XLVII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional (Pamplona)
25 y 26 de marzo de 2011

ENUNCIADOS Y SOLUCIONES OFICIALES

1. *En un polígono regular de* 67 *lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos* n *de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre* 10 *colores posibles. Halla el valor mínimo de* n *que garantiza, que independientemente de cuáles sean los* n *segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a* 7 *segmentos del mismo color.*

SOLUCIÓN:
Veamos en primer lugar que con $n = 2010$ no es suficiente.
Diremos que un segmento es de *tamaño* r si une dos vértices entre los que, por el camino más corto siguiendo los lados del polígono, hay otros $r-1$ vértices. Elegimos los 2010 segmentos de *tamaño* mayor que $3.$ Para cada $r \in \{1,2,...,10\},$ asignamos el color r a los segmentos de *tamaño* $3r+1, 3r+2$ y $3r+3.$ Es obvio que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color.
Ahora vamos a probar que si $n = 2011,$ hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En efecto, en los 2011 segmentos intervienen, contando repeticiones, 4022 vértices, luego, por el principio del palomar, como $4022 > 60 \times 67,$ algún vértice interviene en, al menos, 61 segmentos, de los cuales, de nuevo por el principio del palomar, al menos, 7 serán del mismo color.

2. *Sean* a,b,c *números reales positivos. Demuestra que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

SOLUCIÓN:
Nótese en primer lugar que, en virtud de la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2} = \frac{3}{2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, o equivalentemente, si y sólo si $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, es decir, si y sólo si $a=b=c$. Nos bastaría entonces, para concluir el problema, con demostrar que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq 1+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Esto puede conseguirse por *fuerza bruta*, viéndose en primer lugar que el miembro de la derecha puede escribirse como

$$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1,$$

y a partir de aquí comparando las fracciones restantes, llegándose a la conclusión tras algo de cálculo. Sin embargo, se puede obtener el resultado deseado de una forma más elegante, ya que podemos escribir

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc}=\left(\frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\right)^2,$$

$$2(ab+bc+ca)=\left(\sqrt{ab+ca}\right)^2+\left(\sqrt{bc+ab}\right)^2+\left(\sqrt{ca+bc}\right)^2,$$

y por la desigualdad del producto escalar, se tendría

$$\sqrt{2(ab+bc+ca)}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}\geq$$

$$\geq\frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\sqrt{ab+ca}+\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\sqrt{bc+ab}+\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\sqrt{ca+bc}=a+b+c,$$

es decir,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1,$$

con lo que se concluye el problema. Nótese que la igualdad se da en la última desigualdad si y sólo si

$$\frac{\sqrt{ab+ca}}{a}\sqrt{ab+ca}=\frac{\sqrt{bc+ab}}{b}\sqrt{bc+ab}=\frac{\sqrt{ca+bc}}{c}\sqrt{ca+bc},$$

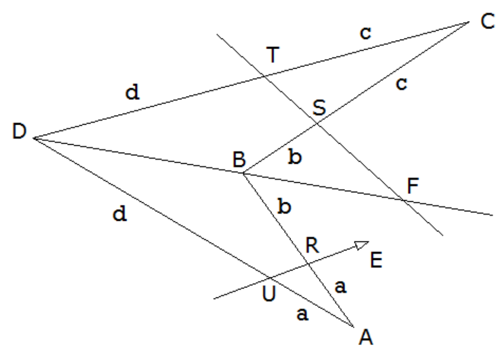
es decir, si y sólo si $a=b=c$, que es por lo tanto también la condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad en la desigualdad propuesta.

3. *Sean A,B,C,D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.*

SOLUCIÓN:

Sean R, S, T, U los puntos de tangencia respectivos de la esfera con los segmentos AB, BC, CD, DA. Siendo O el centro de la esfera, claramente OU, OR son respectivamente perpendiculares a DA, AB, con lo que los triángulos OAU y OAR son rectángulos respectivamente en U, R, y al ser $OU = OR$ el radio de la esfera, ambos triángulos son iguales, luego $AU = AR = a$, y de forma análoga,

$$BR = BS = b,\ CS = CT = c,\ \text{y}\ \ DT = DU = d.$$



Las rectas *UR* y *BD* están en el plano del triángulo *ABD*, así o bien se cortan o son paralelas. Si *UR* y *BD* son paralelas, del teorema de Thales resulta $b = d$, y del recíproco de Thales resulta que también son paralelas *TS* y *DB*. Entonces, *UR* y *TS* son paralelas y los cuatro puntos están en un plano.
Si *UR* y *BD* no son paralelas, sea *E* su punto de intersección. Tampoco pueden entonces ser paralelas *TS* y *DB*, porque si lo fueran, lo serían *UR* y *BD*, en contra de lo supuesto. Sea entonces *F* el punto de intersección de *TS* y *DB*. Aplicando el teorema de Menelao en *ABD* cortado por *UR*, y en *BCD* cortado por *TS*, obtenemos

