Mañana del viernes 19 de enero de 2007

Problema I-1.

Un poliedro regular convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuantos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

Solución: Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores.

Puesto que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, debe haber

$$V = 4 \cdot 12 = 48 \text{ vértices.}$$

(Obtendríamos el mismo resultado contando con hexágonos o con octógonos).

Puesto que de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay $A = 3V/2 = 72$ aristas.

Como que cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono tiene 9 y cada octógono tiene 20, resulta $D = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 20 = 216$ diagonales sobre las caras.

Finalmente, el número pedido I será igual al total de pares de segmentos que se pueden formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras.

$$I = \binom{48}{2} - A - D = 840.$$

Problema I-2.

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{array}\right\}$$

Solución. Dado que $3t^2 + 6t + 4 \geq 0$ para todo $t \in R$, entonces cualquier solución (x_0, y_0, z_0) del sistema verifica que $x_0^3 > 0, y_0^3 > 0, z_0^3 > 0$. Es decir, x_0, y_0, z_0 son números positivos.

Además, sumando las tres ecuaciones resulta

$$\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) + \left(y^3 - 6y^2 + 12y - 8\right) + \left(z^3 - 6z^2 + 12z - 8\right) = 0$$

o equivalentemente,

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0 \quad (1)$$

Ahora distinguiremos dos casos: (a) $x_0 \geq 2$ y (b) $0 < x_0 < 2$.

(a) Si $x_0 \geq 2$, de la última ecuación obtenemos

$$x_0^3 = 6z_0^3 - 12z_0 + 8 \geq 8 \Leftrightarrow 6z_0(z_0 - 2) \geq 0$$

lo cual solo puede ocurrir si $z_0 = 0$ (imposible) o $z_0 \geq 2$.

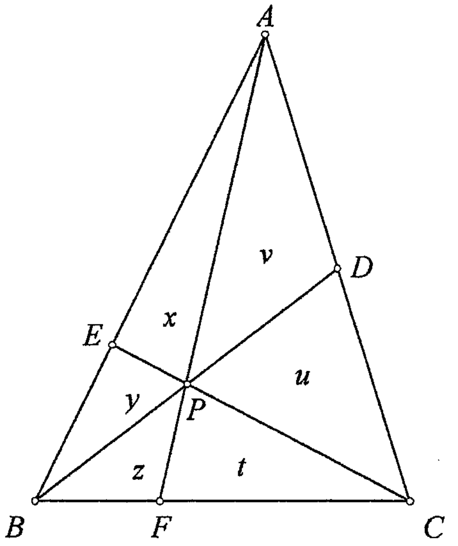
Análogamente, resulta que $y_0 \geq 2$ y de (1) se deduce que $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 2$ es la única solución en este caso.

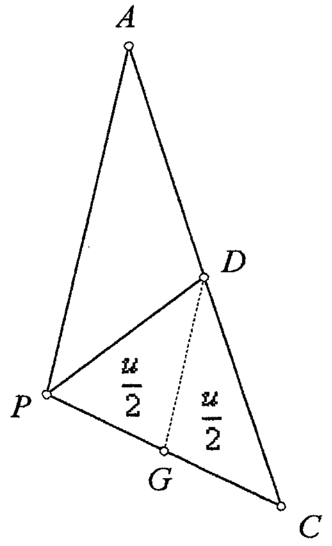
(b) $0 < x_0 < 2$, entonces tenemos

$$x_0^3 = 6z_0^3 - 12z_0 + 8 < 8 \Leftrightarrow 6z_0(z_0 - 2) < 0$$

lo cual solo es posible, al ser $z_0 > 0$, si $z_0 < 2$. Análogamente se obtiene que $y_0 < 2$ lo que contradice la igualdad (1). En consecuencia, la única solución real del sistema es (2, 2, 2) y hemos terminado.

Problema I-3.
Sea *ABC* un triangulo y *D*, *E* y *F* puntos situados en los segmentos *AC*, *BA* y *CB* respectivamente, de forma que los segmentos *AF*, *BD*, *CE* concurren en un punto *P* interior al triángulo. Sabemos que $BP = 6$, $PD = 6$, $PC = 9$, $PE = 3$ y $AF = 20$. Hallar el área del triángulo *ABC*.
Solución.





