LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

<u>Viernes mañana, 17 de enero de 2020</u>

1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.

2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.

3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$\begin{gathered} x+y+z=1 \\ x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2 \\ x^3+y^2+z=y^3+z^2+x \end{gathered}$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

4. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

5. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La l'ınea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.

Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.

6. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los láseres rojos es menor o igual que la suma de los láseres verdes.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

1. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

2. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La l'ınea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.

Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.

3. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los láseres rojos es menor o igual que la suma de los láseres verdes.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 18 de enero de 2020

4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

5. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales.

6. Sea O un punto interior del triángulo ABC y sean M, N y P las intersecciones de AO con BC, BO con CA y CO con AB, respectivamente. Demostrar que de entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC]/6$.

Observación. $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 18 de enero de 2020

1. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

2. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales.

3. Sea O un punto interior del triángulo ABC y sean M, N y P las intersecciones de AO con BC, BO con CA y CO con AB, respectivamente. Demostrar que de entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC]/6$.

Observación. $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Sábado tarde, 18 de enero de 2020</u>

4. Demostrar que la suma de los divisores positivos de un número de la forma $3k + 2$ siempre es un múltiplo de 3.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea D el pie de la altura correspondiente al lado BC; M el punto medio del lado BC y F el punto de corte de la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$ con el lado BC. Determinar todos los triángulos para los cuales F es el punto medio del segmento DM.

Observación. Se entiende que la determinación de un triángulo consiste en dar la longitud de sus lados, en términos de algún parámetro si fuese menester.

6. Sea n un entero positivo. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{n+2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.