TANDA I (En sesiones de viernes, mañana y tarde)

Problema I - 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC, con el ángulo recto en C, y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo l con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo m con centro en B es tangente al arco l en un punto de la hipotenusa AB.

Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

Solución.

Se r el radio del arco l. El área del sector determinado así en el triángulo es 1/8 del área del círculo. Por lo tanto,

$$\frac{1}{8}\pi r^2 = 1 \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

El radio del círculo m es

$$r_1 = |AB| - r = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

El área de la región buscada es entonces

$$S = 1 - \frac{1}{8}\pi \cdot 8\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi .$$

Problema I - 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	*Raíces*
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
L	L
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \mathrm{L} + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \mathrm{L} + b_n}{n} = 0 .$$

Solución.

Por hipótesis, se tiene

$$\begin{gathered} x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = 0 \\ \mathrm{L\ L\ L\ L\ L\ L\ L} \\ x_0^2 + a_nx_0 + b_n = 0 \end{gathered}$$

Sumando estas igualdades, resulta

$$nx_0^2 + (a_1 + \mathrm{L} + a_n)x_0 + (b_1 + \mathrm{L} + b_n) = 0$$

es decir, x_0 es una raíz de la ecuación propuesta.

Por lo tanto, el discriminante de esta ecuación es no negativo y debe tener otra raíz a la que llamaremos $\overline{x}$. Por las fórmulas que relacionan los coeficientes y las raíces, se tiene

$$\begin{aligned} &x_0 + x_1 = -a_1 \\ &\ldots\ldots \\ &x_0 + x_n = -a_n \\ &x_0 + \overline{x} = -\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \end{aligned}$$

Multiplicando la última igualdad por n y restando de las anteriores, resulta

$$n\overline{x} - \left(x_1 + \ldots + x_n\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Problema I - 3

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

Solución

Sea O el centro común de los círculos mencionados en el enunciado. Por la hipótesis, BO y CO son bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$ (O es el centro del círculo inscrito en BCD).

Además $AO = BO = CO$ (O es el centro del círculo circunscrito a ABC).

De aquí, si llamamos $\alpha = \angle ABO$, entonces tenemos

$$\angle OAB = \alpha, \angle OCB = \angle OBC = \alpha, \angle BCD = 2\alpha \quad (CD \text{ es bisectriz})$$

De aquí, $\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$

Como la suma de los ángulos del triángulo ABC es 180°, resulta $\alpha = 18°$, y $\angle A = \angle C = 72^0, \angle B = 36^0$.

Problema I - 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Solución

Escribamos

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r},$$

donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, p_i es primo para cada i, y $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Las condiciones del problema son entonces equivalentes a

i) para cada i $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq 5\alpha_i$ y

ii) existe i tal que $\alpha_i > \frac{6}{5}\beta_i$.

Es claro entonces que basta considerar un solo primo, así que encontraremos α_1 y β_1 que satisfagan i) y ii).
Esto puede hacerse fácilmente por tanteo, por ejemplo $\alpha_1 = 4$ y $\beta_1 = 3$ sirven (también sirven $\alpha_1 = 13$ y $\beta_1 = 10$).
Ahora tomamos para p_1 cualquier primo, por ejemplo 2.
Una pareja que satisface las condiciones pedidas es $a = 2^4$, $b = 2^3$.

Problema I - 5
Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.
Solución.
Se tiene

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3.$$

Entonces

$$3 \cdot 9 = 27 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18.$$

Entonces

$$7 \cdot 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5} \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

Problema I - 6
Se considera la inecuación

$$|x - 1| < ax,$$

donde a es un parámetro real.
a) Discutir la inecuación según los valores de a.
b) Caracterizar los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.
Solución.
a) En principio distinguiremos dos casos, según que $x \geq 1$ ó $x < 1$.
Caso I: $x \geq 1$. La desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$x - 1 < ax \Leftrightarrow (1 - a)x < 1.$$

Subcaso I.1: Supongamos $1 - a > 0$, es decir, $a < 1$. Entonces $x < \frac{1}{1-a}$, $\frac{1}{1-a} > 1 \Leftrightarrow a > 0$. Por lo tanto, es decir, x_0 es una raíz de la ecuación propuesta.

Por lo tanto, el discriminante de esta ecuación es no negativo y debe tener otra raíz a la que llamaremos $\overline{x}$. Por las fórmulas que relacionan los coeficientes y las raíces, se tiene

$$\begin{aligned} & x_0 + x_1 = -a_1 \\ & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ & x_0 + x_n = -a_n \\ & x_0 + \overline{x} = -\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

Multiplicando la última igualdad por n y restando de las anteriores, resulta

$$n\overline{x} - \left(x_1 + \cdots + x_n\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Problema I - 3

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

Solución

Sea O el centro común de los círculos mencionados en el enunciado. Por la hipótesis, BO y CO son bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$ (O es el centro del círculo inscrito en BCD).

Además $AO = BO = CO$ (O es el centro del círculo circunscrito a ABC).

De aquí, si llamamos $\alpha = \angle ABO$, entonces tenemos

$$\angle OAB = \alpha, \angle OCB = \angle OBC = \alpha, \angle BCD = 2\alpha \quad (CD \text{ es bisectriz})$$

De aquí, $\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$

Como la suma de los ángulos del triángulo ABC es 180°, resulta $\alpha = 18°$, y $\angle A = \angle C = 72^0, \angle B = 36^0$.

Problema I - 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Solución

Escribamos

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r},$$

donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, p_i es primo para cada i, y $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Las condiciones del problema son entonces equivalentes a

i) para cada i $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq 5\alpha_i$ y

ii) existe i tal que $\alpha_i > \frac{6}{5}\beta_i$.