XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Soluciones a los problemas propuestos

Problema 1.1. Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:

$$2009 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 - 7 \times 7 \times 7 - 7 \times 7, \qquad 2010 = 66 \times 6 \times 6 - 66 \times 6 + 6 \times 6 - 6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible $2011 = 1 + 1 + 1 + \ldots$.

Solución Problema 1.1 Si 2011 fuera expresable como sumas, restas y multiplicaciones de números con el mismo dígito a, como cada uno de estos números es divisible por a, se tiene que a es divisor de 2011. Ahora bien, 2011 es un número primo, por tanto $a = 1$.

Es sencillo observar que

$$\begin{aligned} 1000 = &\quad 1111 - 111 \\ 2 = &\quad 111 - 11 \times 11 + 11 + 1 \end{aligned}$$

Multiplicando estas dos igualdades se tiene:

$$\begin{aligned} &2000 = \\ &1111 \times 111 - 1111 \times 11 \times 11 + 1111 \times 11 + 1111 - 111 \times 111 + \\ &+111 \times 11 \times 11 - 111 \times 11 - 111 \end{aligned}$$

Compruébese que todos los sumandos son distintos entre sí y distintos a 11. Por tanto, sumando 11 al número anterior se tiene una solución.

Existen infinidad de maneras distintas:

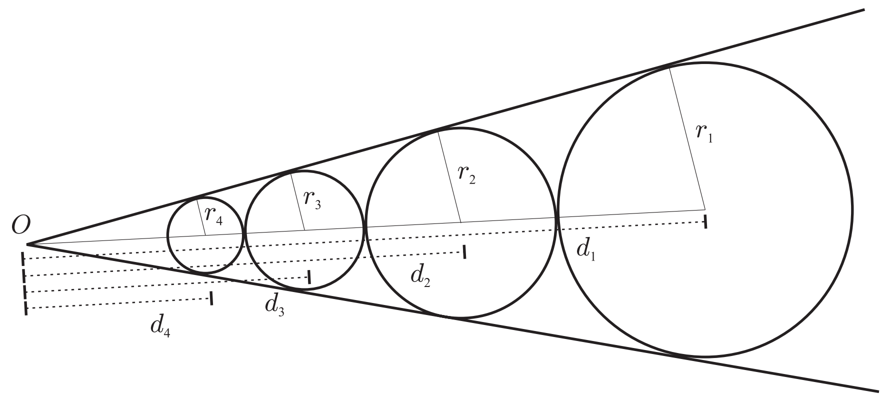
$$2011 = 1111 \times 1111 - 111 \times 11111 - 111 \times 111 + 111 \times 11 \times 11 - 111 + 11 + 1$$

o bien

$$2011 = 1111 \times 1111 - 111 \times 11111 + 1111 - 111 + 11$$

Problema 1.2. Dos semirrectas tienen su común origen en el punto O. Se considera una circunferencia C_1 tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia d_1 de O, y cuyo radio es r_1. Se construyen sucesivamente las circunferencias C_n, de modo que C_n es tangente a las semirrectas, tangente exterior a C_{n-1} y tal que la distancia de su centro a O, d_n, es menor que d_{n-1}, para $n > 1$. Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias C_n, para todo n, en función de r_1 y d_1.

Solución Problema 1.2 Es claro de la figura que, por el Teorema de Thales, $\dfrac{r_n}{d_n} = \dfrac{r_1}{d_1}$ para todo n. Llamaremos



a este valor α. Además, se tiene que:

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{d_{n+1} + r_{n+1} + r_n}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{d_{n+1}} =$$

$$1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}} \frac{r_{n+1}}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}} \alpha.$$

Despejando se tiene $\dfrac{r_n}{r_{n+1}} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$, que es constante, luego los radios de las circunferencias forman una progresión geométrica de razón

$$r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1 - r_1/d_1}{1 + r_1/d_1} = \frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1}.$$

La suma de áreas buscada es

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \pi \frac{r_1^2}{1 - (\frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1})^2} = \frac{\pi}{4} \frac{r_1 \, (d_1 + r_1)^2}{d_1}.$$

Problema 1.3. Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?

