Sesión 1

1. *Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul. Para la coloración del resto de fichas se siguen las siguientes reglas:*

   a) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color, entonces la ficha con el número $|x - y|$ se pinta de color rojo.

   b) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre 1 y 50 (incluyendo ambos), entonces la ficha con el número $x \cdot y$ se pinta de color azul.

   Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.

   Solución. Observemos que dos números que se diferencian en 5 tienen el mismo color. En efecto, si fueran de distinto color, su diferencia debería ser de color rojo, por la regla a). Pero su diferencia es 5, que es de color azul. Por tanto basta con saber el color de los 4 primeros números. Aquí, distinguimos dos casos: 1) que la ficha 1 sea de color azul y 2) que la ficha 1 sea de color rojo.

   Caso 1) Si 1 es de color azul, el resto de fichas deberá ser de color azul, por la regla b). Esto es así porque si la ficha $k \neq 1$ fuera roja, entonces por b), $k = k \cdot 1$ tendría que ser azul, lo que contradice que k sea roja.

   Caso 2) Si 1 es roja, por la regla a) $4 = 5 - 1$ es roja. Para determinar el color de 2 y 3, supongamos que 3 es azul. Por ser $2 = 3 - 1$ y ser 3 y 1 de diferente color, entonces 2 es roja. Ahora bien $3 = 5 - 2$ y 5 es azul y 2 roja, por lo tanto 3 es roja. Esto no puede ser, por lo tanto 3 no puede ser azul y es roja, por lo que 2 también es roja. Así pues, 1, 2, 3 y 4 son rojas, lo mismo que el resto de fichas que no son múltiplo de 5.

   Por tanto, solo hay dos coloraciones posibles, o todas las fichas de color azul o todas rojas, excepto los múltiplos de 5 que son azules.

2. *Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación*

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{3 - x^3}.$$

Solución. Para que existan soluciones reales tiene que ser $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Ahora bien, si $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ se tiene que

$$2 - x^2 \leq 2, \quad 3 - x^3 \geq 3,$$

pero $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, por lo que no hay soluciones cuando $x \in [-\sqrt{2}, 0]$. Por otra parte, cuando $x \in (0, \sqrt{2}]$ podemos ver que

$$\sqrt[3]{3 - x^3} > \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3}.$$

Puesto que la ecuación

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3}$$

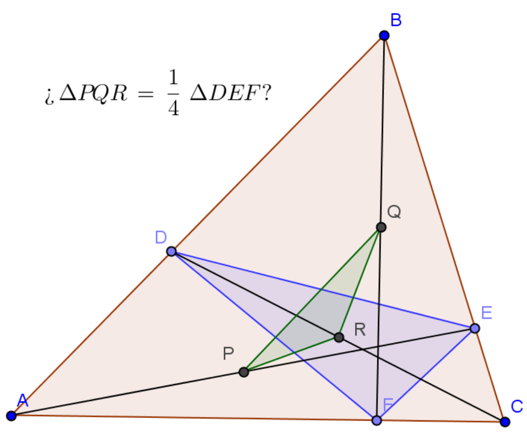
tiene como únicas soluciones $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ y, para $x = 1$, resulta $\sqrt[3]{2\sqrt{2} - 1} > \sqrt{2 - 1} = 1$, es evidente que

$$\sqrt[3]{3 - x^3} > \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3} \geq \sqrt{2 - x^2},$$

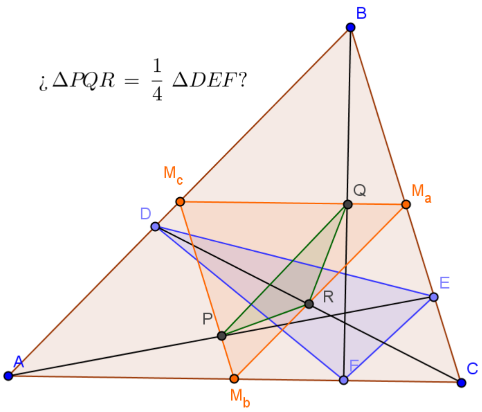
por lo que tampoco pueden existir soluciones cuando $x \in (0, \sqrt{2}]$.

3. *Sea ΔABC un triángulo y D, E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB, BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE, Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD. Probar que el área del triángulo ΔPQR es la cuarta parte del área del triángulo ΔDEF.*

   Solución. Hagamos primero un dibujo donde queden reflejados los elementos que intervienen en el problema.



