



Año 2000.  
Año Mundial de las Matemáticas



REAL SOCIEDAD  
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática  
Española



## XXXVI Olimpiada Matemática Española

### *Fase local*

### **Primera Sesión (Granada, 21 de enero de 2000)**

#### **Problema 1.**

Considérese la sucesión definida como  $a_1 = 3$ , y  $a_{n+1} = a_n + a_n^2$ .  
Determinense las dos últimas cifras de  $a_{2000}$ .

#### **Problema 2.**

Sea  $P$  un punto del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ . La paralela por  $P$  a  $AB$  corta al lado  $AC$  en el punto  $Q$  y la paralela por  $P$  a  $AC$  corta al lado  $AB$  en el punto  $R$ . La razón entre las áreas de los triángulos  $RBP$  y  $QPC$  es  $k^2$ .  
Determinense la razón entre las áreas de los triángulos  $ARQ$  y  $ABC$ .

#### **Problema 3.**

¿Cuántos números, comprendidos entre 1.000 y 9.999, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es mayor o igual que el producto de los mismos?  
¿Para cuántos de ellos se verifica la igualdad?

#### **Nota:**

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.



Año 2000.  
Año Mundial de las Matemáticas



REAL SOCIEDAD  
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática  
Española



## XXXVI Olimpiada Matemática Española

### *Fase local*

### Segunda Sesión (Granada, 22 de enero de 2000)

#### Problema 4.

Se consideran las funciones reales de variable real  $f(x)$  de la forma:  $f(x) = ax+b$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales.

¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  se verifica  $f^{2000}(x) = x$  para todo número real  $x$ .

[Nota: Se define  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = f(f(f(x)))$ , y en general,  $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\dots f(x)\dots))$   $n$  veces]

#### Problema 5.

En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 € cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 € cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

#### Problema 6.

Se sabe que el polinomio  $p(x) = x^3 - x + k$  tiene tres raíces que son números enteros.

Determinése el número  $k$ .

#### **Nota:**

- Todas las respuestas han de estar razonadas.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.
- Tiempo estimado: tres horas y media.