Utilizamos varias veces que las áreas de dos triángulos de la misma base son proporcionales a las alturas y que las de dos triángulos de la misma altura son proporcionales a las bases.
Las letras *x*, *y*, *z*, . . . de la figura de la izquierda indican las áreas de los triángulos pequeños donde están situadas. Indicaremos por *S* el área total del triangulo *ABC* pedida. Tenemos

$$\frac{u+v}{S} = \frac{PD}{BD} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x+y}{S} = \frac{EP}{EC} = \frac{1}{4}.$$

También se cumple

$$\frac{PF}{AF} = \frac{PF}{20} = \frac{z+t}{S} = \frac{S-(x+y)-(u+v)}{S} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

de donde $PF = 5$ y $AP = 15$.
Comparando las áreas de los triángulos *ABD* y *BDC* y de *PDA* y *PDC* resulta

$$\frac{CD}{AD} = \frac{x+y+v}{z+t+u} = \frac{u}{v} = \frac{x+y}{z+t} = \frac{{}^{1}\!/_{4}S}{{}^{1}\!/_{4}S} = 1, \text{ de donde CD = AD.}$$

Trazamos ahora una paralela *DG* a *AF* (figura de la derecha). Los triángulos *CAP* y *CDG* son semejantes con razón 1/2. Por tanto $DG = \frac{1}{2}AP = \frac{15}{2}$ y $PG = GC = \frac{9}{2}$.

Puesto que $PD^2 + PG^2 = DG^2$ resulta que el triangulo *DPG* es rectángulo con ángulo recto en *P* indicado en la figura. Su área es $u/2 = 27/2$ de donde $u = 27$ y $S = 4u = 108$.

Tarde del viernes 19 de enero de 2007

Problema I – 4 y II-1.

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Solución.

Un tetraedro regular de lado c tiene volumen $\frac{\sqrt{2}}{12}c^3$ y cada una de sus caras tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Supongamos (sin perder generalidad) que un cubo de lado 1 se puede obtener uniendo N tetraedros regulares de lado c. Entonces se satisface

$$Nc^3\frac{\sqrt{2}}{12}=1$$

Por otro lado, cada cara del cubo estará formada por un número entero, digamos k, de caras de tetraedros. Como que el área de una cara del cubo es 1, tenemos

$$kc^2\frac{\sqrt{3}}{4}=1$$

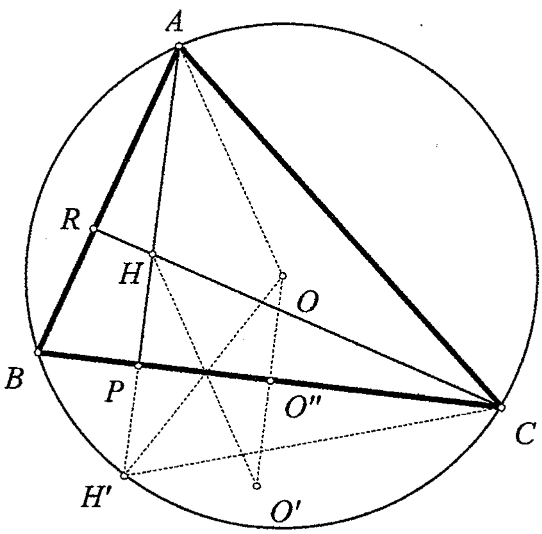
Dividiendo la primera igualdad por la segunda podemos despejar c y en particular deducimos que c^2 es un número racional. Pero esto es incompatible con la segunda de las ecuaciones.

Problema I-5 y II-2.

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Solución.

Sean el triángulo $\triangle ABC$, su ortocentro H y su circuncentro O. Sean H' y O' sus simétricos respecto del lado BC.



i) Puesto que los triángulos BPA y BCR son rectángulos y comparten el ángulo $\angle CBA$, son semejantes y, por lo tanto $\angle BAH' = \angle HCP$.