Observemos que, como P, Q y R son los puntos medios de las correspondientes Cevianas AE, BF y CD, estos puntos se encuentran en los lados del triángulo que determinan los pies de las medianas de cada lado, como se ve en la figura siguiente.



Los triángulos ΔABC y $\Delta M_aM_bM_c$ son semejantes con razón de semejanza $1/2$, por lo que se tiene

$$\frac{\overline{M_cM_a}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{M_cQ}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{QM_a}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\overline{M_aM_b}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{M_aR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{RM_b}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\overline{M_bM_c}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{M_bP}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{PM_c}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}.$$

Además, los ángulos en A, B y C son iguales, respectivamente, a los ángulos en M_a, M_b y M_c.

Sea $u = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, $v = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ y $w = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{CA}}$, por lo que

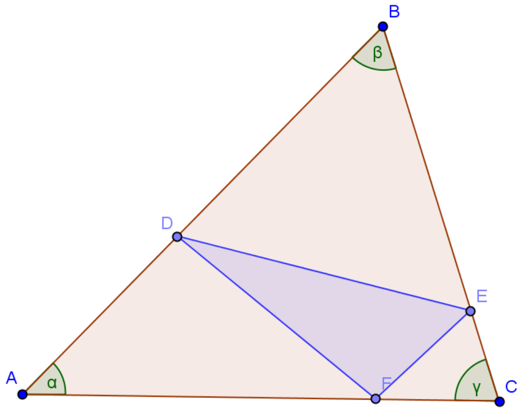
$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = 1 - u, \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = 1 - v, \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = 1 - w.$$

Aplicando la semejanza de los triángulos ΔABC y $\Delta M_aM_bM_c$, resulta

$$u = \frac{\overline{RM_b}}{\overline{M_aM_b}}, \quad v = \frac{\overline{PM_c}}{\overline{M_bM_c}}, \quad w = \frac{\overline{QM_a}}{\overline{M_cM_a}},$$

$$\frac{\overline{M_aR}}{\overline{M_aM_b}} = 1-u, \quad \frac{\overline{M_bP}}{\overline{M_bM_c}} = 1-v, \quad \frac{\overline{M_cQ}}{\overline{M_cM_a}} = 1-w.$$

Con esto, calculemos ahora el área de los triángulos complementarios del triángulo ΔDEF.



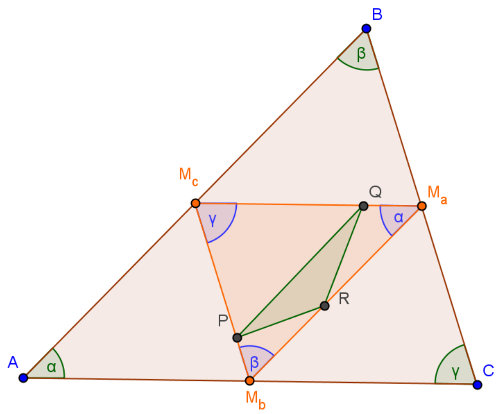
Si $[ABC]$ denota el área de un triángulo ΔABC, tenemos que

$$[AFD] = \overline{FA}\,\overline{AD}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-w)u\,\overline{CA}\,\overline{AB}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-w)u[ABC],$$

$$[BED] = \overline{DB}\,\overline{BE}\,\operatorname{sen}\beta = (1-u)v\,\overline{AB}\,\overline{BC}\,\operatorname{sen}\beta = (1-u)v[ABC],$$

$$[CFE] = \overline{EC}\,\overline{CF}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-v)w\,\overline{BC}\,\overline{CA}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-v)w[ABC].$$

Haciendo lo mismo con los triángulos complementarios del triángulo ΔPQR, con respecto al triángulo $\Delta M_aM_bM_c$ se tiene



$$[M_aRQ] = \overline{QM_a}\,\overline{M_aR}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-u)w\,\overline{M_aM_b}\,\overline{M_aM_c}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-u)w[M_aM_bM_c],$$

$$[M_bPR] = \overline{RM_b}\,\overline{M_bP}\,\operatorname{sen}\beta = (1-v)u\,\overline{M_aM_b}\,\overline{M_bM_c}\,\operatorname{sen}\beta = (1-v)u[M_aM_bM_c],$$

$$[M_cQP] = \overline{PM_c}\,\overline{M_cQ}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-w)v\,\overline{M_bM_c}\,\overline{M_aM_c}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-w)v[M_aM_bM_c].$$

Teniendo en cuenta que $[ABC] = 4[M_aM_bM_c]$ y que

$$(1-u)w + (1-v)u + (1-w)v = (1-w)u + (1-u)v + (1-v)w,$$

se sigue el resultado.

