LVI Olimpiada Matemática Española

Concurso Final Nacional

Primera sesión

14 de julio de 2020

1. Decimos que un polinomio $p(x)$, con coeficientes reales, es *almeriense* si tiene la forma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$$

y sus tres raíces son números reales positivos en progresión aritmética. Halla todos los polinomios almerienses tales que $p(7/4) = 0$.

2. Consideramos la sucesión de números enteros $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

- $f(1) = 1$.
- Si n es par, $f(n) = f(n/2)$.
- Si $n > 1$ es impar y $f(n-1)$ es impar, entonces $f(n) = f(n-1) - 1$.
- Si $n > 1$ es impar y $f(n-1)$ es par, entonces $f(n) = f(n-1) + 1$

a) Calcula $f(2^{2020} - 1)$.

b) Demuestra que $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ no es periódica, es decir, no existen enteros positivos t y n_0 tales que $f(n+t) = f(n)$ para cualquier $n \geq n_0$.

3. A cada punto del conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$, formado por los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas son enteras, le asignamos un color de entre p colores posibles.

Demuestra que forzosamente existe algún paralelepípedo recto (poliedro de seis caras en el que cada cara es un rectángulo) cuyos vértices pertenecen a A y son todos del mismo color.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Concurso Final Nacional

Segunda sesión

15 de julio de 2020

4. Ana y Benito juegan a un juego que consta de 2020 rondas. Inicialmente, en la mesa hay 2020 cartas, numeradas de 1 a 2020, y Ana tiene una carta adicional con el número 0. En la ronda k-ésima, el jugador que no tiene la carta $k-1$ decide si toma la carta k o si se la entrega al otro jugador. El número de cada carta indica su valor en puntos. Al terminar el juego, gana quien tiene más puntos. Determina qué jugador tiene estrategia ganadora, o si ambos jugadores pueden forzar el empate, y describe la estrategia a seguir.

5. En un triángulo acutángulo ABC, sea M el punto medio del lado AB y P el pie de la altura sobre el lado BC. Prueba que si $AC+BC=\sqrt{2}AB$, entonces la circunferencia circunscrita del triángulo BMP es tangente al lado AC.

6. Sea S un subconjunto finito de los números enteros. Definimos $d_2(S)$ y $d_3(S)$ de la siguiente manera:

- $d_2(S)$ es el número de elementos $a \in S$ para los que existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x^2 - y^2 = a$.
- $d_3(S)$ es el número de elementos $a \in S$ para los que existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x^3 - y^3 = a$.

a) Sea m un número entero y sea $S = \{m, m+1, \ldots, m+2019\}$. Prueba que

$$d_2(S) > \frac{13}{7} \cdot d_3(S)$$

b) Sea n un entero positivo y sea $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que existe un número N de manera que si $n > N$,

$$d_2(S_n) > 4 \cdot d_3(S_n)$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.