$$1 = \frac{BE}{ED}\frac{DU}{UA}\frac{AR}{RB} = \frac{BE}{ED}\frac{d}{b}, \qquad 1 = \frac{BF}{FD}\frac{DT}{TC}\frac{CS}{SB} = \frac{BF}{FD}\frac{d}{b}, \qquad \frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FD}.$$

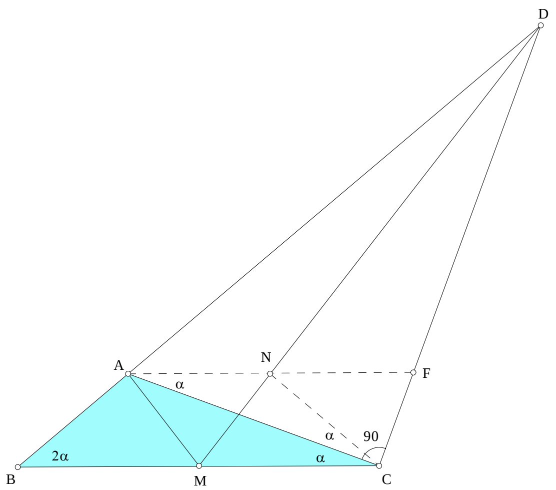
Entonces, *E* y *F* dividen a *DB* en la misma razón. Como ninguno de los dos puntos (*E* y *F*) pueden estar entre *D* y *B* – pues *BCD* tendría tres puntos de intersección con *ST* – entonces *E* y *F* tienen que coincidir. Las rectas *UR* y *ST* se cortan entonces en $E = F$, luego están en un mismo plano y en él, en particular, están los puntos *U*, *R*, *S* y *T*.

4. *Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90^{\circ}$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC, y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.*

SOLUCIÓN:

La recta que pasa por A y es paralela a BC corta a DM y a DC en los puntos N y F respectivamente.
Se sigue que $AN : BM = DN : DM = NF : MC$.
Pues $BM = MC$, resulta $AN = NF$. Como que $\angle ACF = 90^{\circ}$, tenemos $AN = NC$, de manera que $\angle NCA = \angle NAC = \angle ACB$.
Así pues, $\angle NCB = 2\angle ACB = \angle ABC$.
Como $AN \parallel BC$, el cuadrilátero $ABCN$ es un trapecio isósceles con $AB = NC$.
Por consiguiente, $\Delta ABM \equiv \Delta NCM$ y $\angle AMB = \angle NMC = \angle DMC$

.



5. *Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es sanferminera cuando para cada dos números racionales* x, y, *con* $x \neq y$, *si se cumple una de las tres condiciones siguientes:*

a) $xy = 1$,

b) $x + y = 0$,

c) $x + y = 1$,

entonces x *e* y *están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones sanfermineras hay?*

SOLUCIÓN:

Si una coloración es *sanferminera*, podemos hallar otra coloración *sanferminera* intercambiando simultáneamente el color de cada racional, de rojo a blanco y de blanco a rojo; si en la coloración inicial dos racionales tienen distinto color, también lo tendrán en la resultante. Hallemos entonces el número de coloraciones *sanfermineras* tales que, sin pérdida de generalidad, el racional 1 está pintado de rojo, y el número total de coloraciones *sanfermineras* será exactamente el doble.

Supongamos entonces que tenemos una coloración *sanferminera* con el 1 pintado de rojo. Dado el color del racional $x>0$, el color del racional $-x < 0$ tiene que ser distinto, pues $x + (-x) = 0$; al mismo tiempo, como 1 es rojo y $1 + 0 = 1$, necesariamente 0 es blanco. Luego fijado el color de cada racional positivo en una coloración *sanferminera*, quedaría fijado el color de todos los racionales. Al mismo tiempo, para cada racional positivo x, como $(x+1) + (-x) = 1$, entonces $x+1$ y $-x$ tienen color distinto, luego x y $x+1$ tienen el mismo color. Por inducción sobre n, se comprueba entonces fácilmente que para cada racional positivo x y para cada entero positivo n, los racionales x y $n + x$ tienen el mismo color. En particular, todos los enteros positivos serán necesariamente de color rojo.

