OLIMPÍADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA. GRANADA.

PRIMERA SESIÓN. 16 de enero de 2009

Enunciado 1.

(1) Disponemos de dos jarras, una con 10 cl. de agua y la otra con la misma cantidad de aceite. Se toma una cucharada de la primera jarra, la de agua, y se mezcla con el aceite de la segunda. A continuación se toma una cucharada de esta segunda jarra y se mezcla con el agua de la primera.

¿Hay más (o menos) agua en la primera jarra que aceite en la segunda?

(2) Suponemos ahora que tenemos tres jarras, la primera con 10 cl. de agua, la segunda con 10 cl. de aceite y la tercera con 10 cl. de vino. Tomamos una cucharada de la primera jarra y la mezclamos con el aceite de la segunda, a continuación tomamos una cucharada de la segunda jarra y la mezclamos con el vino de la tercera y finalmente tomamos una cucharada de la tercera jarra y la mezclamos con el agua de la primera.

En ese momento, ¿de cuál de los tres líquidos hay menos en su propia jarra?

Solución.
(1) Hay la misma cantidad de agua en la primera jarra que aceite en la segunda, la razón es que si en la primera hay $10-x$ cl., entonces, como la cantidad inicial de agua y aceite es la misma, debe haber en la segunda jarra $10-x$ cl. de aceite.

(2) En este caso utilizamos la siguiente notación para representar cada una de las jarras y las cantidades de los correspondientes líquidos que hay en cada una de ellas. La situación inicial es:

$$\{\{10,0,0\},\{0,10,0\},\{0,0,10\}\}.$$

Si llamamos x al contenido de la cuchara, tras el primer trasvase la situación es:

$$\{\{10-x,0,0\},\{x,10,0\},\{0,0,10\}\}.$$

Al realizar el segundo trasvase la situación es:

$$\{\{10-x,0,0\},\{x-\frac{x^2}{10+x},10-\frac{10x}{10+x},0\},\{\frac{x^2}{10+x},\frac{10x}{10+x},10\}\}$$

Y al realizar el tercer trasvase es:

$$\{\{10 - x + \frac{x^3}{(10+x)^2}, \frac{10x^2}{(10+x)^2}, \frac{10x}{10+x}\}, \{x - \frac{x^2}{10+x}, 10 - \frac{10x}{10+x}, 0\},$$
$$\{-\frac{x^3}{(10+x)^2} + \frac{x^2}{10+x}, -\frac{10x^2}{(10+x)^2} + \frac{10x}{10+x}, 10 - \frac{10x}{10+x}\}\}$$

Tenemos entonces que comparar las tres cantidades:

$$\text{agua: } 10 - x + \frac{x^3}{(10+x)^2}; \quad \text{aceite: } 10 - \frac{10x}{10+x}; \quad \text{vino: } 10 - \frac{10x}{10+x}.$$

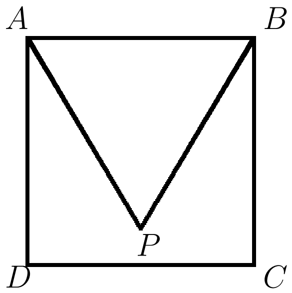
Restando 10 y multiplicando por $10 + x$ tenemos que comparar:

$$\text{agua: } -x(10+x) + \frac{x^3}{(10+x)}; \quad \text{aceite: } -10x; \quad \text{vino: } -10x.$$

Como $-x(10+x) + \frac{x^3}{(10+x)} = -10x\frac{10+2x}{10+x} < -10x$, tenemos que la cantidad que queda de agua en la primera jarra es menor que las cantidades de aceite y vino en las jarras segunda y tercera, respectivamente.

Enunciado 2.

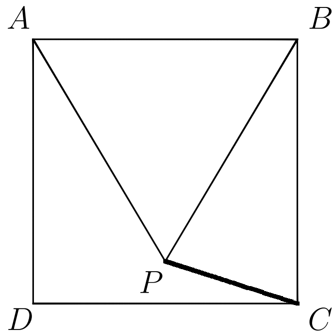
Se considera un cuadrado $ABCD$ y un punto P interior al cuadrado de forma que ABP es un triángulo equilátero.



Calcula el valor del ángulo $\widehat{PCD}$.

Solución.

Considerar el siguiente dibujo:



El triángulo BPC es isósceles y por lo tanto los ángulos $\widehat{BPC}$ y $\widehat{PCB}$ son iguales. Además el ángulo $\widehat{PBC}$ mide 30 grados. Así pues tenemos: $\widehat{BPC} = \widehat{PCB} = 75$, y en consecuencia $\widehat{PCD} = 15$.

Enunciado 3.

Supongamos que a, b son enteros positivos con $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 1$.

(1) Determinar el valor de $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$ en términos de a y b.