Solución Problema 1.3 Si $n \geq 1$,

$$2009^n = (2000 + 9)^n = 9^n + 2000k$$

Por tanto las 3 últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}
&9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \binom{2011}{1} (-1)^{2010} \cdot 10 + \\
&+ \binom{2011}{2} (-1)^{2009} \cdot 10^2 + K \cdot 10^3 = -1 + 20110 - 2011 \cdot 1005 \cdot 100 + K \cdot 10^3 \\
&= -202085391 + K \cdot 10^3 = 609 + K' \cdot 10^3
\end{aligned}$$

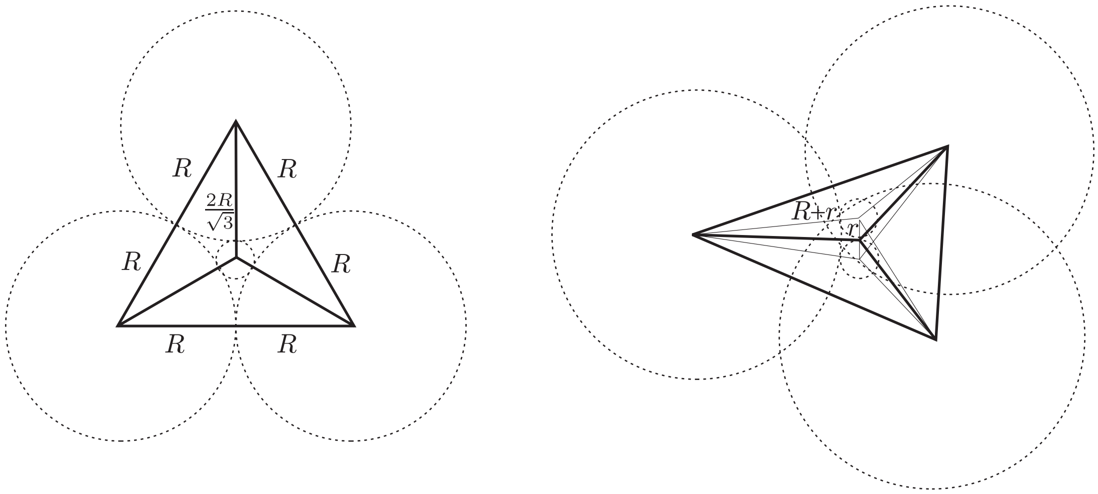
Luego la respuesta es que 9 es la última cifra y le precede un único cero.

Problema 1.4. Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2\,b^2 + 3\,c^2$.

Solución Problema 1.4 Sea (a, b, c) una solución distinta de $(0, 0, 0)$, con $|a| + |b| + |c|$ mínimo. Tomando la igualdad módulo 3, tenemos $a^2 = 2b^2$ módulo 3. Como a^2 y b^2 sólo pueden ser congruentes con 1 o 0, se deduce que a y b son múltiplos de 3. Por tanto, $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3. Pero entonces, $(a/3, b/3, c/3)$ sería otra solución con $|a/3|+|b/3|+|c/3| < |a|+|b|+|c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

Problema 1.5. Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre R y r.

Solución Problema 1.5 Los centros de las tres esferas de radio R, O_1, O_2 y O_3, son los vértices de un triángulo



equilátero de lado $2R$. El punto de tangencia, T, de las dos esferas de radio r es el centro de ese triángulo y, por tanto, dista de los vértices dos tercios de la altura. La altura del triángulo es $h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$ y dos tercios de h es $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Si llamamos Q_1, Q_2 a los centros de las circunferencias de radio r, el triángulo O_1TQ_1 es rectángulo en T y sus lados son: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, r y $R+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 = (R+r)^2$$

y simplificando resulta: $R = 6r$.

