LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 18 de enero de 2019

1. Para cada número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, denotamos por S al número $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número $\overline{abcd}$ son iguales.

2. Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 1$$

de manera que los productos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

son iguales.

3. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60°$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD en el punto F. Si $\overline{AF} = 3$, calcula el área del triángulo AFE.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 18 de enero de 2019

4. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

5. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

6. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 18 de enero de 2019

1. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

2. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

3. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Sábado mañana, 19 de enero de 2019</u>

4. Considera el conjunto de números enteros positivos n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1000000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

5. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

6. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30°$ y $\angle ABD = 90°$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.