Coloreados entonces todos los enteros positivos de color rojo, procedemos ahora de la siguiente manera para los racionales positivos q que no tienen un color asociado todavía: expresamos $q = m + \frac{u}{v}$, donde m es la parte entera de q, y $u < v$ son enteros positivos primos entre sí; esta expresión es claramente única para cada racional positivo q, y para dos racionales positivos que difieran en un entero, los valores de u, v son claramente los mismos. Si $\frac{v}{u}$ tiene ya un color asociado, entonces le asociamos a q el color opuesto; si $\frac{v}{u}$ no tiene todavía color asociado, entonces procedemos de la misma forma con $\frac{v}{u}$, hasta llegar a un racional que sí tenga color asociado, pudiendo entonces asociarle un color a $\frac{v}{u}$, y asociándole a q el color opuesto; nótese que en cualquier caso x y $n + x$ tendrán el mismo color asociado. El proceso termina necesariamente, ya que expresando $q = \frac{v}{u} = m + \frac{u'}{v'}$, se tiene que $vv' = muv' + uu'$, luego al ser primos entre sí u, v, entonces u divide a v', y al ser primos entre sí u', v', entonces v' divide a u, luego $u = v' > u'$, y tras a lo sumo u pasos, llegaríamos a $u' = 0$, es decir, a un entero, que sí tiene asociado un color. Nótese además que el proceso es único ya que, en cada paso, los valores de m, u, v quedan unívocamente determinados por el valor del racional positivo q, con lo que al ser todos los enteros positivos rojos, cada racional positivo podrá tener uno y sólo un color asociado. Esta coloración única para los racionales positivos se extiende también de forma única a todos los racionales, como ya hemos visto. Existe entonces a lo sumo una coloración *sanferminera* pintando el racional 1 de rojo.

Comprobemos que en efecto esta coloración única que hemos construido satisface las condiciones del enunciado:

1) Si $x + y = 0$ con $x \neq y$, sin pérdida de generalidad $x > 0 > y = -x$, luego y tiene, por la forma de extender la coloración a todos los racionales, color distinto al de x.
2) Si $xy = 1$ con $x \neq y$, o ambos son positivos, o ambos son negativos, teniendo en el segundo caso x, y colores respectivamente opuestos a los de $-x$, $-y$, que serían positivos, reduciéndose la comprobación al primer caso. Si x, y son ambos positivos, sin pérdida de generalidad $x>1>y$, con $y = 0 + \frac{u}{v}$ para enteros positivos $u < v$, y por construcción a y se le asigna color opuesto al de $x = \frac{v}{u}$.
3) Si $x + y = 1$ con $x \neq y$, entonces sin pérdida de generalidad $x > y$, y bien $x = 1$ es rojo, $y = 0$ es blanco, bien $x > 1> 0 > y$, bien $1 > x > y > 0$. En el segundo caso, el racional positivo $x-1$ tiene por construcción el mismo color que x, luego por 1), x tiene color opuesto a $1-x = y$. En el tercer caso, existen enteros positivos $u < v$ primos entre sí tales que $x = \frac{v}{u+v}, y = \frac{u}{u+v}$. Por construcción y por 2), x tiene color opuesto al de $\frac{u+v}{v} = 1 + \frac{u}{v}$, luego x tiene el mismo color que $\frac{v}{u}$. Pero también por construcción y por 2), y tiene color opuesto al de $y = \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u}$, luego opuesto al de $\frac{v}{u}$, y opuesto al de x.

Luego la coloración construida es *sanferminera*, y es la única que puede ser *sanferminera* con el racional 1 pintado de rojo. Restaurando la generalidad, hay exactamente dos coloraciones *sanfermineras*.

***6.** Sea (S_n), con $n \geq 0$, la sucesión definida por:*

(i) $S_n = 1$ *para* $0 \leq n \leq 2011$.

(ii) $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$, *para* $n \geq 0$.

Demuestra que, para todo entero no negativo a, se cumple que $S_{2011a} - S_a$, es múltiplo de 2011.

SOLUCIÓN:

Sea $p = 2011$. Observemos que p es primo.

Sea A_n el número de formas de cubrir un tablero de $[n \text{ filas}] \times [(p+1) \text{ columnas}]$ con fichas de dimensiones $1 \times (p+1)$ (que podemos colocar horizontal o verticalmente).

Probemos primero que $A_n = S_n$.