Problema 1.6. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales excluido el cero y por $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales incluido el cero. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ que sean crecientes, es decir $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$, y tales que $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Solución Problema 1.6

- La función nula: $f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ verifica evidentemente lo anterior.
- Sea f una función no nula verificando las condiciones del enunciado. Entonces
  1. f no es constante, ni está acotada. En efecto, si $f(a) \neq 0$ entonces $f(a^n) = nf(a) > f(a)$ para cada n.
  2. f no es estrictamente creciente:
     - Si $f(2) = f(3)$ ya está.
     - Si $f(2) = a < b = f(3)$, entonces $2^b \neq 3^a$, pero $f(2^b) = ab = f(3^a)$.

De los dos puntos anteriores se deduce que es posible encontrar un número natural m tal que $k = f(m) = f(m+1) < f(m+2)$. Entonces

$$f[(m+1)^2] = 2k < f[m(m+2)]$$

Sin embargo $m(m+2) < (m+1)^2$, contradiciendo el carácter creciente de f.

En consecuencia la única función que verifica las condiciones del enunciado es la función nula.

■

Problema 2.1. Se considera el polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, cuyas raíces x_1 y x_2 se suponen distintas. Justifica que para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es suficiente que $a^2 + 3ac - b^2 = 0$. ¿Es también necesaria esta condición?

Solución Problema 2.1

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = a(x_1^6 - x_2^6) + b(x_1^3 - x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)[a(x_1^3 + x_2^3) + b]$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$

Por tanto

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)\left[a\left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right) + b\right] = \frac{b}{a^2}(x_1^3 - x_2^3)(-b^2 + 3ac + a^2)$$

Para que esta diferencia se anule, es suficiente que $-b^2 + 3ac + a^2 = 0$.

La condición no es necesaria. El producto se anula al anularse cualquier factor; el primer paréntesis no se anula, pero b puede anularse. De modo que otra condición suficiente para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es que $b = 0$.

Problema 2.2. Denotemos $\mathbf{N}^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ con las siguientes propiedades:

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbf{N}$.

Solución Problema 2.2 De las propiedades se deduce:

1. Haciendo $m = 1$, sigue de ii) $f(1) = 0$.
2. Por inducción finita sobre ii) sigue que $f(n^k) = kf(n), \ \forall n, k \in \mathbf{N}$.

Veamos si puede construirse una función creciente con estas propiedades. Ya que $f(4) = f(2^2) = 2\,f(2) = 4$, resulta que los únicos posibles valores de $f(3)$ si f es creciente, son $f(3) = 2,\ f(3) = 3,\ f(3) = 4$.

1. Si $f(3) = 2$, nos encontramos con que $2^3 < 3^2$, pero $f(2^3) = 6 > f(3^2) = 4$.
2. Si $f(3) = 3$, nos encontramos con que $2^{11} < 3^7$, pero $f(2^{11}) = 22 > f(3^7) = 21$.
3. Si $f(3) = 4$, nos encontramos con que $3^3 < 2^5$, pero $f(3^3) = 12 > f(2^5) = 10$.

Así pues, no hay ninguna función creciente con estas propiedades.

Problema 2.3. Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de C y sin solapamientos tantos cuadrados como sea posible de área 2, con los lados paralelos a los lados de C, se puede cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.

Solución Problema 2.3 Sea l el lado del cuadrado y n el número máximo de cuadrados de área 2 que caben en cada lado del cuadrado. l y n son enteros. Las condiciones del problema son que

$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{8}{9}l^2 \\ l^2 < 2(n+1)^2 \end{cases}$$