(2) Determinar el valor de $\mathrm{mcd}\{a + b, a^3 + b^3\}$ en términos de a y b.

Solución.
(1). Observa que $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, entonces si un primo p divide a $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$, resulta que p tiene que dividir a $2ab$.
Si p divide a a, como p divide a $a + b$, resulta que p divide a b y por tanto a $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 1$, lo que es una contradicción. En consecuencia p no divide a a y p no divide a b. Por lo tanto los únicos primos que pueden dividir a $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$ son los que dividen a 2, por lo tanto 1 ó 2.
Tenemos que 2 divide a $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$ si $a + b$ es par, esto es, si a y b son ambos impares. En este caso $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\} = 2$.
Tenemos que 2 no divide a $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\}$ si $a + b$ es impar, esto es, si uno es par y el otro impar. En este caso $\mathrm{mcd}\{a + b, a^2 + b^2\} = 1$.
(2). Observa que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, luego se tiene $\mathrm{mcd}\{a + b, a^3 + b^3\} = a + b$ para cualquier valor de a y b.

OLIMPÍADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA. GRANADA.

SEGUNDA SESIÓN. 16 de enero de 2009

<u>Enunciado 4</u>.

Se considera un cuadrado 4×4. En cada una de las casillas colocamos un número entero mayor o igual que uno con las siguientes condiciones:

(1) Ningún número se repite en filas o columnas;

(2) Ningún número se repite en la misma diagonal, sea ésta principal o secundaria.

¿Cuál es el menor valor de la suma de estos dieciséis números?
<u>Solución</u>.

Primero vamos a señalar que vamos a entender por diagonales principales y secundarias:
Las diagonales principales son las que se señalan en el siguiente dibujo.

D			
	D		
		D	
			D

			D
		D	
	D		
D			

Ejemplos de diagonales secundarias son:

	S		
S			
	S		
		S	

		S	
	S		
S			
	S		

Es claro que hay más ejemplos de diagonales secundarias que no hemos descrito en esta hoja.
Vamos a proceder a la resolución del problema.
Al considerar un cuadrado 4×4, si colocamos un número N en la casilla $(1, 1)$, tenemos sólo seis posibles casillas más en donde colocar de nuevo este número. Observa la Figura 1. Por lo tanto sólo podemos colocar un máximo de tres números iguales a N. Una posible disposición aparece en la Figura 2.

N			
		$\square$	$\square$
	$\square$		$\square$
	$\square$	$\square$	

(Figura 1)

N			
		N	$\square$
	$\square$		$\square$
	N	$\square$	

(Figura 2)

Si colocamos un número P en la casilla $(1, 2)$, podemos además colocarlo en seis casillas. Observa la Figura 3. En consecuencia podemos encontrar una configuración en la que coloquemos tres números iguales a P y nunca cuatro. Posibles configuraciones aparecen en las Figura 3a, 3b y 3c.

	P		
			$\square$
$\square$		$\square$	
$\square$			$\square$

(Figura 3)

	P		
			$\square$
P		$\square$	
$\square$			P

(Figura 3a)

	P		
			P
$\square$		$\square$	
P			$\square$

(Figura 3b)

	P		
			$\square$
$\square$		P	
P			$\square$

(Figura 3c)

Podemos hacer este proceso con los números $P = 1$ y 2 y $N = 3$. De esta forma tenemos ocupadas nueve casillas, y nos quedan que rellenar otras siete. Ver Figura 4.

3	1	2	
		3	
1			2
2	3		1

(Figura 4)

3	1	2	$\boxtimes$
$\boxtimes$		3	
1		$\boxtimes$	2
2	3		1

(Figura 5)

3	1	2	$\boxtimes$
$\boxtimes$	$\boxminus$	3	$\boxplus$
1	$\boxplus$	$\boxtimes$	2
2	3	$\boxminus$	1

(Figura 6)

Ya no hay forma de rellenar tres casillas con un mismo número. Ver Figura 5.

Por lo tanto las cuatro que quedan deben de rellenarse con dos números distintos, que aquí hemos señalado por $\boxplus$ y $\boxminus$. Ver Figura 6.

Asignamos los valores $\boxtimes = 4$, $\boxminus = 5$ y $\boxplus = 6$. Sumando resulta

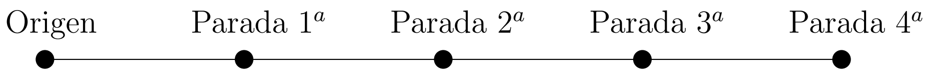
$$3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 = 52.$$

Si disminuimos el número de unos o doses tenemos que aumentar el número de los restantes, por lo que el valor de la suma aumenta. Para comprobar que ésta es la solución óptima basta recordar que es la única posible en la que podemos colocar cuatro trios de números iguales, los cuales deben ser 1, 2, 3 y 4 para hacer mínimo el valor de la suma.

