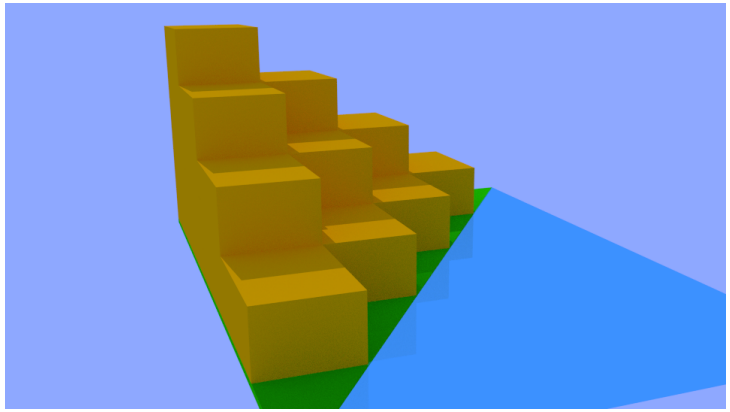
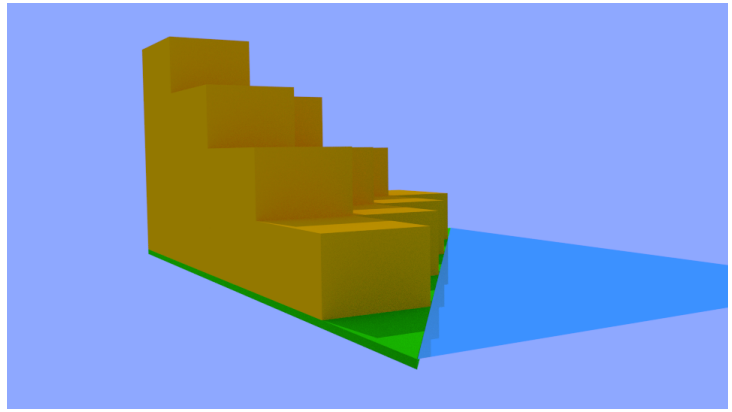
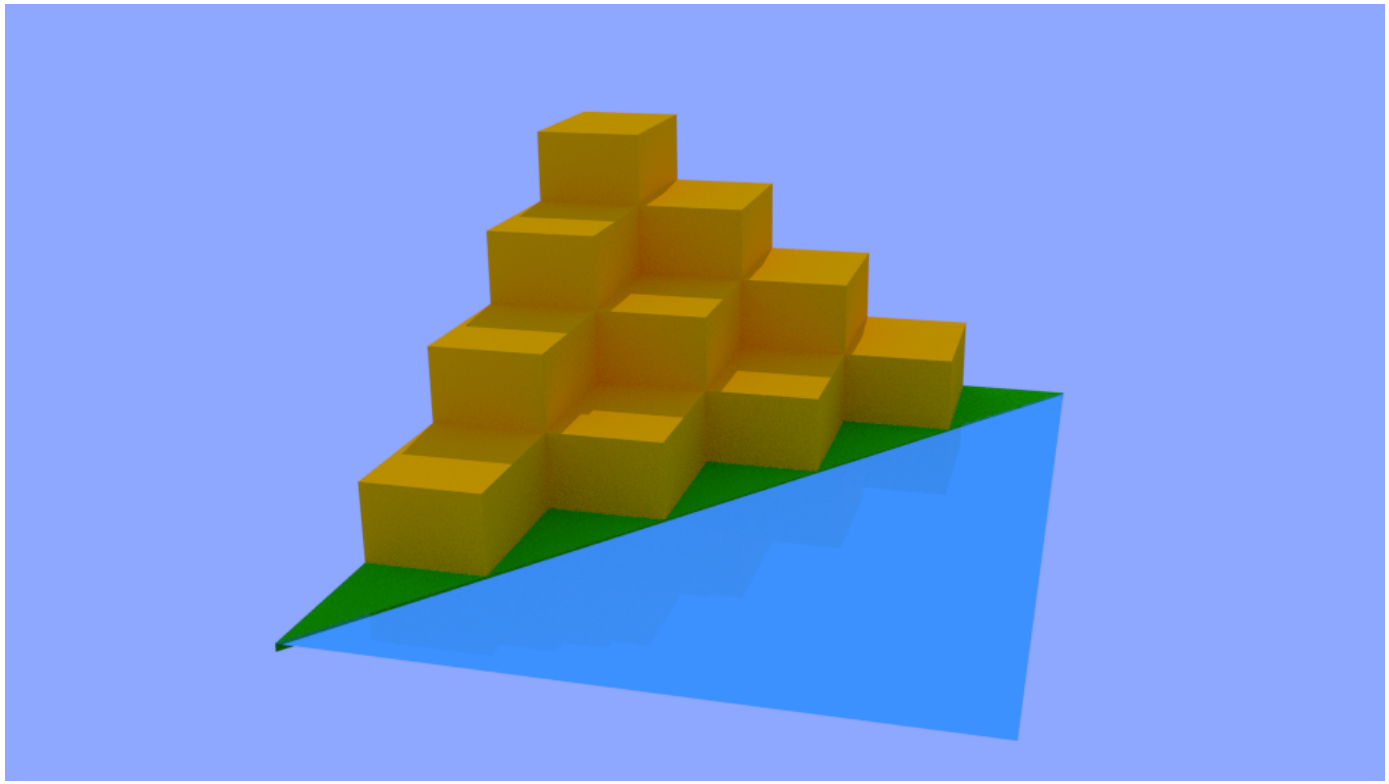
$k_1 \geq \cdots \geq k_p \in \mathbb{N}$ tales que $k_1[e_1]_\sigma = \ldots = k_p[e_p]_\sigma$
Para $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} k_2 \cdots k_p[\gamma]_\sigma = \\ (k_2 \cdots k_p)(\gamma_1[e_1]_\sigma + \cdots + \gamma_p[e_p]_\sigma) = \\ k_2 \cdots k_p\gamma_1[e_1]_\sigma + \cdots + k_2 \cdots k_p\gamma_p[e_p]_\sigma = \\ k_2 \cdots k_p\gamma_1[e_1]_\sigma + k_1k_3 \cdots k_p\gamma_2[e_1]_\sigma + \cdots + \\ k_2 \cdots k_{p-1}k_1\gamma_p[e_1]_\sigma = \\ \sum_{i=1}^{p}(\Pi_{j\neq i}^{p} k_i)\gamma_i[e_1]_\sigma \end{aligned}$$

y así
$\overline{\omega}([\gamma]_\sigma) = \gamma_1 + \sum_{i=2}^{p} \frac{k_1}{k_i}\gamma_i = \sum_{i=1}^{p}(\Pi_{j\neq i}^{p} k_i)\gamma_i / k_2 \cdots k_p = \frac{[\gamma]_\sigma}{[e_1]_\sigma}$

Inicio

Bibliografía

ω-primalidad
Trabajo previo
Cálculo de la ω-primalidad
Algoritmo

ω-primalidad asintótica
Trabajo previo
Generados por 2 elementos
Arquimedianos
Interpretación