Tenemos que:

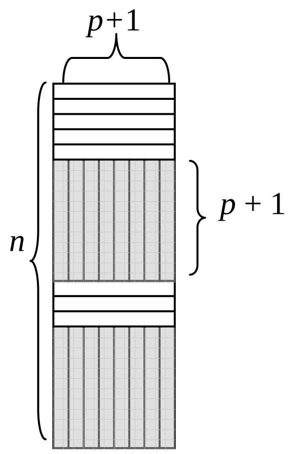
- para $1 \le n \le p$, $A_n = 1 = S_n$.
- $A_{p+1} = 2 = S_{p+1}$.
- para $n \ge 0$, $A_{n+p+1} = A_{n+p} + A_n$; en efecto, al cubrir un tablero de $\left[(n+p+1)\text{ filas}\right] \times \left[(p+1)\text{ columnas}\right]$ con fichas de $1 \times (p+1)$, se da uno de los dos casos siguientes:

  *o bien la última fila, de $(p+1)$ casillas, está cubierta por una ficha colocada horizontalmente: en este caso, hay A_{n+p} formas de cubrir el tablero.

  *o bien las $(p+1)$ últimas filas, cada una de $(p+1)$ casillas, están cubiertas por $(p+1)$ fichas en posición vertical: en este caso, hay A_n formas de cubrir el tablero.

Deducimos que, para $n > 0$, $A_n = S_n$.

Hallemos ahora una expresión de A_n en función de *n*.
Escribamos la división euclidiana de *n* por $(p+1)$: $n = q(p+1) + r$.
Observemos que, al cubrir el tablero, se pueden juntar las fichas colocadas en posición vertical para formar cuadrados de $(p+1) \times (p+1)$:



Llamemos *bloques* a estos cuadrados.
Sea A_n^k el número de formas de cubrir el tablero con *k* bloques, para $0 \le k \le q$.
Dada una de estas formas de cubrir el tablero, llamemos $B_1, ..., B_k$ los bloques ordenados de arriba hacia abajo, y sean a_0 el número de filas situadas encima de B_1, a_1 el número de filas entre B_1 y B_2 , a_2 el número de filas entre B_2 y $B_3, \ldots,$ a_k el número de filas debajo de B_k. Por ejemplo, en el dibujo anterior, $k = 2, a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 0$. Entonces se tiene que $a_0 + ... + a_k = n - (p+1)k$.
Recíprocamente, a una $(k+1)$-upla de enteros no negativos $(a_0, ..., a_k)$ tal que $a_0 + ... + a_k = n - (p+1)k$, le podemos asociar una única forma de cubrir el tablero con *k* bloques, colocando de forma alternada y da arriba hacia abajo a_0 fichas horizontales, un

bloque, a_1 fichas horizontales, un bloque, …, a_{k-1} fichas horizontales, un bloque, a_k fichas horizontales.
Por tanto, A_n^k es el número de $(k+1)$-uplas de enteros no negativos $(a_0,...,a_k)$ tales que $a_0+...+a_k = n-(p+1)k$, luego $A_n^k = \binom{n-pk}{k}$.

Deducimos que $S_n = A_n = \sum_{k=0}^{q} \binom{n-pk}{k}$.

Estudiemos finalmente $S_{pc} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor} \binom{p(c-k)}{k} \pmod{p}$.

Para ello, utilizamos el lema siguiente:
<u>Lema:</u> Para todo primo p y enteros a y b, se tiene

(i) $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$.

(ii) Si p no divide a b, entonces $p \mid \binom{pa}{b}$.

Si admitimos el lema,

$$S_{pc} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor} \binom{p(c-k)}{k} \equiv \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{1}{p}\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor \right\rfloor} \binom{c-pk}{k} \equiv k = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{c}{p+1} \right\rfloor} \binom{c-pk}{k} \equiv S_c \pmod{p},$$

que es lo que queríamos probar.

<u>Demostración del lema:</u>
(i)

$$\binom{pa}{pb} = \frac{\prod_{k=0}^{a-1} (pk+1)...(pk+p-1)}{\prod_{k=0}^{b-1} (pk+1)...(pk+p-1) \prod_{k=0}^{a-b-1} (pk+1)...(pk+p-1)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{a} (pk)}{\prod_{k=1}^{b} (pk) \prod_{k=1}^{a-b} (pk)}$$

$$\equiv \frac{((p-1)!)^a}{((p-1)!)^b ((p-1)!)^{a-b}} \cdot \binom{a}{b} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$$

(ii) Si n es el cociente de b dividido por p,

$$v_p\left(\binom{pa}{b}\right) = \sum_{k=n+1}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) = \sum_{k=n+2}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) + v_p(pa) > 0 \quad ,$$

puesto que $\sum_{k=n+2}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) \geq 0$.