

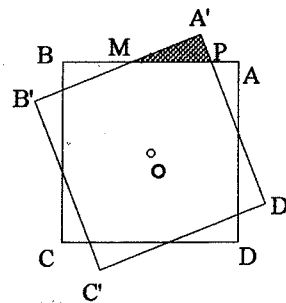
1.- Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

Solución 1.

Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90^\circ$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.

El área pedida $S(\alpha)$ sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA'M.

Llamando x al cateto PA' e y al cateto A'M, el área de cuatro triángulos vale $2xy$. Como el lado B'A' vale 1, tenemos:



$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

pero $x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha$, $y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha$, y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2} (1 + \cos \alpha + \sin \alpha) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$$

sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Solución 2.

El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura OPM.

Tomando como base $b = MP$, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale $\frac{1}{2}$.

En el triángulo PA'M se tiene:

$MA' = b \cos \alpha$, $PA' = b \sin \alpha$; pero $BM = MA'$ y $PA = PA'$, además:

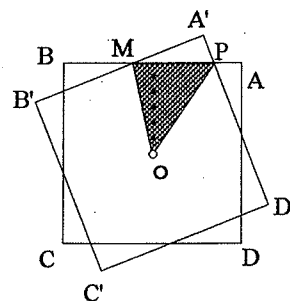
$$BM + MP + PA = 1 \Leftrightarrow b \cos \alpha + b + b \sin \alpha = 1,$$

de donde

$$b = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$



2.- Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución:

Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.

Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \leq s \leq 21 \quad (1)$$

Si $n = xyzt$, tenemos:

$$\begin{aligned} 1000x + 100y + 10z + t &= s^3 & (2) \\ x + y + z + t &= s \end{aligned}$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \quad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s - 1) s (s + 1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9:

$$16 \cdot 17 \cdot 18; \quad 17 \cdot 18 \cdot 19 \quad \text{y} \quad 18 \cdot 19 \cdot 20$$

sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1°

$$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$$

resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$

2°

$$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$$

de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5832$

3°

$$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$$

resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son

4913 y 5832

3.- Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Solución:

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que:

$\angle ADC = \angle BCM = \angle BAC$ (la primera igualdad por ser AC y CM paralelas y la segunda por ser $\angle BCM$ ángulo semiinscrita) y el ángulo $\angle ACD$ es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \quad (1)$$

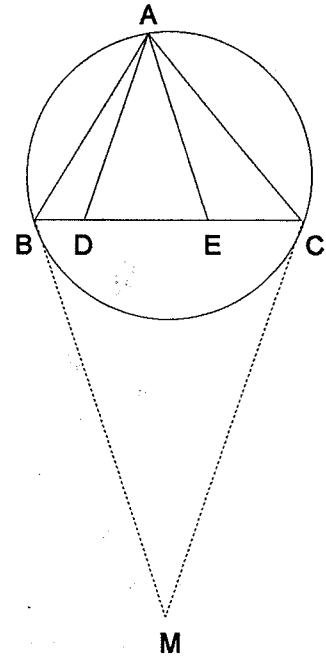
De modo análogo los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABE$ son semejantes pues:

$\angle AEB = \angle EBM = \angle BAC$ y el ángulo $\angle ABE$ es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 \quad (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.



4.- Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

Solución.

Sean α, β, γ los tres ángulos y supongamos $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Si fuera $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$, tendría que ser $\alpha < \frac{\pi}{4}$ y entonces $\text{tg } \alpha$ no es entero.

Si $\text{tg } \alpha > 1$, entonces $\alpha \geq \text{arc tg } 2 > \text{arc tg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, imposible porque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Por tanto $\text{tg } \alpha = 1$ y $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, con lo que:

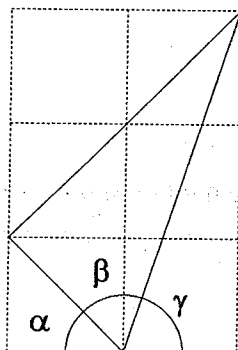
$$\text{tg}(\beta + \gamma) = -1 = \frac{\text{tg}\beta + \text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}\beta \text{tg}\gamma}$$

relación que operada se convierte en:

$$(\text{tg } \beta - 1)(\text{tg } \gamma - 1) = 2$$

de donde, por ser enteros positivos, se sigue $\text{tg } \beta = 2$ y $\text{tg } \gamma = 3$.

Existe una visualización "sin palabras" de la solución: $\text{arc tg } 1 + \text{arc tg } 2 + \text{arc tg } 3 = \pi$.



5.- Hallar todas las funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2 f(n)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Solución:

Supongamos $f(1) = b$. Entonces, $f(1 + b) = 2b$, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 + 1) < \dots < f(1 + b) = 2b = b + b.$$

y resulta que $f(1), f(2), \dots, f(1 + b)$ son $b + 1$ naturales, distintos, el primero vale b y el último $2b$, por tanto han de ser consecutivos.

resulta entonces:

$$f(1) = b, f(2) = 1 + b, f(3) = 2 + b, \dots, f(1 + b) = b + b.$$

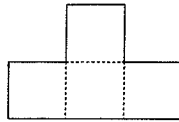
En general, para $n > 1$, si $f(n) = c$, $f(n + c) = 2c = c + c$ y resulta que:

$c = f(n) < f(n + 1) < \dots < f(n + c) = c + c$ y los números $f(n), f(n + 1), \dots, f(n + c)$ son consecutivos.

Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

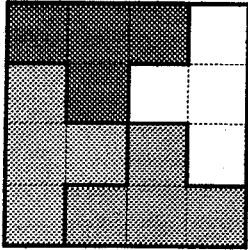
6.- Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo:



Solución:

Evidentemente n^2 debe ser múltiplo de 4 y, por tanto n necesariamente es par.

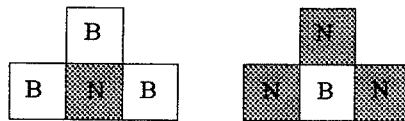
Si $n = 4k$ podemos dividir cualquier cuadrado $n \times n$ en k^2 sub-cuadrados del tipo 4×4 cada uno de los cuales lo podemos rellenar en la forma señalada en la figura de la izquierda.



Queda sólo considerar el caso $n = 4k + 2$. Veamos que en ese caso la respuesta es negativa.

Supongamos que fuera posible.

Si pintamos cada cuadradito alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza:



Sea a el número de piezas del tipo de las de la izquierda y b el número de piezas del tipo de las de la derecha.

Tenemos:

$$a + b = \frac{(4k + 2)^2}{4} = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

luego $a + b$ ha de ser impar.

Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene:

$3a + b = 3b + a \Leftrightarrow a = b$, de donde $a + b = 2a$ ha de ser par en contradicción con lo anterior.