Pero por ser H' simétrico de H,

$$\angle HCP = \angle PCH' \text{ y } \angle BAH' = \angle BCH'$$

Cosa que prueba que H' está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

ii) Nuevamente por ser H' simétrico de H, $\angle OH'H = \angle H'HO'$ y, por ser HH' y OO' dos paralelas cortadas por la secante HO', $\angle H'HO' = \angle OO'H$, obteniendo

$$\angle OH'H = \angle OO'H$$

iii) Pero *OA* y *OH'* sor radios de la circunferencia circunscrita y, en consecuencia, el triángulo $H'OH$ es isósceles, por lo que $\angle OH'H = \angle HAO$ y, finalmente,

$$\angle OO'H = \angle HAO$$

y el cuadrilátero *AHO'O* es un paralelogramo. Resulta:

$$AH = OO' = 2OO''.$$

Problema I – 6 y II-3.

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

Solución. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} = 3^{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z\right)+1} = 3^{\frac{1}{3}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]} \geq 3^0 = 1$$

La igualdad se verifica cuando $x = y = z = 1$. Por tanto, la única solución es $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y hemos terminado.

Mañana del sábado 20 de enero de 2007

Problema II- 4 y III-1.

Para cuatro puntos no coplanarios, un plano ecualizador es un plano tal que las distancias respectivas de cada uno de los puntos a ese plano son todas iguales. Dado un conjunto de cuatro puntos no coplanarios, ¿cuántos planos ecualizadores hay?

Solución:

Sean A, *B*, *C* y *D* cuatro puntos no coplanarios. Sea *p* un plano ecualizador de esos puntos y examinemos las posibilidades:

i) Si *A*, *B*, *C* y *D* están en el mismo semiespacio en que *p* divide al espacio, está claro que uno de los dos planos paralelos a *p*, a la misma distancia que están los cuatro puntos de *p*, contiene a todos esos puntos, contra la hipótesis de no coplanariedad. Por lo tanto, los puntos no pueden estar todos en el mismo lado del plano ecualizador.

ii) Sea *A* en un lado del plano y *B*, *C* y *D* en el otro. Es obvio que *p* es paralelo al plano *q* determinado por los puntos *B*, *C* y *D* y corta al segmento que proyecta A sobre el plano q en su punto medio. Por lo tanto, en esas condiciones, el plano ecualizador existe y es único. Ahora, tomando cada vez uno cualquiera de los otros puntos como "punto aislado" en un lado del plano, obtenemos otros tantos planos ecualizadores. En consecuencia, con un punto en un lado y los otros tres en el otro, hay exactamente cuatro planos ecualizadores.

iii) Sean ahora *A* y *B* en un lado del plano *p* y *C* y *D* en el otro. Consideremos el plano *r* que contiene a *A* y *B* y es paralelo al segmento *CD* y el plano s que contiene a *C* y *D* y es paralelo al segmento *AB*.

Entonces, los planos *r* y *s* son paralelos y el plano ecualizador *p* es el plano equidistante de los planos *r* y s, que también está determinado de forma única. Dado el punto *A*, la elección de su "pareja" en uno de los lados de *p* determina otros tantos planos ecualizadores, tres en total.

Así, pues, para cuatro puntos no coplanarios dados, hay exactamente siete planos ecualizadores.

Problema II-5 y III-2.
Encontrar todas las soluciones enteras posibles, x e y, de la ecuación:

$$p(x+y)=xy$$

siendo p un cierto número primo.
Solución:
De $p(x+y)=xy$ y del hecho que p es un número primo se deduce que p divide a x o a y. Puesto que, en el enunciado, los papeles de x e y son completamente simétricos, se puede, sin pérdida de generalidad, suponer que p divide a x y que, en consecuencia, hay un número k tal que

$$x=kp$$

Entonces, la ecuación propuesta queda

$$p(kp+y)=kpy$$

o sea,

$$kp+y=ky$$

Ahora, unas cuantas manipulaciones:

