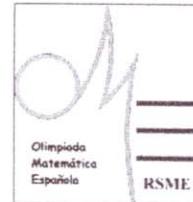




# XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA



Fase local 2006

Primera sesión (Tanda 1)

Viernes 20 de enero

### Problema 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles  $ABC$ , con el ángulo recto en  $C$ , y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo  $l$  con centro  $A$  divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo  $m$  con centro en  $B$  es tangente al arco  $l$  en un punto de la hipotenusa  $AB$ .

Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

### Problema 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las  $n$  ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

<i>Ecuación</i>	<i>Raíces</i>
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	$x_0, x_1$
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	$x_0, x_2$
L	L
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	$x_0, x_n$

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0.$$

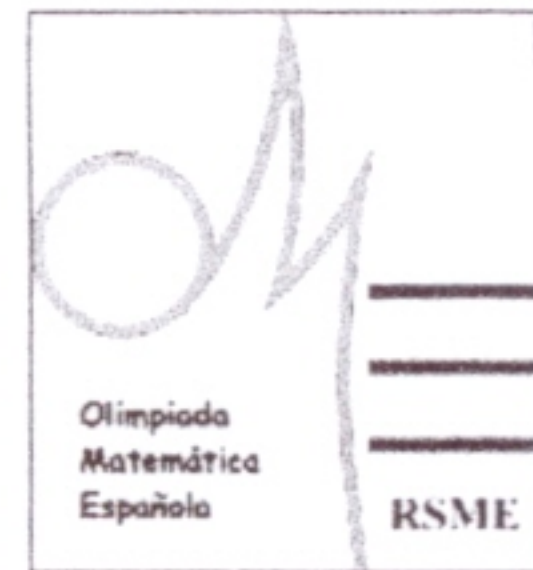
### Problema 3

En el triángulo  $ABC$  se traza la bisectriz interior  $CD$ . Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo  $BCD$  coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo  $ABC$ . Calcular los ángulos del triángulo  $ABC$ .

No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.



## XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA



### Fase local 2005 (Tanda 1) Segunda sesión Viernes 20 de enero

#### Problema 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos  $a$  y  $b$ , tales que

$b^2$  sea múltiplo de  $a$ ,  
 $a^3$  sea múltiplo de  $b^2$ ,  
 $b^4$  sea múltiplo de  $a^3$ ,  
 $a^5$  sea múltiplo de  $b^4$ ,  
pero  $b^6$  no sea múltiplo de  $a^5$ .

#### Problema 5

Un número positivo  $x$  verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.

#### Problema 6

Se considera la inecuación

$$|x-1| < ax,$$

donde  $a$  es un parámetro real.

- Discutir la inecuación según los valores de  $a$ .
- Caracterizar los valores de  $a$  para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.