Premio Euler - 2011/12
Soluciones

Problema 1. *Supongamos que* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *es una función tres veces derivable tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$. *Demostrar que*

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0.$$

Solución. El teorema de Taylor nos asegura que

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \tfrac{1}{2} f''(x) + \tfrac{1}{6} f'''(\xi_1(x)) \\ f(x-1) &= f(x) - f'(x) + \tfrac{1}{2} f''(x) - \tfrac{1}{6} f'''(\xi_2(x)) \end{aligned}$$

para cualquier $x > 1$, donde $x < \xi_1(x) < x+1$ y $x-1 < \xi_2(x) < x$. Si restamos ambas igualdades, podemos despejar $f'(x)$ como

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) + \frac{1}{12}\left(f'''(\xi_1(x)) - f'''(\xi_2(x))\right).$$

Evidentemente, el miembro de la derecha de la igualdad anterior tiene límite cero cuando $x \to \infty$, lo que prueba que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Si en cambio sumamos las dos igualdades, podemos despejar

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) - \frac{1}{6}\left(f'''(\xi_1(x)) - f'''(\xi_2(x))\right),$$

que también tiene límite cero cuando $x \to \infty$.

Problema 2. *Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes reales y sea B la matriz adjunta de A. Demostrar que*

$$\det(B) = \det(A)^{n-1}.$$

Solución. Es bien sabido que el producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta es igual al determinante multiplicado por la matriz identidad, esto es, $AB^\top = \det(A)I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n. En consecuencia, si tomamos determinantes en la expresión anterior, obtenemos que $\det(A)\det(B) = \det(A)^n$ y, por tanto, si $\det(A) \neq 0$, se sigue la fórmula del enunciado.

Resta probar que si $\det(A) = 0$, entonces $\det(B) = 0$. Dos formas distintas de salvar este último detalle son las siguientes:

a) Si $\det(A) = 0$, entonces una combinación lineal no trivial de filas de A es cero y es fácil ver que las correspondientes columnas de su adjunta satisfacen la misma combinación lineal.

b) Otra forma de probar esto último es darse cuenta de que $\det(A)\det(B) = \det(A)^n$ es una igualdad entre polinomios en las n^2 variables a_{ij}. Como el anillo de polinomios en n^2 indeterminadas es un dominio de integridad, puede simplificarse (como polinomios) el término $\det(A)$ en los dos miembros y tenemos finalmente que $\det(B) = \det(A)^{n-1}$.

Problema 3. *Determinar todas las ternas* (a, b, p) *de números enteros, siendo p un número primo, verificando la ecuación*

$$a^2b^2 = p^2(a-1)(b-1).$$

Solución. Los únicos casos en que la igualdad del enunciado es cero son $a = 0, b = 1$ y $a = 1, b = 0$, con p cualquier número primo. Ahora bien, en el caso en que no es cero, como a^2 no tiene factores en común con $a-1$ y b^2 no tiene factores en común con $b-1$, $a-1$ tiene que dividir a b^2 y $b-1$ tiene que dividir a a^2. Distingamos dos casos dependiendo de cómo se reparte el factor p^2 del miembro de la derecha:

a) Si $a^2 = p^2(b-1)$ y $b^2 = a-1$, entonces $a = b^2+1$ y $(b^2+1)^2 = p^2(b-1)$ (lo que implica que $b-1$ es un cuadrado perfecto) pero el único posible factor primo común a $(b^2+1)^2$ y $(b-1)$ es el 2 lo que implica que $b-1$ es una potencia par de dos, esto es $b = 2^{2n}+1$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, entonces $b = 2$ y $a = 5$, con lo que $p = 5$. Si $n > 0$, sustituyendo y simplificando en la igualdad $(b^2+1)^2 = p^2(b-1)$, tenemos que $2^{n-1}p = 2^{2n-1}+2^n+1$. Como el miembro de la derecha es impar, necesariamente $n = 1$, luego $b = 5$, $a = 26$ y $p = 13$.

   El caso en que $a^2 = b-1$ y $b^2 = p^2(a-1)$ se razona de forma similar y se llega a que $b = 5$, $a = 2$ y $p = 5$, o bien $b = 26$, $a = 5$ y $p = 13$..

b) Si $a^2 = p(b-1)$ y $b^2 = p(a-1)$, entonces a y b son múltiplos de p, lo que lleva a que $p(b-1) = a^2$ sea múltiplo de p^2 y, por tanto, $b-1$ es múltiplo de p, lo cual es una contradicción, ya que no sería primo relativo con b.

