XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase local

Primera sesión

Mañana del viernes 19 de enero de 2007

Problema 1.

Un poliedro regular convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuantos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

Problema 2.

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y^3-6x^2+12x-8=0 \\ z^3-6y^2+12y-8=0 \\ x^3-6z^2+12z-8=0 \end{aligned}\right\}$$

Problema 3.

Sea ABC un triangulo y D, E y F puntos situados en los segmentos AC, BA y CB respectivamente, de forma que los segmentos AF, BD, CE concurren en un punto P interior al triángulo. Sabemos que $BP = 6$, $PD = 6$, $PC = 9$, $PE = 3$ y $AF = 20$. Hallar el área del triángulo ABC.

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase local

Segunda sesión

Tarde del viernes 19 de enero de 2007

Problema 4.

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Problema 5.

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Problema 6.

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y}+3^{y^2-y-z}+3^{z^2-z-x}=1$$

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase local

Segunda sesión

Mañana del sábado 20 de enero de 2007

Problema 4.

Para cuatro puntos no coplanarios, un plano ecualizador es un plano tal que las distancias respectivas de cada uno de los puntos a ese plano son todas iguales. Dado un conjunto de cuatro puntos no coplanarios, ¿cuántos planos ecualizadores hay?

Problema 5.

Encontrar todas las soluciones enteras posibles, x e y, de la ecuación:

$$p(x+y)=xy$$

siendo p un cierto número primo.

Problema 6.

Sea $a_n = 1+n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n = \text{mcd}(a_{n+1}, a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase local

Segunda sesión

Tarde del sábado 20 de enero de 2007

Problema 4.

Sean a, b, c, d números enteros positivos que satisfacen $ab = cd$. Demostrar que $a + b + c + d$ no es un número primo.

Problema 5.

Dado un entero $k \geq 1$, definimos a_k como el número entero que en base diez se escribe

$$a_k = \overbrace{11\ldots1}^{k}$$

(es decir, un 1 repetido k veces). Demostrar que a_k divide a a_l si y sólo si k divide a l.

Problema 6.

Sea P un punto interior a un triángulo ABC. Por P se trazan paralelas KP, MP y NP a los lados AB, AC y BC que dividen el triángulo inicial en tres triángulos y tres paralelogramos. Sean S_1, S_2, S_3 las áreas de los nuevos triángulos y S el área del triángulo ABC. Probar que

$$S \leq 3\left(S_1 + S_2 + S_3\right)$$

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.