Poniendo $n = 2n'$ y $l = 3l'$ (que tienen que ser enteros, por la primera ecuación anterior), resulta sustituyendo que

$$\begin{cases} n' = l' \\ n'^2 - 8n' - 2 < 0 \end{cases}$$

de modo que $1 \leq n' \leq 8$. Las posibles soluciones son, pues,

$$\begin{cases} n' = l' = 1 & n = 2 & l = 3 \\ n' = l' = 2 & n = 4 & l = 6 \\ n' = l' = 3 & n = 6 & l = 9 \\ n' = l' = 4 & n = 8 & l = 12 \\ n' = l' = 5 & n = 10 & l = 15 \\ n' = l' = 6 & n = 12 & l = 18 \\ n' = l' = 7 & n = 14 & l = 21 \\ n' = l' = 8 & n = 16 & l = 24 \end{cases}$$

Problema 2.4. Consideremos un alfabeto de n letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

Solución Problema 2.4 Observemos que una palabra contiene un palíndromo de longitud impar si y sólo si contiene un palíndromo de longitud 3. Por tanto, sólo hay que contar las palabras que no contengan un palíndromo de longitud 3.

Podemos enumerar todas las palabras pedidas, de la siguiente manera: para la primera letra tenemos n posibilidades. Para la segunda letra también tenemos n posibilidades. La tercera letra puede ser cualquiera menos la letra que está en la posición 1. Por tanto, para la tercera letra tenemos $n-1$ posibilidades. La cuarta letra puede ser cualquiera menos la que está en la posición 2, por lo que también tenemos $n-1$ posibilidades. Así llegaremos hasta la k-ésima letra, que puede ser cualquiera menos la que está en la posición $k-2$, y por tanto también hay $n-1$ posibilidades. Por tanto, en total hay $n^2(n-1)^{k-2}$ palabras que no contienen un palíndromo de longitud impar.

Problema 2.5. Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \end{array}$$

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es $(10, 9)$. Cuando un número N, en la posición (n, m), verifica que $N = n + m$ diremos que N *está bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados en la tabla y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

Solución Problema 2.5

En cada fila hay dos números más que en la anterior: en la primera fila hay 1 número, en la segunda fila hay 3, en la tercera fila hay 5,así sucesivamente, en la n-ésima fila hay $2n-1$ elementos. Por tanto, el último elemento de la fila n-ésima es: $1+3+5+\cdot+(2n-1)=n^2$, por la suma de los elementos de una progresión aritmética. El primer elemento de la fila $(n+1)$-ésima es n^2+1 y el último $(n+1)^2$.

Supongamos que N está bien colocado.

- Si N esté en la mitad derecha de la tabla triangular, incluida la "altura", su posición es (m^2+1, n^2), luego $N = n^2+m^2+1$. Tomando restos módulo 4, como $n^2 \equiv 0,1 \pmod 4$, $m^2 \equiv 0,1 \pmod 4$, se tiene que $N \equiv 1,2,3 \pmod 4$. Como $2^{2011} \equiv 0 \pmod 4$, se llega a una contradicción.

- Si N está en la mitad izquierda de la tabla, excluida la "altura", su posición es (m^2+1, n^2+1), luego $N = n^2+m^2+2$. Razonando como antes, solo en los casos de m y n impares puede conseguirse que $m^2 \equiv 1$, $n^2 \equiv 1$ y así $N \equiv 0$. En ese caso $m = 2p+1$, $n = 2q+1$, luego

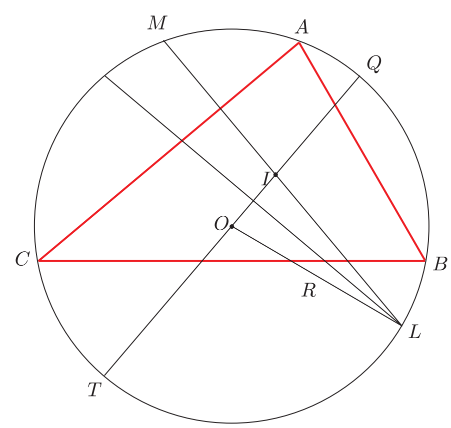
$$N = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 + 2 = 4(p^2+p+q^2+q+1)$$

  Si $N = 2^{2011}$, se tiene $2^{2009} = p^2+p+q^2+q+1$. Como p^2+p y q^2+q son siempre números pares, encontramos una contradicción.