En cualquier caso, hemos probado que las únicas ternas de números que son solución del problema son las de la forma $(0, 1, p)$, $(1, 0, p)$ para p cualquier número primo y $(5, 2, 5)$, $(2, 5, 5)$, $(5, 26, 13)$ y $(26, 5, 13)$.

Problema 4. *Supongamos que dividimos un cuadrado de lado unidad en dos subconjuntos disjuntos. Demostrar que uno de los dos subconjuntos tiene diámetro mayor o igual que* $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Solución. Llamemos A, B, C y D a los vértices del cuadrado en este orden y consideremos M el punto medio de CD y N el punto medio de AD. Ahora bien, al dividir el cuadrado en dos subconjuntos uno de ellos tiene que contener a tres de los puntos del conjunto $\{A, B, C, M, N\}$. Es fácil darse cuenta de que tomando tres puntos de este conjunto siempre tenemos que coger dos que disten al menos $\sqrt{5}/2$, luego el subconjunto que los contenga tendrá diámetro al menos esta cantidad.

Nota. Es fácil darse cuenta de que esta cota no pude ser mejorada ya que puede dividirse el cuadrado en dos subconjuntos con diámetro exactamente $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Problema 5. *Consideremos números enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}$$

Demostrar que 2027 *divide a* p.

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear). Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \sum_{n=1}^{1351} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{1351} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{675} \frac{1}{2k} = \sum_{n=676}^{1351} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=676}^{1013} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2027-n} \right) = \sum_{n=676}^{1013} \frac{2027}{n(2027-n)}. \end{aligned}$$

Dado que todos los números que aparecen en el denominador, $676 \leq n \leq 1351$, son primos con 2027 (por ser menores que 2027, que es primo) se deduce que p es múltiplo de 2027.

Problema 6. *Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de aplicaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo. Dadas dos aplicaciones $f, g \in \mathcal{A}$, denotemos por $\delta(f, g)$ al número de aplicaciones $h \in \mathcal{A}$ tales que $h \circ f = g$. Calcular los posibles valores de $\delta(f, g)$ cuando f y g varían en $\mathcal{A}$.*

Solución (de Francisco Montiel). Para empezar, observemos que para que exista una tal h las aplicaciones f y g deben cumplir la siguiente condición de compatibilidad: Dados $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $f(i) = f(j) \Rightarrow g(i) = g(j)$, ya que $g(i) = h(f(i)) = h(f(j)) = g(j)$. Por tanto, si f y g no verifican esa condición, no existe tal h y $\delta(f, g) = 0$. Si f y g verifican la condición, entonces sí existe una aplicación h. Para definirla, sea $\{1, \ldots, n\} = \mathrm{Im(f)} \cup \mathrm{Im(f)}^{\mathrm{c}}$. Definimos h sobre el conjunto $\mathrm{Im(f)}$ como $h(f(i)) = g(i)$ y arbitrariamente en el complementario $\mathrm{Im(f)}^{\mathrm{c}}$. Esta aplicación está bien definida por la condición de compatibilidad.

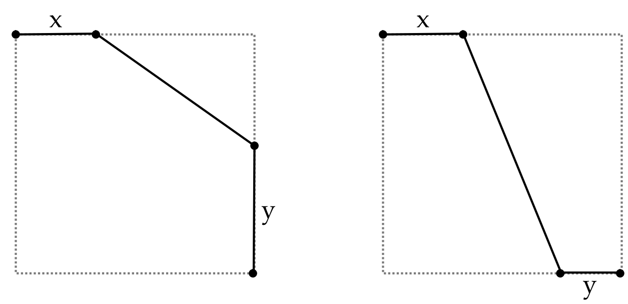
¿Y cuántas de esas aplicaciones puede haber? Sobre $\mathrm{Im(f)}$ la aplicación h está unívocamente definida, así que podrá variar en su complementario. Supongamos que el cardinal de $\mathrm{Im(f)}$ es $r \leq n$. Podremos definir tantas aplicaciones h como aplicaciones haya en un conjunto de $n - r$ elementos en otro de n elementos (la definición de h fuera de $\mathrm{Im(f)}$ no afecta a la condición del enunciado), es decir, n^{n-r}. Así pues, se tiene que $\delta(f, g)$ toma los valores 0 (si f y g no verifican la condición de compatibilidad), $1, n, n^2, \ldots, n^{n-1}$.

