Sesión de Problemas de Matemáticas
Granada, 13 de Diciembre de 2008

P1. *Supongamos que la ecuación* $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = 1996$*, donde* a, b, c, d, e *son números enteros distintos, tiene una solución entera* r*. Demostrar que*

$$5r = a + b + c + d + e + 499$$

P2. *Sea* $ABCD$ *un cuadrado y* P *un punto interior al cuadrado de forma que los ángulos* $\angle PAB$ *y* $\angle PBA$ *sean de 15º. Calcular los ángulos del triángulo* DPC*.*

P3. *Hallar la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. El número así obtenido se conoce como número áureo.*

P4. *Demostrar las siguientes afirmaciones:*

i) *Si* a *y* b *son números impares, entonces* $a^2 + b^2$ *no es un cuadrado perfecto.*

ii) *Para cualquier número natural* a*, el número* $a^3 - a$ *es divisible por* 6*.*

iii) *Si* a, b, c *son números naturales y* $a+b+c$ *es múltiplo de* 6*, entonces* $a^3+b^3+c^3$ *es múltiplo de 6.*

P5. *Calcular el número de ceros en que termina el número*

$$1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

P6. *Hallar todas las sucesiones no decrecientes* $a_1, a_2 \ldots, a_n$ *de enteros positivos que sean solución del siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 26 \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 62 \\ a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 164 \end{cases}$$

P7. *Sabiendo que el número máximo de pelos por* mm^2 *de piel de una persona es* 5*, ¿existen en España dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?*

P8. *La expresión decimal del número* $\frac{1}{97}$ *tiene un período muy largo. Hallar sus tres últimas cifras.*

P9. *Encontrar el número más pequeño que tenga 216 divisores, su doble tenga 270 divisores, su tercera parte tenga 180 divisores y su quinta parte tenga 144 divisores.*

P10. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, definimos* a_n *como el último dígito de la expresión decimal del número* $1 + 2 + \ldots + n$*. Calcular* a_{2007}*.*

P11. *Demostrar que no existe ninguna función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que para cualesquiera números reales* x *e* y *verifique*

$$f(x^2 + y) = f(x) + y^2$$

P12. *Demostrar que cualquier polígono convexo de área 1 está se puede meter dentro de un rectángulo de área menor o igual que 2.*

P13. *Dado un número natural* n*, calcular el valor de la siguiente suma*

$$7 + 77 + 777 + \ldots + 77 \overset{(n)}{\cdots} 7$$

P14. *Hallar el mayor número de seis cifras no nulas que cumpla que al quitarle la cifra de la izquierda se obtenga un divisor suyo.*

P15. *En un recipiente cúbico de un metro de arista se vierten 30 litros de agua. Si colocamos un ortoedro macizo dentro del cubo, el agua sube 1 cm, 2 cm y 3 cm dependiendo de qué cara se apoye sobre el fondo del recipiente. Hallar las dimensiones de dicho ortoedro.*

P16. *Se forman tres números de dos cifras cada uno usando los dígitos del* 1 *al* 6 *sin repetirlos y a continuación se suman estos tres números. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse mediante este procedimiento?*

P17. *Consideremos la siguiente sucesión de números*

$$16, 1156, 111556, 11115556, \ldots$$

donde cada número se obtiene a partir del anterior insertando 15 entre las cifras centrales. Demostrar que todos son cuadrados perfectos.

P18. *En un rectángulo, se unen los puntos medios de cada lado con los vértices del lado opuesto. Hallar el área del octógono que se forma dentro del rectángulo en función de las dimensiones de éste.*

P19. *Sean* a*,* b*,* c *números reales distintos y distintos de cero. Si los polinomios* $x^2 + ax + bc$ *y* $x^2 + bx + ac$ *tienen una raíz común, entonces probar que las otras dos raíces (una de cada uno) son las raíces del polinomio* $x^2 + cx + ab$*.*

P20. *A un tablero de ajedrez se le quitan dos casillas que estén en esquinas opuestas. ¿Es posible rellenar las* 62 *casillas restantes con fichas de tamaño* 2×1*?*

José Miguel Manzano
Universidad de Granada
email: jmmanzano@ugr.es