LVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Sesión única

<u>Tarde del jueves 21 de enero de 2021</u>

1. Determinar todos los números de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$ tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

3. En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.

4. Al desarrollar $(1 + x + x^2)^n$ en potencias de x, exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de n es esto posible?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo máximo de la sesión es de 4 horas.

LVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Sesión única

Mañana del viernes 22 de enero de 2021

1. En un torneo de ajedrez participan ocho maestros durante siete días. Cada día se disputan cuatro partidas en las cuales participan todos los maestros, y al finalizar el torneo todos se han enfrentado contra todos exactamente una vez. Demostrar que al terminar el quinto día del torneo existe un conjunto de al menos cuatro maestros que ya han jugado entre ellos todas las partidas.

2. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90°$. Probar que $AE = \dfrac{AB - BC}{2}$.

3. Demostrar que todos los números racionales pueden expresarse como suma de algunas fracciones de la forma $\dfrac{n-1}{n+2}$, con $n \geq 0$ entero, admitiendo repetir sumandos.

4. Determinar todas las funciones f tales que

$$f(xf(y) + y) = f(xy) + f(y)$$

para cualesquiera números reales x, y.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo máximo de la sesión es de 4 horas.