Problemas de Geometría

P1. *Consideremos dos puntos fijos A y B sobre una circunferencia y una recta r exterior a la circunferencia. Dado un punto P en la circunferencia, se trazan las rectas PA y PB que cortan a r en C y D respectivamente. Hallar dos puntos fijos M y N de r tales que el producto $CM \cdot DN$ sea constante al variar P.*

P2. *Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple que*

$$AP^2 + OA^2 = OP^2 + bc$$

P3. *Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y a AC en C. Si llamamos x, y, z a las distancias desde P a los lados BC, AC y AB, respectivamente, probar que*

$$x^2 = y \cdot z$$

P4. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera y tomemos P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC, respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O. Si unimos O con las cuatro puntos medios de los lados (X, Y, Z y T) se forman cuatro cuadriláteros, OXBY, OYCZ, OZDT y OTAX. Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.*

P5. *Sea H el ortocentro de un triángulo ABC y supongamos que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.*

P6. *Determinar qué condición han de cumplir las longitudes de los lados de un triángulo para que la recta que une el baricentro y el incentro sea paralela a uno de los lados.*

P7. *Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita. Probar que*

$$CD \leq 2\sqrt{5} - 4$$

P8. *A cada punto del plano se le asigna un color de entre 2009 posibles. ¿Existe siempre un trapecio inscriptible en una circunferencia de forma que sus cuatro vértices están coloreados del mismo color?*

P9. *¿Es posible colorear los puntos del plano de coordenadas enteras con tres* *colores, de tal modo que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje OX y tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no estén alineados?*

P10. *Sea H el ortocentro de un triángulo ABC, P el punto de corte de la altura que pasa por A con el lado BC y Q el punto de corte de la semirrecta HP con la circunferencia circunscrita. Demostrar que $HP = PQ$.*

P11. *Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que*

$$\frac{BE^2}{CD} = \frac{AB^2}{AC}$$

P12. *Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión geométrica de razón r. ¿Para qué valores de r el triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo?*

P13. *Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de las diagonales es mayor o igual que $2\sqrt{2}$.*

P14. *Sea ABC un triángulo. Hallar todos los puntos P interiores al triángulo que cumplen las siguientes tres desigualdades:*

$$\measuredangle APB \leq 2\measuredangle ACB, \qquad \measuredangle BPC \leq 2\measuredangle BAC, \qquad \measuredangle APC \leq 2\measuredangle ABC$$