Sesión 2

1. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

   Solución. Consideremos el primer par de números consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014, que son el 45 y el 46. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 46 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embrago, entre los vértices numerados del 46 al 90 hay, al menos, 45 vértices.

2. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

   Solución 1. Supongamos, en primer lugar, que $x = 0$. En este caso se tiene $y^4 = 0$, por lo que y también tiene que ser 0. Así pues, una solución es $x = y = 0$.

   Si $x \neq 0$ dividimos toda la ecuación por x^4, quedando

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 3\frac{y}{x}.$$

   Sea $t = y/x$, entonces, las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ dan lugar a soluciones racionales de la ecuación $t^4 - 3t + 1 = 0$. Sin embargo, esta ecuación no tiene soluciones racionales pues, de tenerlas, el denominador de la fracción debería ser un divisor del coeficiente de t^4 y el denominador un divisor del término independiente. Es decir, las posibles soluciones racionales solo pueden ser 1 o -1, pero ninguna de ellas verifica $t^4 - 3t + 1 = 0$. Por tanto, como no hay soluciones racionales, no hay soluciones enteras de $x^4 + y^4 = 3x^3y$ con $x \neq 0$.

   Solución 2. En primer lugar observemos que si (x, y) es una solución, también lo es $(-x, -y)$ y que, por ser $x^4 + y^4 \geq 0$, entonces o bien $x, y \geq 0$, o bien $x, y \leq 0$. Debido a esto, buscaremos soluciones tales que $x, y \geq 0$.

   Puesto que el segundo miembro de la ecuación es un múltiplo de 3, también ha de serlo el primero. Ahora bien, toda potencia cuarta es congruente con 0 o con 1 módulo 3, siendo congruente con 0 solo cuando se trata de un múltiplo de 3. Por tanto, tanto x como y deben ser múltiplos de 3. Es decir, existen $k_1 \geq 0$ y $k_2 \geq 0$ enteros tales que

$$x = 3k_1, \quad y = 3k_2.$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$k_1^4 + k_2^4 = 3k_1^3 k_2.$$

Es decir k_1, k_2 es una solución tal que $0 \leq k_1 < x$ y $0 \leq k_2 < y$. Si aplicáramos el mismo razonamiento a k_1, k_2 obtendríamos una nueva solución k_3, k_4 tal que $0 \leq k_3 < k_1$, $0 \leq k_4 < k_2$. Es decir podemos obtener una sucesión infinita de soluciones, decreciente, a partir de una dada. Pero esto no es posible ya que la solución de partida es finita. Por tanto debe ser $k_1 = k_2 = 0$, o lo que es lo mismo $x = y = 0$, que es la única solución entera de la ecuación.

3. *Probar que*

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3.$$

Solución. Se tiene que $2014 = 1013 + 1001$. Sea $a = 2014$ y $b = 1013$, entonces deberemos probar que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013}$$

es múltiplo de

$$a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab(a-b).$$

Ahora bien, por el binomio de Newton, se obtiene

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n}\, b^n,$$

y agrupando por parejas simétricas resulta

$$\begin{aligned} a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n (a^{2013-n}\, b^n - a^n\, b^{2013-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^n b^n (a^{2013-2n} - b^{2013-2n}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1} = (a-b)p_k(a,b),$$

podemos escribir

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = a\,b\,(a-b)\sum_{n=1}^{1006}\binom{2013}{n}(-1)^n a^{n-1}b^{n-1}p_n(a,b).$$

Finalmente, observemos que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ es múltiplo de 3, pero no $a = 2014$ ni $b = 1013$ ni $a - b = 1001$, de donde se concluye que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} \quad \text{es múltiplo de} \quad 3ab(a-b).$$

Sesión 2

1. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

   Solución. Consideremos el primer par de números consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014, que son el 45 y el 46. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 46 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embrago, entre los vértices numerados del 46 al 90 hay, al menos, 45 vértices.

2. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

   Solución 1. Supongamos, en primer lugar, que $x = 0$. En este caso se tiene $y^4 = 0$, por lo que y también tiene que ser 0. Así pues, una solución es $x = y = 0$.

   Si $x \neq 0$ dividimos toda la ecuación por x^4, quedando

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 3\frac{y}{x}.$$

   Sea $t = y/x$, entonces, las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ dan lugar a soluciones racionales de la ecuación $t^4 - 3t + 1 = 0$. Sin embargo, esta ecuación no tiene soluciones racionales pues, de tenerlas, el denominador de la fracción debería ser un divisor del coeficiente de t^4 y el denominador un divisor del término independiente. Es decir, las posibles soluciones racionales solo pueden ser 1 o -1, pero ninguna de ellas verifica $t^4 - 3t + 1 = 0$. Por tanto, como no hay soluciones racionales, no hay soluciones enteras de $x^4 + y^4 = 3x^3y$ con $x \neq 0$.

   Solución 2. En primer lugar observemos que si (x, y) es una solución, también lo es $(-x, -y)$ y que, por ser $x^4 + y^4 \geq 0$, entonces o bien $x, y \geq 0$, o bien $x, y \leq 0$. Debido a esto, buscaremos soluciones tales que $x, y \geq 0$.

   Puesto que el segundo miembro de la ecuación es un múltiplo de 3, también ha de serlo el primero. Ahora bien, toda potencia cuarta es congruente con 0 o con 1 módulo 3, siendo congruente con 0 solo cuando se trata de un múltiplo de 3. Por tanto, tanto x como y deben ser múltiplos de 3. Es decir, existen $k_1 \geq 0$ y $k_2 \geq 0$ enteros tales que

$$x = 3k_1, \quad y = 3k_2.$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$k_1^4 + k_2^4 = 3k_1^3 k_2.$$

Es decir k_1, k_2 es una solución tal que $0 \leq k_1 < x$ y $0 \leq k_2 < y$. Si aplicáramos el mismo razonamiento a k_1, k_2 obtendríamos una nueva solución k_3, k_4 tal que $0 \leq k_3 < k_1$, $0 \leq k_4 < k_2$. Es decir podemos obtener una sucesión infinita de soluciones, decreciente, a partir de una dada. Pero esto no es posible ya que la solución de partida es finita. Por tanto debe ser $k_1 = k_2 = 0$, o lo que es lo mismo $x = y = 0$, que es la única solución entera de la ecuación.

3. *Probar que*
$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$
es múltiplo de
$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3.$$

Solución. Se tiene que $2014 = 1013 + 1001$. Sea $a = 2014$ y $b = 1013$, entonces deberemos probar que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013}$$

es múltiplo de
$$a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab(a-b).$$

Ahora bien, por el binomio de Newton, se obtiene

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n}\, b^n,$$

y agrupando por parejas simétricas resulta

$$\begin{aligned} a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n (a^{2013-n}\, b^n - a^n\, b^{2013-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^n b^n (a^{2013-2n} - b^{2013-2n}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1} = (a-b)p_k(a,b),$$

podemos escribir

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = a\,b\,(a-b)\sum_{n=1}^{1006}\binom{2013}{n}(-1)^n a^{n-1}b^{n-1}p_n(a,b).$$

Finalmente, observemos que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ es múltiplo de 3, pero no $a = 2014$ ni $b = 1013$ ni $a - b = 1001$, de donde se concluye que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} \quad \text{es múltiplo de} \quad 3ab(a-b).$$

Sesión 3

1. *Sean a, b números positivos. Probar que*

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Solución 1. La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica al miembro de la izquierda obtenemos

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{ab + \dfrac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Solución 2. Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2$ $(0 \leq s, t)$ obtenemos la desigualdad equivalente

$$st + \sqrt{\frac{s^4 + t^4}{2}} \leq s^2 + t^2.$$

Aislando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, también es equivalente

$$\frac{s^4 + t^4}{2} \leq s^4 + t^4 + s^2t^2 + 2s^2t^2 - 2s^3t - 2t^3s.$$

Multiplicando por 2 e igualando a 0 el miembro de la izquierda, es equivalente probar que

$$0 \leq s^4 + t^4 + 6s^2t^2 - 4s^3t - 4t^3s.$$

Finalmente, gracias al binomio de Newton,

$$s^4 + t^4 + 6s^2t^2 - 4s^3t - 4t^3s = (t - s)^4 \geq 0.$$

Solución 3. Denotamos

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmética de los números } a \text{ y } b.)$$

$$G = \sqrt{ab} \text{ (media geométrica de los números } a \text{ y } b.)$$
$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (media cuadrática de los números } a \text{ y } b.)$$

