

## LVII Olimpiada Matemática Española Concurso Final Nacional PRIMERA SESIÓN

### Problema 1

Los vértices,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro  $O$ . Sea  $D$  la proyección ortogonal de  $A$  sobre el plano,  $\alpha$ , determinado por  $B$ ,  $C$  y  $O$ . Llamamos  $N$  a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a  $\alpha$  por  $O$ . Halla la medida del ángulo  $\widehat{DNO}$ . (Nota: la proyección ortogonal de  $A$  sobre el plano  $\alpha$  es el punto de corte con  $\alpha$  de la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $\alpha$ .)

### Problema 2

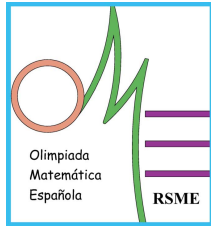
Dado un número entero positivo  $n$ , definimos  $\lambda(n)$  como el número de soluciones enteras positivas de la ecuación  $x^2 - y^2 = n$ . Diremos que el número  $n$  es “olímpico” si  $\lambda(n) = 2021$ . ¿Cuál es el menor entero positivo que es olímpico? ¿Y cuál es el menor entero positivo impar que es olímpico?

### Problema 3

Tenemos 2021 colores y 2021 fichas de cada color. Colocamos las  $2021^2$  fichas en fila. Se dice que una ficha,  $F$ , es “mala” si a cada lado de  $F$  quedan un número impar de las  $2020 \times 2021$  fichas que no comparten color con  $F$ .

- Determina cuál es el mínimo número posible de fichas malas.
- Si se impone la condición de que cada ficha ha de compartir color con al menos una ficha adyacente, ¿cuál es el mínimo número posible de fichas malas?

**No está permitido el uso de calculadoras  
ni dispositivos electrónicos de cualquier tipo.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.**



## LVII Olimpiada Matemática Española Concurso Final Nacional SEGUNDA SESIÓN

### Problema 4

Sean  $a, b, c, d$  números reales tales que

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12.$$

Halla el valor mínimo y el valor máximo que puede tomar el producto  $abcd$ , y determina para qué valores de  $a, b, c, d$  se consiguen ese mínimo y ese máximo.

### Problema 5

Disponemos de  $2n$  bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de 1 a  $n$  en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un “estado”. Dos estados son distintos si hay una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es “bueno” si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B.

Demuestra que el número total de estados buenos,  $EB$ , dividido por el número total de estados,  $ET$ , es

$$\frac{EB}{ET} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n n!}.$$

### Problema 6

Sea  $ABC$  un triángulo con  $AB \neq AC$ , sea  $I$  su incentro,  $\gamma$  su circunferencia inscrita y  $D$  el punto medio de  $BC$ . La tangente a  $\gamma$  por  $D$  diferente de  $BC$  toca a  $\gamma$  en  $E$ . Demuestra que  $AE$  y  $DI$  son paralelas.

**No está permitido el uso de calculadoras  
ni dispositivos electrónicos de cualquier tipo.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.**