Para comprobar que efectivamente todos los valores se alcanzan, fijemos $0 < r \leq n$ y construyamos aplicaciones f y g que cumplan $\delta(f, g) = n^{n-r}$. Definimos $f(i) = i$ si $i \leq r$ y $f(i) = 1$ si $i > r$. Sea ahora la aplicación $g(i) = 1$ para todo i. Es claro que para que la aplicación h cumpla lo pedido en el enunciado basta con que $h(i) = 1$ si $i \leq r$, luego habrá tantas de tales aplicaciones h como aplicaciones se puedan definir del conjunto $\{r + 1, r + 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$, esto es, n^{n-r}, y ya hemos encontrado aplicaciones f y g tales que $\delta(f, g) = n^{n-r}$.

En resumen, los posibles valores de $\delta(f, g)$ son $0, 1, n, n^2, \ldots, n^{n-1}$.

Problema 7. *Pepe se encuentra en la esquina de una piscina cuadrada. Si la velocidad de Pepe andando es a y nadando es b (donde suponemos que $b < a$), ¿cuál es el camino que debe tomar Pepe (parte nadando y parte andando) para alcanzar la esquina opuesta en el menor tiempo posible (en función de a y b)?*

Solución. Observemos en primer lugar que los tramos en que va andando o nadando ha de hacerlo en línea recta. Descartando algunas posibilidades por simetría de la figura, es fácil darse cuenta de que las únicas trayectorias posibles para minimizar el tiempo son, en función de dos parámetros x e y, las que pueden verse en la imagen, donde el cuadrado en línea punteada representa el borde de la piscina.



Usando que el espacio recorrido es igual al producto de la velocidad por el tiempo empleado, y suponiendo sin perder generalidad que el lado de la piscina es de una unidad de longitud, es fácil ver que el tiempo empleado en el recorrido de la izquierda, $t_1(x, y)$, y el empleado en el de la derecha, $t_2(x, y)$, vienen dados por

$$t_1(x,y) = \frac{x+y}{a} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}}{b}$$
$$t_2(x,y) = \frac{x+y}{a} + \frac{\sqrt{(1-x-y)^2 + 1}}{b}$$

donde $x, y \in [0, 1]$. Una comparación directa nos dice que $t_1(x, y) \leq t_2(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$ y la igualdad se alcanza si, y sólo si, $x = 0$ ó $y = 0$. Esto nos dice que podemos descartar la situación de la derecha pues siempre da un tiempo mayor salvo en el caso $x = 0$ ó $y = 0$ en el que ambos recorridos coinciden.

Hemos reducido el problema a hallar el mínimo de la función $t_1(x, y)$ en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, que es compacto y, por tanto, la existencia del mínimo está asegurada.

- Para encontrar los posibles mínimos interiores, supongamos que (x_0, y_0) satisface $\nabla t_1(x_0, y_0) = 0$. Haciendo los cálculos, es fácil ver que esta condición es equivalente a las dos siguientes:

$$x_0 = y_0, \qquad \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\right)(1 - x_0)^2 = 0$$

  Esto nos lleva a decir que, si $a = b\sqrt{2}$, todos los puntos de la forma (x, x) son puntos críticos para t_1. De hecho, todos ellos son mínimos relativos como puede comprobarse fácilmente. Si $a \neq b\sqrt{2}$, entonces t_1 no tiene puntos críticos interiores.

- Para analizar los posibles extremos de t_1 en la frontera, simplemente tendremos que ver los casos $x = 0$ y $x = 1$ dada la simetría de t_1 en x e y.

- Si $x = 1$, entonces Pepe recorre todo el contorno de la piscina y, por tanto, lo mejor que puede hacer es ir andando, con un tiempo de $2/a$.
- Si $x = 0$, entonces bastará derivar la función $y \mapsto t_1(0, y)$, definida en el intervalo $[0, 1]$. Se comprueba que
    - Si $a > b\sqrt{2}$, entonces tiene su mínimo en

      $$y = c := 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \text{donde } t_1(0, c) = \frac{b + \sqrt{a^2 - b^2}}{ab} > \frac{2}{a},$$

      luego es conveniente andar por todo el perímetro de la piscina.
    - Si $a < b\sqrt{2}$, entonces tiene su mínimo en $y = 0$, donde

      $$t_1(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{b} < \frac{2}{a},$$

      luego la mejor opción es cruzar nadando en diagonal por la piscina.
    - Si $a = b\sqrt{2}$, entonces en cualquier camino del tipo $x = y$ se invierte el mismo tiempo, que es el mínimo y tenemos así discutidos todas las posibilidades

