LI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2015, Badajoz
Viernes, 20 de marzo
PRIMERA SESIÓN

Problema 1

Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.

Problema 2

En el triángulo ABC, sea A' el punto simétrico de A respecto del circuncentro O de ABC. Probar que:

a) La suma de los cuadrados de los segmentos de tangentes trazadas desde A y A' a la circunferencia inscrita en ABC es igual a $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, siendo R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita de ABC respectivamente.

b) La circunferencia de centro A' y radio $A'I$ corta a la circunferencia circunscrita de ABC en un punto L, tal que $AL = \sqrt{AB \cdot AC}$.

Problema 3

En la pizarra está escrito un entero $N \geq 2$. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, empezando por A. Cada jugador en su turno reemplaza el número existente por el que resulte de realizar una de estas dos operaciones: **restar 1** o **dividir entre 2**, siempre que se obtenga un entero positivo. El jugador que llegue al número 1 gana. Determinar razonadamente el menor número par N que le exige a A jugar al menos 2015 veces para ganar (no se contabilizan los turnos de B).

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

LI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2015, Badajoz
Sábado, 21 de marzo
SEGUNDA SESIÓN

Problema 4

Todas las caras de un poliedro son triángulos. A cada uno de los vértices de este poliedro se le asigna de forma independiente uno de entre tres colores: verde, blanco o negro. Decimos que una cara es *extremeña* si sus tres vértices son de distintos colores, uno verde, uno blanco y uno negro. ¿Es cierto que, independientemente de cómo coloreemos los vértices, el número de caras *extremeñas* de este poliedro es siempre par?

Problema 5

Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$, y $1+np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

Problema 6

Sean M y N puntos del lado BC del triángulo ABC tales que $BM = CN$, estando M en el interior del segmento BN. Sean P, Q puntos que están respectivamente en los segmentos AN, AM tales que $\angle PMC = \angle MAB$ y $\angle QNB = \angle NAC$. ¿Es cierto que $\angle QBC = \angle PCB$?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.