Problema 2.6.

En un triángulo llamaremos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en L, y LI vuelve a cortarla en M, demuestra que $IM = 2r$.

Solución Problema 2.6



Por el Teorema de Euler, $(OI)^2 = R^2 - 2rR$. Sean T y Q los puntos de corte de la recta OI con la circunferencia circunscrita. Entonces tenemos

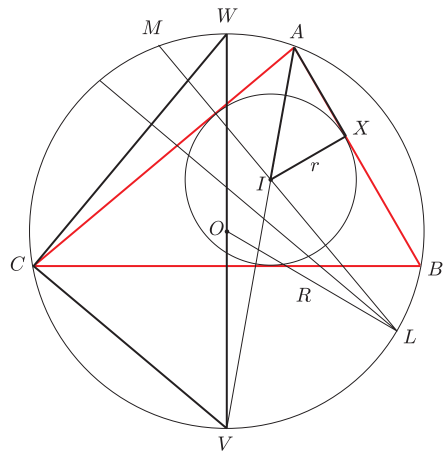
$$IL \cdot IM = IT \cdot IQ.$$

Por simetría, $IL = OL = R$. Por otra parte, $IT = OI + OT = OI + R$, y también tenemos $IQ = OQ - OI = R - OI$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$R \cdot IM = (R+OI)(R-OI) = R^2 - (OI)^2 = 2rR,$$

de donde $IM = 2r$.

Otra solución del Problema 2.6. Llamemos α, β y γ los ángulos del triángulo ABC.



Sea V el otro punto de corte de la recta AI con la circunferencia circunscrita. Considerando las cuerdas AV y LM, que se cortan en I, se tiene $AI \cdot IV = LI \cdot IM$. Como $LI = LO = R$ por simetría, esto significa que $AI \cdot IV = IM \cdot R$. Por tanto, probar que $IM = 2r$ es equivalente a probar que $AI \cdot IV = 2rR$.

Tracemos el triángulo AIX, rectángulo en X, donde el ángulo en A es $\alpha/2$. Sea ahora W el punto diametralmente opuesto a V en la circunferencia circunscrita. Observemos que el triángulo WVC es rectángulo (al ser WV un diámetro de la circunferencia circunscrita, que contiene a C). Además al ser ángulos inscritos que determinan la misma cuerda, se tiene $\angle CWV = \angle CAV = \alpha/2$.

Por tanto, los triángulos rectángulos AIX y WVC son semejantes. Esto implica que $WV/VC = AI/IX$, esto es $2R/VC = AI/r$, de donde $2rR = AI \cdot VC$. Por tanto, debemos probar que $AI \cdot IV = AI \cdot VC$. Es decir, debemos probar que $IV = VC$.

Para ello consideremos el triángulo CVI. Su ángulo en C es igual a $\gamma/2 + \angle VCB = \gamma/2 + \angle VAB = \gamma/2 + \alpha/2$. Por otra parte, su ángulo en I es igual a $\angle CIV = 180° - \angle CIA = 180° - (180° - \alpha/2 - \gamma/2) = \alpha/2 + \gamma/2$. Este triángulo es pues isósceles, con lo que se tiene $VC = VI$, como queríamos demostrar.

Problema 3.1. Sean n_1, n_2 dos números naturales. Demuestra que la suma $\sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$ es un número entero o un número irracional.

Solución Problema 3.1 Si se pone $x = \sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$, se obtiene

$$x - \sqrt{n_1} = \sqrt[3]{n_2} \Longrightarrow n_2 = (x - \sqrt{n_1})^3 \Longrightarrow (3x^2 + n_1)\sqrt{n_1} = x^3 + 3n_1x - n_2 \Longrightarrow$$

$$(3x^2 + n_1)^2\, n_1 = (x^3 + 3n_1x - n_2)^2 \Longrightarrow x^6 - 3n_1x^4 - 2n_2x^3 + 3n_1^2x^2 - 6n_1n_2x + n_2^2 - n_1^3 = 0$$

Esta ecuación tiene sólo soluciones enteras o irracionales por ser 1 el coeficiente principal.