Con esta notación debemos probar que

$$G + Q \leq 2A$$

o, equivalentemente,

$$Q - A \leq A - G,$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2 - A^2}{Q + A} \leq \frac{A^2 - G^2}{A + G}.$$

Puesto que $Q \geq G$, se tiene que $Q + A \geq A + G > 0$. Como $Q \geq A$, tenemos $Q^2 - A^2 \geq 0$. Puesto que $A \geq G$, tenemos que $A^2 - G^2 \geq 0$. Así pues, basta probar que

$$Q^2 - A^2 \leq A^2 - G^2,$$

que equivale a

$$Q^2 + G^2 \leq 2A^2.$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2+b^2}{2} + ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad.

Solución 4. La desigualdad equivale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Puesto que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, gracias a la desigualdad de Jensen,

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2}.$$

2. *Encontrar las tres últimas cifras de* 7^{2014}.

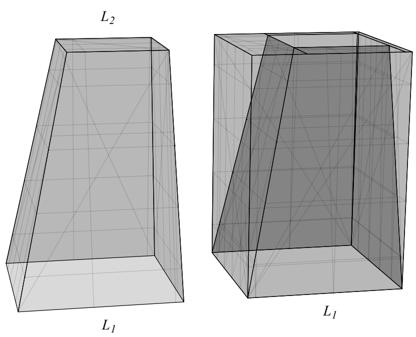
   Solución 1. Usaremos el teorema de Euler-Fermat: si $\operatorname{mcd} a, m = 1$, entonces
$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$
   En nuestro caso, queremos calcular $7^{2014} \pmod{1000}$. Por ser $1000 = 2^3 5^3$, se tiene que $\varphi(1000) = 2^2(2-1) \cdot 5^2(5-1) = 400$. Entonces,
$$7^{2014} = 7^{5\cdot 400+14} = \left(7^{400}\right)^5 \cdot 7^{14} \equiv 1^5 \cdot 7^{14} \equiv 849 \pmod{1000}.$$
   En consecuencia, las tres últimas cifras de 7^{2014} son 849.

   Solución 2. Observemos que las tres últimas cifras de 7^4 son 401. Por tanto, multiplicando sucesivamente por 7^4, resulta que

Potencia	últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

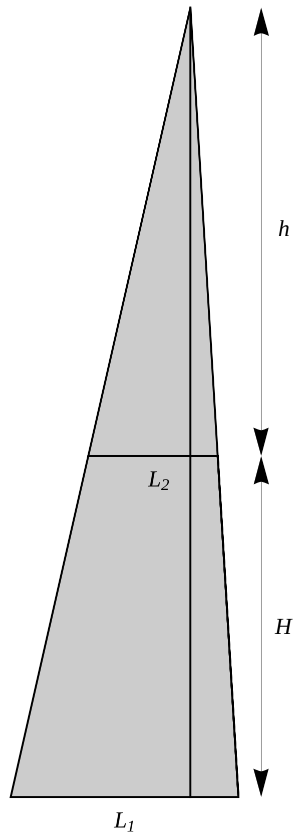
   Puesto que $7^{2014} = 7^2 \cdot 7^{2012} = 7^2 \cdot 7^{503\cdot 4}$, resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 deja resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el periodo de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla). Así pues, las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto $49 \cdot 201$, es decir 849.

3. *De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L_1, y altura H, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L_1 (para la inferior) y L_2 (para la superior), y altura H. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente.*



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

Solución. Si prolongamos una altura h el tronco de pirámide hasta obtener una pirámide completa de altura $H + h$ tendrá una sección como la que se muestra en la figura siguiente.