$$kp+y=ky \Rightarrow 0=ky-kp-y=k(y-p)-y \Rightarrow p=k(y-p)-y+p=(k-1)(y-p)$$

Ponen de manifiesto que $k-1$ es un divisor de p y, dado que p es primo, hay cuatro posibilidades:
i) Que $k-1=-p$. Obtenemos que $k=1-p$ y, por lo tanto,

$$x=(1-p)p, \quad y=p-1$$

ii) Que $k-1=-1$. Resulta que $k=0$, o sea,

$$x=0, \quad y=0$$

iii) Que $k-1=1$. Entonces $k=p+1$ y resulta:

$$x=p(p+1), \quad y=p+1$$

que son todas las posibles soluciones de la ecuación propuesta.

Problema II-6 y III-3.
Sea $a_n=1+n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n=\text{mcd}(a_{n+1},a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.
Solución: δ_n divide a a_{n+1} y a a_n , y por tanto a su diferencia $b_n=a_{n+1}-a_n=3n^2+3n+1$.
También divide a $c_n=3a_n-nb_n=3-n-3n^2$ y a la suma $d_n=b_n+c_n=4+2n$. Pero entonces δ_n también divide a $e_n=2b_n-3nd_n=2-6n$. Finalmente, divide a $3d_n+e_n=14$.
Pero $b_n=3n^2+3n+1=3n(n+1)+1$ es un número impar, luego δ_n solamente puede ser 1 o 7. El máximo es 7 ya que mcd (53 + 1, 63 + 1) = 7.

Tarde del sábado 20 de enero de 2007

Problema III-4.

Sean a, b, c, d números enteros positivos que satisfacen $ab = cd$. Demostrar que $a + b + c + d$ no es un número primo.

Solución:

Usando la hipótesis $ab = cd$ se escribe

$$a(a+b+c+d)=(a+c)(a+d)$$

de donde se obtiene que si $a + b + c + d$ fuese primo debería dividir a $a + c$ o $a + d$ que son menores que él.

Problema III-5.

Dado un entero $k \geq 1$, definimos a_k como el número entero que en base diez se escribe

$$a_k = \overbrace{11\ldots1}^{k}$$

(es decir, un 1 repetido k veces). Demostrar que a_k divide a a_l si y sólo si k divide a l.

Solución:

Si $l = dk + r$ donde r es más pequeño que k, entonces

$$a_l = a_k 10^r \left(1+10^k+10^{2k}+\ldots+10^{(d-1)k}\right)+a_r$$

(Pondremos $a_0 = 0$.) Si k divide a l será $r = 0$ y es evidente que $a_r = 0$ de forma que a_k divide a a_l. Recíprocamente, si a_k divide a a_l entonces debe ser $a_r = 0$ y por tanto $r = 0$.

Problema III- 6.

Sea P un punto interior a un triángulo ABC. Por P se trazan paralelas KP, MP y NP a los lados AB, AC y BC que dividen el triángulo inicial en tres triángulos y tres paralelogramos. Sean S_1, S_2, S_3 las áreas de los nuevos triángulos y S el área del triángulo ABC. Probar que

$$S \leq 3(S_1+S_2+S_3)$$

Solución. Sea L el punto de intersección de KP con el lado BC y sean $h_i, i=1,2,3$ las alturas de los nuevos triángulos y h la altura de ABC. Dado que cada uno de los triángulos son semejantes con ABC, se tiene

$$\frac{S_1}{S}=\frac{KP\cdot h_1}{AB\cdot h}=\frac{KP^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_2}{S}=\frac{MN\cdot h_2}{AB\cdot h}=\frac{MN^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_1}{S}=\frac{PL\cdot h_3}{AB\cdot h}=\frac{PL^2}{AB^2}$$

De donde resulta

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{KP+MN+PL}{AB}=1$$

y

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática resulta

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\leq 3\sqrt{\frac{S_1+S_2+S_3}{3}}$$

con lo que

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2\leq 3\left(S_1+S_2+S_3\right)$$

Finalmente, obsérvese que la igualdad tiene lugar cuando P coincide con el baricentro G del triángulo.