LVII Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
PRIMERA SESIÓN

Problema 1

Los vértices, A, B y C, de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O. Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α, determinado por B, C y O. Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O. Halla la medida del ángulo $\widehat{DNO}$. (Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α.)

Problema 2

Dado un número entero positivo n, definimos $\lambda(n)$ como el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2-y^2=n$. Diremos que el número n es *"olímpico"* si $\lambda(n)=2021$. ¿Cuál es el menor entero positivo que es olímpico? ¿Y cuál es el menor entero positivo impar que es olímpico?

Problema 3

Tenemos 2021 colores y 2021 fichas de cada color. Colocamos las 2021^2 fichas en fila. Se dice que una ficha, F, es "mala" si a cada lado de F quedan un número impar de las 2020×2021 fichas que no comparten color con F.

(a) Determina cuál es el mínimo número posible de fichas malas.

(b) Si se impone la condición de que cada ficha ha de compartir color con al menos una ficha adyacente, ¿cuál es el mínimo número posible de fichas malas?

No está permitido el uso de calculadoras
ni dispositivos electrónicos de cualquier tipo.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.

LVII Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
SEGUNDA SESIÓN

Problema 4

Sean a, b, c, d números reales tales que

$$a + b + c + d = 0 \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12.$$

Halla el valor mínimo y el valor máximo que puede tomar el producto $abcd$, y determina para qué valores de a, b, c, d se consiguen ese mínimo y ese máximo.

Problema 5

Disponemos de $2n$ bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de 1 a n en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un "estado". Dos estados son distintos si hay una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es "bueno" si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B.

Demuestra que el número total de estados buenos, EB, dividido por el número total de estados, ET, es

$$\frac{EB}{ET} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n\, n!}.$$

Problema 6

Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$, sea I su incentro, γ su circunferencia inscrita y D el punto medio de BC. La tangente a γ por D diferente de BC toca a γ en E. Demuestra que AE y DI son paralelas.

No está permitido el uso de calculadoras
ni dispositivos electrónicos de cualquier tipo.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.