Sesión de problemas de Matemáticas

17 de abril de 2009

P1. *Tenemos cien números en progresión aritmética de los cuales sabemos que su suma es -1 y que la suma de los términos pares es 1. Calcular la suma de los cuadrados de los cien números.*

P2. *Encontrar todos los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^n - 1$ es divisible por 7 y todos los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^n + 1$ es divisible por 7.*

P3. *Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Demostrar que*

$$\frac{-1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1$$

¿Para qué valores de a, b, c se dan las igualdades en estas desigualdades?

P4. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que ad es impar y bc es par. Demostrar que el polinomio*

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tiene almenos una de sus raíces irracional.

P5. *Sabemos que el polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Hallar los posibles valores de k.*

P6. *Consideremos un tablero 6×6 que se ha rellenado con fichas de dominó de tamaño 2×1.*

a) *Demostrar que cualquier eje vertical u horizontal de la cuadrícula atraviesa a un número par de fichas.*

b) *Demostrar que al menos uno de esos ejes no atraviesa a ninguna ficha.*

P7. *Escogemos $n + 1$ números distintos desde el 1 al $2n$.*

a) *Demostrar que siempre hay dos que son primos entre sí.*

b) *Demostrar que siempre hay uno que es divisible por otro.*

¿Son ciertas las afirmaciones anteriores si sólo tomamos n números?

P8. *Determinar todos los números naturales de cuatro cifras que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.*

P9. *¿Pueden separarse los números del* 1 *al* 100 *en doce subconjuntos de forma que cada uno de ellos esté formado por términos de una misma sucesión geométrica?*

Indicación: *¿Qué ocurre con los números primos?*

P10 (Desigualdad de Nesbit). *Dados* $a, b, c > 0$*, demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Estudiar en qué casos esta desigualdad se convierte en una igualdad.

P11. *Encontrar todas las funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que verifiquen*

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$*.*

P12. *Encontrar el número más pequeño que tenga* 216 *divisores, su doble tenga* 270 *divisores, su tercera parte tenga* 180 *divisores y su quinta parte tenga* 144 *divisores.*

P13. *Encontrar todos los polinomios* $P(x)$ *con coeficientes reales que verifican la igualdad*

$$P(P(x)) = P(x)^{2007}$$

P14. *Hallar todos los números naturales* m *y* n *que cumplan*

$$n! + 1 = (m! - 1)^2$$

P15. *Consideremos el siguiente tablero*

-1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1

Se permite cambiar de signo cualquier fila, columna o diagonal principal tantas veces como se quiera. ¿puede conseguirse que todos los elementos acaben siendo positivos?