Problema 3.2. Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.

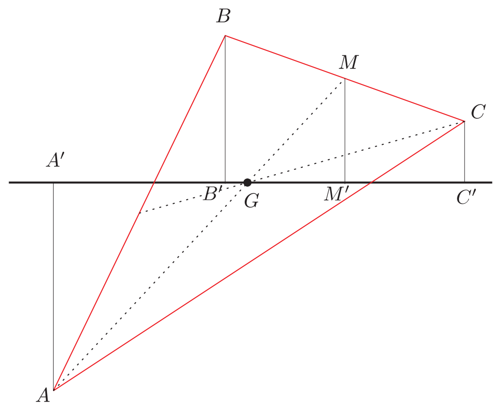
Solución Problema 3.2

El triángulo GMM' es semejante a GAA' con razón de semejanza 2 (pues $AG = 2GM$). Por tanto, $AA' = 2MM'$.

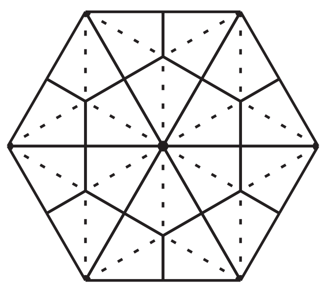
Por otro lado, MM' es la paralela media del trapecio $BB'C'C$, de donde $MM' = (BB' + CC')/2$.

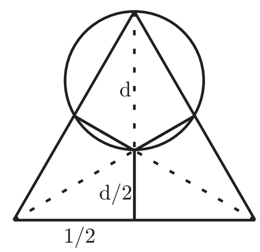
En consecuencia: $AA' = 2MM' = BB' + CC'$.

Problema 3.3. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$.



Solución Problema 3.3 Dividamos el hexágono regular en 6 triángulos equiláteros iguales. Cada uno de ellos, si trazamos sus alturas, quedará dividido en 6 triángulos rectángulos. Uniendo estos triángulos rectángulos, dos a dos, por sus hipotenusas, habremos dividido el hexágono original en 18 regiones iguales.





Como tenemos 19 puntos, en alguna de estas regiones debe haber al menos 2 puntos. Para ver que estos dos puntos están como mucho a distancia $\sqrt{3}/3$, sólo hay que probar que dicha región está inscrita en una circunferencia de diámetro $\sqrt{3}/3$.

Pero la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es la que tiene como diámetro la hipotenusa, por tanto, nuestra región está inscrita en una circunferencia de diámetro d, donde d es la hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos rectángulos que la componen. Sólo hay que demostrar que $d \leq \sqrt{3}/3$. Para ello basta observar que la altura del triángulo equilátero de lado 1 es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$, y de aquí se tiene, por cómo divide el baricentro a una mediana, $\sqrt{3}/2 = d + d/2$. De donde $d = \sqrt{3}/3$.

Problema 3.4. Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

Solución Problema 3.4

Supongamos que $a = b$. Como a y b no tienen factores en común, debe ser $a = b = 1$. Como c divide a $a + b = 2$, esto da lugar a las ternas $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$.

Supongamos ahora que $a < b$. Como c divide a $a + b < c + c = 2c$, debe ser $a + b = c$. Pero entonces, como b divide a $a + c = 2a + b$, se sigue que b divide a $2a$, y como b no tiene factores comunes con a, b divide a 2. b no puede ser 1 ya que es mayor que a, luego la única terna posible en este caso es $(1, 2, 3)$.

