Problemas de Polinomios

P1. *Sean* x, y, z *números reales tales que*

$$x + y + z = 2, \quad xy + yz + xz = -1, \quad xyz = -2$$

Hallar el valor de las siguientes expresiones:

a) $x^2 + y^2 + z^2$ *b)* $x^3 + y^3 + z^3$ *c)* $x^4 + y^4 + z^4$

P2. *Calcular* $a, b \in \mathbb{R}$ *para que* $ax^4 + bx^3 + 1$ *sea divisible por* $x^2 + 2x + 1$.

P3. *Hallar* $a, b \in \mathbb{R}$ *para que* $p(x) = x^5 + ax^3 + b$ *tenga una raíz real múltiple.*

P4. *Sabemos que una de las raíces del polinomio de coeficientes reales* $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *es la suma de las otras dos. Demostrar que* $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

P5. *¿Existe algún polinomio* $p(x)$ *que cumpla que* $x\,p(x-1) = (x+1)p(x)$ *para cualquier valor de* $x \in \mathbb{R}$*?*

P6. *Dado* $s \in \mathbb{R}$, *consideremos el polinomio* $p(x) = 3x^2 + 3sx + s^2 - 1$ *y supongamos que* α *y* β *son sus raíces. Probar que* $p(\alpha^3) = p(\beta^3)$.

P7. *Consideremos el polinomio* $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *de coeficientes reales y supongamos que el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos. Probar que* $a^3c = b^3$.

P8. *Si sabemos que la ecuación* $x^3 + 2\lambda x^2 - \lambda x + 10 = 0$ *tiene tres soluciones reales que están en progresión aritmética (*λ *es un parámetro y* x *es la incógnita), hallar estas tres soluciones.*

P9. *Sabemos que el polinomio* $p(x) = x^3 - x + k$ *tiene tres raíces que son números enteros. Hallar los posibles valores de* k.

P10. *Calcular las soluciones reales de la ecuación*

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

P11. *Hallar* $a \in \mathbb{R}$ *de forma que la suma de los cuadrados de las raíces de* $p(x) = x^3 - 2ax^2 + (a+1)x - a^3$ *sea mínima y hallar dicha suma.*