Un argumento de semejanza de triángulos permite comprobar que

$$\frac{h+H}{L_1} = \frac{h}{L_2}$$

y, por tanto,

$$h = \frac{HL_2}{L_1 - L_2}.$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del tronco de pirámide} &= \tfrac{1}{3}(L_1^2(H+h) - L_2^2 h) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{HL_1^3}{L_1 - L_2} - \frac{HL_1^3}{L_1 - L_2}\right) \\
&= \frac{H}{3}\frac{L_1^3 - L_2^3}{L_1 - L_2} = \frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2).
\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que

$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = \frac{2}{3}\,\text{Volumen del prisma},$$

tendremos la ecuación

$$\frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) = \frac{2}{3}HL_1^2,$$

que se transforma en

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - \frac{L_1}{L_2} - 1 = 0,$$

cuya única solución positiva es $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es decir, los lados deben estar en relación áurea.

Sesión 3

1. *Sean a, b números positivos. Probar que*

$$a+b \geq \sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Solución 1. La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica al miembro de la izquierda obtenemos

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Solución 2. Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2$ $(0 \leq s, t)$ obtenemos la desigualdad equivalente

$$st+\sqrt{\frac{s^4+t^4}{2}} \leq s^2+t^2.$$

Aislando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, también es equivalente

$$\frac{s^4+t^4}{2} \leq s^4+t^4+s^2t^2+2s^2t^2-2s^3t-2t^3s.$$

Multiplicando por 2 e igualando a 0 el miembro de la izquierda, es equivalente probar que

$$0 \leq s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s.$$

Finalmente, gracias al binomio de Newton,

$$s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s = (t-s)^4 \geq 0.$$

Solución 3. Denotamos

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmética de los números } a \text{ y } b.)$$

$$G = \sqrt{ab} \text{ (media geométrica de los números } a \text{ y } b.)$$

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (media cuadrática de los números } a \text{ y } b.)$$

Con esta notación debemos probar que

$$G + Q \leq 2A$$

o, equivalentemente,

$$Q - A \leq A - G,$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2 - A^2}{Q + A} \leq \frac{A^2 - G^2}{A + G}.$$

Puesto que $Q \geq G$, se tiene que $Q + A \geq A + G > 0$. Como $Q \geq A$, tenemos $Q^2 - A^2 \geq 0$. Puesto que $A \geq G$, tenemos que $A^2 - G^2 \geq 0$. Así pues, basta probar que

$$Q^2 - A^2 \leq A^2 - G^2,$$

que equivale a

$$Q^2 + G^2 \leq 2A^2.$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2+b^2}{2} + ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad.

Solución 4. La desigualdad equivale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Puesto que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, gracias a la desigualdad de Jensen,

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2}.$$

2. *Encontrar las tres últimas cifras de* 7^{2014}.

Solución 1. Usaremos el teorema de Euler-Fermat: si $\operatorname{mcd} a, m = 1$, entonces

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

En nuestro caso, queremos calcular $7^{2014} \pmod{1000}$. Por ser $1000 = 2^3 5^3$, se tiene que $\varphi(1000) = 2^2(2-1) \cdot 5^2(5-1) = 400$. Entonces,

$$7^{2014} = 7^{5\cdot 400+14} = \left(7^{400}\right)^5 \cdot 7^{14} \equiv 1^5 \cdot 7^{14} \equiv 849 \pmod{1000}.$$

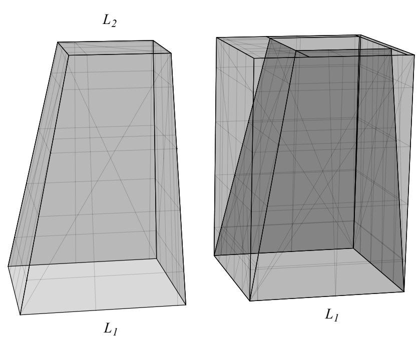
En consecuencia, las tres últimas cifras de 7^{2014} son 849.