Problema 8. *¿Puede expresarse el intervalo* $(0,1)$ *como unión numerable de intervalos cerrados disjuntos?*

Solución (tomada del blog de Terence Tao). By mapping $(0,1)$ homeomorphically to the real line, it suffices to show that the real line $\mathbb{R}$ cannot be partitioned into closed intervals. As each interval is bounded, we need an infinite number of intervals $I_n = (a_n, b_n)$ to cover the real line. Now consider the set

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n, b_n\}$$

consisting of the endpoints of the intervals I_n. Clearly, E is countably infinite. Also, as the I_n form a disjoint cover of E, E is the complement of the open set $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ and is hence closed. Finally, we claim that E is perfect: that not only is E closed, but every point in E is a limit point in E. Indeed, if x lies in E, then x is either the left or right endpoint of an interval , but it is not both. If it is, say, the right-endpoint of an interval, then by approaching x from the right we see that x is the limit of the left endpoint of intervals to the right of x.

Now we appeal to a general theorem (a special case of the even more general Baire category theorem) that asserts that a perfect subset of a complete metric space cannot be countably infinite.

Nota. En el artículo original de Terence Tao, que se encuentra en la siguiente dirección

http://terrytao.wordpress.com/2010/10/04/covering-a-non-closed-interval-by-disjoint-closed-intervals/

pueden encontrarse más detalles sobre la demostración.

Problema 9. *Calcular el valor de la siguiente suma en función de $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{j! \cdot k!}.$$

Solución. Vamos a probar por inducción sobre n que el valor de la suma es constante uno y, en particular, no depende de n. Para $n = 0$, la suma tiene un único sumando, correspondiente a $j = k = 0$, que vale uno. Supuesto cierto para $n-1$, veamos que también se cumple para n, lo que equivale a mostrar que los sumandos que se añaden al cambiar $n-1$ por n suman cero. Dichos sumandos que se añaden corresponden con los valores de $j, k \geq 0$ para los que $j+k = n$ y su suma viene dada por

$$\sum_{j+k=n} \frac{(-1)^k}{j! \cdot k!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!(n-r)!} = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = \frac{(1-1)^n}{n!} = 0$$

donde hemos hecho el cambio $k = r$, $j = n - r$ y en el último paso hemos usado que la sumatoria es la correspondiente por el binomio de Newton al desarrollo de $(1-1)^n$.

Problema 10. *Hallar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, esto es, las matrices cuadradas de orden n con coeficientes complejos, que cumplen que si $x \in \mathbb{C}^n$ es un vector que tiene dos entradas iguales, entonces el vector $Ax \in \mathbb{C}^n$ tiene las mismas dos entradas iguales.*

Solución. Llamemos a_{ij} a la entrada (i, j) de la matriz A. Si A cumple la condición del enunciado, entonces, dados $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distintos, consideremos el vector v de $\mathbb{C}^n$ que tiene ceros en todas las posiciones salvo un uno en la k-ésima. Este vector tiene las componentes i-ésima y j-ésima iguales luego Av también ha de tenerlas, lo que nos dice que $a_{ik} = a_{jk}$. Variando i, j, k en estas condiciones, llegamos a que, dado $h \in \{1, \dots, n\}$, todos los elementos de la columna h-ésima de A salvo a_{hh} son iguales entre sí. A este valor lo llamaremos $\lambda_h \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos, consideremos ahora el vector v que tiene unos en las posiciones i-ésima y j-ésima y cuyo resto de componentes son cero. El vector Av tiene que tener iguales las componentes i-ésima y j-ésima por la condición del enunciado luego esto se traduce en que $a_{ii} + a_{ij} = a_{ji} + a_{jj}$, esto es, $a_{ii} + \lambda_j = a_{jj} + \lambda_i$ o, equivalentemente, $a_{ii} - \lambda_i$ no depende de cuál sea $i \in \{1, \dots, n\}$.

Todo esto prueba que una matriz cumpliendo el enunciado se puede expresar como $A = B + d \cdot I_n$ para cierto $d \in \mathbb{C}$, donde I_n es la matriz identidad y B es una matriz con columnas constantes (es decir, $b_{ik} = b_{jk}$ para cualesquier $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$). Es fácil comprobar ahora que toda matriz de este tipo cumple la condición del enunciado luego son las únicas que la cumplen.