Es interesante razonar que necesariamente tenemos que utilizar seis números para completar el cuadrado siguiendo las instrucciones del juego.

Enunciado 5.

El autobús urbano de la línea 22 hace el recorrido que se indica en el gráfico.



Si en origen hay 15 pasajeros, durante el recorrido no sube ninguno más y el autobús debe quedar vacío en la parada 4^a.

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que se bajen todos los pasajeros en la misma parada?

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que en cada parada se baje, al menos, un pasajero?

Solución.
Asignamos a cada pasajero un número de 1 a 4, que indica la parada en la que este pasajero se baja. Cada una de las posibles distribuciones consiste en hacer una lista de quince dígitos del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. El número de tales listas es 4^{15}.
(1). Los casos favorables, todos los pasajeros se bajan en la misma parada son cuatro, y corresponden a las listas que las que todos los números son iguales. La probabilidad pedida es: $\dfrac{4}{4^{15}} = \dfrac{1}{4^{14}}$.
(2). Los casos favorables corresponden a las listas en las que aparecen todos los números 1,2,3 y 4. Para esto vamos a calcular las listas en las que solo aparecen uno, dos o tres números.

(2.1) Con solo un dígito tenemos $\binom{4}{1}1^{15} = 4 \times 1^{15} = 4$.

(2.2) Con dos dígitos tenemos: $\binom{4}{2}2^{15} = \frac{4\times3}{2} \times 2^{15} = 3 \times 2^{16}$. De estos tenemos que quitar los que tiene un solo dígito. Para cada elección de dos dígitos tenemos exactamente dos listas en las que todos los dígitos son iguales. El número a restar es:

$$\binom{4}{2}\left(2^{15} - 2\right) = 12 \times (2^{14} - 1).$$

(2.3) Con tres dígitos tenemos: $\binom{4}{3}3^{15} = \frac{4\times3\times2}{3\times2} \times 3^{15} = 4 \times 3^{15}$.De estos tenemos que quitar los que tiene solo dos dígitos y los que tienen solo un dígito. Para cada elección de tres dígitos las listas que tienen solo dos dígitos distintos son: $\binom{3}{2}(2^{15}-2) = 6 \times (2^{14}-1)$; y las que tienen solo un dígito son $\binom{3}{1}1^{15} = 3$. El número a restar es:

$$\binom{4}{3}\left(3^{15} - 6 \times (2^{14}-1) - 3\right) = 12 \times \left(3^{14} - 2^{15} + 1\right).$$

El número de casos favorables es:

$$4^{15} - \left(4 + 12 \times (2^{14}-1) + 12 \times (3^{14} - 2^{15} + 1)\right) = 4 \times \left(4^{14} + 3 \times 2^{14} - 3^{15} - 1\right).$$

La probabilidad pedida es:

$$\frac{4 \times (4^{14} + 3 \times 2^{14} - 3^{15} - 1)}{4^{15}} = \frac{4^{14} + 3 \times 2^{14} - 3^{15} - 1}{4^{14}}.$$

Enunciado 6.

Determinar todas las funciones estrictamente crecientes, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que verifican:

(I) $f(0) = 2$,

(II) $f(n) + f(f(n)) = 2n + 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.
Si $n = 0$ tenemos:

$$f(0) + ff(0) = 2 \times 0 + 6,$$
$$2 + f(2) = 6$$

Por lo tanto $f(2) = 4$. En general podemos afirmar que $f(2t) = 2t + 2$.
Vamos a probar esto por inducción sobre t. Si $t = 0$, el resultado es cierto; supongamos que es cierto para $t = s$ y vamos a ver que también lo es para $t = s + 1$. Por la hipótesis tenemos $f(2s) = 2(s + 1)$, entonces aplicando la relación original para $n = 2s$ se tiene:

$$f(2s) + ff(2s) = 2(2s) + 6,$$
$$2(s + 1) + f(2(s + 1)) = 4s + 6,$$
$$f(2(s + 1)) = 4s + 6 - 2(s + 1) = 2s + 4 = 2(s + 1) + 2.$$

Falta ver qué ocurre con los enteros positivos impares. Si n es impar, $n = 2t + 1$, se tiene: $2t < 2t + 1 < 2t + 2$. Por el crecimiento estricto de f, ha de ser $f(2t) < f(2t + 1) < f(2t + 2)$. Y por lo demostrado anteriormente para los pares, resulta que $2t + 2 < f(2t + 1) < (2t + 2) + 2 = 2t + 4$; luego, $f(2t + 1) = 2t + 3 = (2t + 1) + 2$.
Tenemos entonces que sólo hay una función que verifica las condiciones del enunciado y ésta es: $f(n) = n + 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.