Solución 2. Observemos que las tres últimas cifras de 7^4 son 401. Por tanto, multiplicando sucesivamente por 7^4, resulta que

Potencia	últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

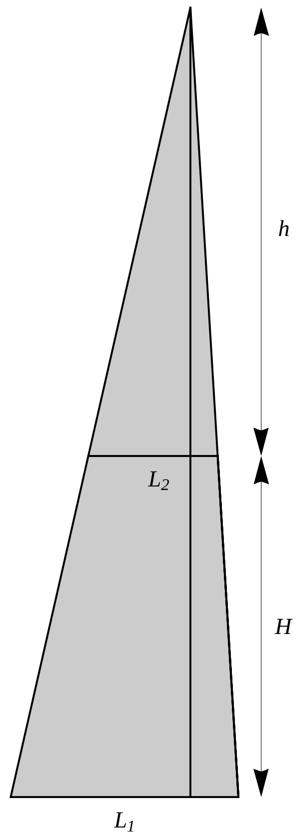
Puesto que $7^{2014} = 7^2 \cdot 7^{2012} = 7^2 \cdot 7^{503\cdot 4}$, resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 deja resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el periodo de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla). Así pues, las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto $49 \cdot 201$, es decir 849.

3. *De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud* L_1*, y altura* H*, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud* L_1 *(para la inferior) y* L_2 *(para la superior), y altura* H*. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente.*



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

Solución. Si prolongamos una altura h el tronco de pirámide hasta obtener una pirámide completa de altura $H + h$ tendrá una sección como la que se muestra en la figura siguiente.



Un argumento de semejanza de triángulos permite comprobar que

$$\frac{h+H}{L_1} = \frac{h}{L_2}$$

y, por tanto,

$$h = \frac{HL_2}{L_1 - L_2}.$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned}\text{Volumen del tronco de pirámide } &= \tfrac{1}{3}(L_1^2(H+h) - L_2^2 h) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{HL_1^3}{L_1 - L_2} - \frac{HL_1^3}{L_1 - L_2}\right) \\ &= \frac{H}{3}\frac{L_1^3 - L_2^3}{L_1 - L_2} = \frac{H}{3}(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2).\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que

$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = \frac{2}{3}\,\text{Volumen del prisma},$$

tendremos la ecuación

$$\frac{H}{3}(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2) = \frac{2}{3} H L_1^2,$$

que se transforma en

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - \frac{L_1}{L_2} - 1 = 0,$$

cuya única solución positiva es $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es decir, los lados deben estar en relación áurea.

Sesión 4

1. *Hallar para qué valores del número real a todas las raíces del polinomio, en la variable x,*
$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$
son números enteros.

Solución 1. Sean α, β y γ las raíces del polinomio. Aplicando las fórmulas de Cardano-Vieta se tiene

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -25.$$

Ahora bien

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 54.$$

Como α, β y γ son enteros, buscamos soluciones enteras de la pareja de ecuaciones

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 54.$$

De la segunda vemos que las únicas soluciones posibles son

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 7), \quad (\pm 2, \pm 5, \pm 5), \quad (\pm 3, \pm 3, \pm 6),$$

y teniendo en cuenta la primera ecuación, la única solución posible es $(2, 5, -5)$ y entonces $a = 50$.

Solución 2. Notemos que el polinomio que nos dan es uno que se obtiene desplazando verticalmente a unidades el polinomio

$$P(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 25x = x(x^2 - 2x - 25),$$

que tiene raíces en $x = 1 \pm \sqrt{26}$ y $x = 0$. Si $a > 0$ habrá dos raíces positivas mayores que 0 y menores que $1 + \sqrt{26}$. Al ser enteras, solo podrán ser $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ o $x_6 = 6$ y además, se tendrá que verificar $P(x_j) = P(x_k)$, para $j \neq k$ y $1 \leq j, k \leq 6$.

Teniendo en cuenta que $P(2) = P(5) = -50$, resulta que el polinomio

$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50$$

tiene sus tres raíces enteras, dos de ellas son las mencionadas 2 y 5 y la tercera -5.

En el caso en que $a < 0$, no existen soluciones, ya que en este caso habría dos raíces negativas, que podrían ser -1, -2 -3 o -4, pero

$$P(-1) \neq P(-2) \neq P(-3) \neq P(-4).$$

2. *Sean x e y números reales entre* 0 *y* 1. *Probar que*

$$x^3 + xy^2 + 2\,xy \le 2\,x^2 y + x^2 + x + y.$$

Solución. La desigualdad equivale a

$$P = 2\,x^2 y + x^2 + x + y - x^3 - xy^2 - 2\,xy \ge 0.$$

Escribimos P como un polinomio en la variable x,

$$P = -x^3 + (2y+1)x^2 + (1 - 2y - y^2)x + y.$$

Dividimos este polinomio entre $x - 1$, mediante el algoritmo de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 2y+1 & 1-2y-y^2 & y \\ 1 & & -1 & 2y & 1-y^2 \\ \hline & -1 & 2y & 1-y^2 & 1+y-y^2. \end{array}$$