Problema 3.5. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 2^y - 1 &= 2^x + 2^{-x}, \\ 3 \cdot 2^z - 1 &= 2^y + 2^{-y}, \\ 3 \cdot 2^x - 1 &= 2^z + 2^{-z}. \end{aligned}\right\}$$

Solución Problema 3.5 Haciendo la sustitución $2^x = a, 2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$ y se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}), \\ c = \frac{1}{3}(b + 1 + \frac{1}{b}), \\ a = \frac{1}{3}(c + 1 + \frac{1}{c}). \end{array}\right\}$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \geq \sqrt[3]{a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

y por tanto $b \geq 1/b$. Análogamente, $a \geq 1,\ a \geq 1/a$, y $c \geq 1,\ c \geq 1/c$. Teniendo en cuenta lo anterior, de la primera ecuación resulta que

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \leq \frac{1}{3}(a + a + a) = a$$

y de las otras dos que $c \leq b$ y $a \leq c$. Combinando las desigualdades anteriores, se obtiene $a \leq c \leq b \leq a$. Es decir, $a = b = c$.

Ahora tenemos

$$a = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = (a - 1)(2a + 1) = 0$$

que tiene por solución $a = 1$ y $a = -1/2$. Como sólo nos vale la solución positiva, tenemos que $a = b = c = 1$ y por tanto, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es la única terna solución del sistema.

Otra solución Problema 3.5. Haciendo la sustitución $2^x = a$, $2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$, y se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 3b - 1 = a + \frac{1}{a}, \\ 3c - 1 = b + \frac{1}{b}, \\ 3a - 1 = c + \frac{1}{c}. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a(3b - 1) = a^2 + 1, \\ b(3c - 1) = b^2 + 1, \\ c(3a - 1) = c^2 + 1. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3ab = a^2 + a + 1, \\ 3bc = b^2 + b + 1, \\ 3ca = c^2 + c + 1. \end{array}\right\}$$

Observemos que como $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$, se tiene $a^2 + 1 \geq 2a$, luego la primera ecuación implica $3ab \geq 3a$, de donde $b \geq 1$. Análogamente, de las otras dos ecuaciones se tiene $c \geq 1$ y $a \geq 1$.

Supongamos que a es el menor de los tres valores a, b, c (los otros casos son análogos). En particular, $0 < a \leq b$. Entonces se tiene $a^2 + a + 1 = 3ab \geq 3a^2$, luego $2a^2 \leq a + 1$. La función $2x^2$ sólo puede ser menor o igual que la función $x + 1$ si $x \leq 1$. Por tanto $a \leq 1$, y así se tiene $a = 1$.

La primera ecuación queda entonces $3b = 3$, luego $b = 1$. Y de la segunda ecuación se sigue que $c = 1$. Por tanto, $2^x = 2^y = 2^z = 1$, y así la única terna posible es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Problema 3.6. En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos A, B, C y D, el país A tiene el doble de representantes que el B, el triple que el C, y el cuádruple que el D. Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los países debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?

Solución Problema 3.6 La respuesta es 25. Veamos la demostración. Sean a, b, c y d el número de representantes de cada país. Como a debe ser múltiplo de 3 y de 4, también debe ser múltiplo de 12. Por tanto, existe un número k tal que $a = 12k$, luego $b = 6k$, $c = 4k$ y $d = 3k$. El número total de representantes es entonces $25k$.

Si llamamos M al número de mesas, y P al número de personas en cada mesa, tenemos $MP = 25k$.

Sea a_i el número de representantes del país A en la mesa número i. La condición impuesta nos dice que $a_i < \frac{P}{2}$, o bien $2a_i < P$. Como a_i es un número entero, esto implica que $2a_i \leq P - 1$. Sumando todos los a_i, se obtiene:

$$24k = 2a = 2a_1 + \cdots + 2a_M \leq M(P - 1) = 25k - M.$$

De aquí se deduce $M \leq k$. Por tanto, como $MP = 25k$, deducimos finalmente que $P \geq 25$.

Sólo queda demostrar que, en efecto, se puede conseguir una configuración en la que haya 25 personas en cada mesa. Pero esto se consigue, por ejemplo, con una sola mesa en la que haya 12 representantes del país A, 6 del B, 4 del C y 3 del D.