Es decir,

$$P = (-x^2 + 2xy + 1 - y^2)(x-1) + 1 + y - y^2.$$

También

$$\begin{aligned} P &= (-x^2 + 2xy - y^2)(x-1) + x - 1 + 1 + y - y^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2)(1-x) + x + y - y^2 \\ &= (x-y)^2(1-x) + x + y(1-y). \end{aligned}$$

Puesto que las cinco cantidades $(x-y)^2$, $1-x$, x, y, $1-y$ son no negativas, $P \ge 0$.

3. *Consideramos un número primo p. Debemos diseñar un torneo de p-parchís sujeto a las siguientes reglas.*

   - *En el torneo participan p^2 jugadores.*
   - *En cada partida juegan p jugadores.*
   - *El torneo se divide en rondas. Las rondas se dividen en partidas. Cada jugador juega una, o ninguna, partida en cada ronda.*
   - *Al final del torneo cada jugador se ha enfrentado exactamente una vez con cada uno de los otros jugadores.*

Determinar si es posible diseñar un torneo así. En caso afirmativo, obtened el mínimo número de rondas que puede tener el torneo.

Solución. El número de partidas que disputa cada jugador es

$$\frac{\text{número de jugadores a los que se enfrenta}}{\text{número de jugadores a los que se enfrenta en cada partida}} = \frac{p^2-1}{p-1}.$$

O sea, cada jugador juega $p+1$ partidas. Por tanto el número de rondas es, al menos, $p+1$, y es exactamente $p+1$ cuando todos los jugadores juegan en todas las rondas. En ese caso, en cada ronda se disputan $\frac{p^2}{p} = p$ partidas.

Vamos a probar que es posible organizar un torneo con $p+1$ rondas. Representamos a cada jugador como un número de dos cifras escrito en base p. Es decir, escribimos cada jugador de la forma

$$C_iC_d,$$

donde C_i, la cifra de la izquierda, y C_d, la cifra de la derecha, toman valores enteros entre 0 y $p-1$.

Realizamos la siguiente planificación.

- Ronda 0. Agrupamos los jugadores en los que C_i coincide.
- Ronda 1. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- ......
- Ronda k. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + k \cdot C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- ....
- Ronda $p-1$. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + (p-1) \cdot C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- Ronda p. Agrupamos los jugadores en los que C_d coincide.

En los argumentos que siguen, diremos que $D \equiv E$ si ambos números tienen el mismo resto al dividir por p.

Debemos observar que la planificación propuesta agrupa a los jugadores en conjuntos de p elementos. En los rondas 0 y p eso es claro. Consideramos una ronda k con $0 < k < p$. Para cada C_i fijado, al mover C_d, el resto de $C_i + k \cdot C_d$ es siempre distinto (si no lo fuera tendríamos dos jugadores C_iC_d, $C_iC'_d$ para los que $C_i + k \cdot C_d \equiv C_i + k \cdot C'_d$, y restando llegaríamos a que $k(C'_d - C_d)$ es múltiplo de p, sin que ni k ni $C'_d - C_d$ lo sean). Por tanto, obtenemos una vez, y sólo una, todos los posibles restos. Al variar C_i obtenemos p veces cada uno de los restos.

Supongamos que dos jugadores, C_iC_d y $C'_iC'_d$, se enfrentan dos veces.

Si lo hacen en rondas $0 \leq j < k \leq p - 1$ tenemos que $C_i + k \cdot C_d \equiv C'_i + k \cdot C'_d$, $C_i + j \cdot C_d \equiv C'_i + j \cdot C'_d$. Restando, $(k - j) \cdot C_d \equiv (k - j) \cdot C'_d$. Como $k - j$ es primo con p, $C_d \equiv C'_d$. Luego $C_d = C'_d$. Llevando esta igualdad a nuestra hipótesis, y restando, obtenemos fácilmente $C_i \equiv C'_i$. Luego $C_i = C'_i$.

Si los jugadores se enfrentan en rondas k y p con $0 \leq k < p$ obtenemos directamente que $C_d = C'_d$, y repetimos el argumento anterior.