Nota: es fácil probar directamente a partir del enunciado que las matrices que cumplen esta condición forman un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De acuerdo a la discusión anterior, esto prueba que la dimensión (compleja) de dicho subespacio es $n + 1$.

Problema 11. *Hallar todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales que cumplen que cualquier número natural se escribe de forma única como suma de términos distintos de la sucesión.*

Solución. Probaremos que la única sucesión que cumple las condiciones del enunciado es la de las potencias de 2, esto es, $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Que esta sucesión cumple el enunciado es obvio puesto que cada número natural se expresa, de forma única, en base 2, lo que corresponde a expresarlo como suma de términos de esta sucesión.

Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión cumpliendo el enunciado. El número 1 se tiene que expresar como suma de términos de $\{a_n\}$, luego no queda otra posibilidad que $a_1 = 1$ (es estrictamente creciente). Probemos ahora por inducción que $a_n = 2^{n-1}$ para lo que supondremos que $a_k = 2^{k-1}$ para $0 \leq k < n$. Todo número menor que 2^{n-1} se puede expresar como suma de términos distintos de $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ y $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ es el mayor número así construído luego necesariamente $a_n = 2^{n-1}$. En caso contrario, 2^{n-1} no podría expresarse como suma de términos distintos de la sucesión y hemos demostrado que esta es la única solución.

Problema 12. *Dado un número real $a > 1$, determinar si la siguiente serie es o no convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}.$$

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear). La serie es convergente si y sólo si $a > e$.

La suma parcial de la serie propuesta es

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} a^{-\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}}.$$

La suma armónica puede acotarse superior e inferiormente mediante integrales de la siguiente forma:

$$\log(m+1) = \int_1^{m+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^{m} \frac{dx}{x} = 1 + \log m.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^{\log a}} = \sum_{m=1}^{n} a^{-1-\log m} < S_n < \sum_{m=1}^{n} a^{-\log(m+1)} = \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m^{\log a}}.$$

Consideremos el límite cuando $n \to \infty$. Si $\log a \leq 1$ la cota inferior tiende a $+\infty$ y por tanto en este caso la serie es propiamente divergente. Por otro lado, si $\log a > 1$ la cota superior tiene límite finito . Dado que el término general de la serie es positivo, se concluye que en este caso la serie es converge absolutamente.

Problema 13. *Un año es bisiesto si es múltiplo de 4 pero no múltiplo de 100, excepto que sea múltiplo de 400. Por ejemplo, 1984, 2000 y 2012 son años bisiestos, mientras que 1900 no lo es. Consideremos un día cualquiera del año, distinto del 29 de febrero. Demostrar que los días de la semana (lunes, martes,...) en que puede caer dicho día no son equiprobables (cuando se toma un año al azar).*

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear). Cada 400 años se repite el ciclo de bisiestos. En ese periodo hay 97 días bisiestos (los 100 múltiplos de 4 excepto 100, 200 y 300) y por tanto el número total de días ($400 \times 365 + 97$) es múltiplo de 7. Esto quiere decir que cada 400 años se repite el calendario: idéntica sucesión de días del año con el mismo día de la semana.

Sea un día del año dado, distinto del 29 de febrero. Ese día ocurre 400 veces en 400 años. Como 400 no es múltiplo de siete, cada día de la semana no puede ocurrir con igual frecuencia.

Problema 14. *En un triángulo ABC, supongamos que las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en B y en C se cortan en un punto P. Demostrar que la recta AP es la simétrica de la mediana del lado BC respecto de la bisectriz del ángulo A.*

Solución. Consideremos la recta simétrica de AP respecto de la bisectriz del ángulo A y sea M el punto en que ésta corta al lado BC. Si probamos que M es el punto medio del segmento BC, habremos terminado. Usando el Teorema del Seno, tenemos que

$$BM = AM \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAM}{\operatorname{sen} \angle ABC}, \qquad CM = AM \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle CAM}{\operatorname{sen} \angle ACB}.$$

Usando que $\angle ACB = \pi - \angle ABP$ y $\angle ABC = \pi - \angle ACP$ (ángulos semiinscritos) y la propiedad de simetría, llegamos a que

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\operatorname{sen} \angle BAM \cdot \operatorname{sen} \angle ABP}{\operatorname{sen} \angle ACP \cdot \operatorname{sen} \angle CAM} = \frac{\operatorname{sen} \angle CAP \cdot \operatorname{sen} \angle ABP}{\operatorname{sen} \angle ACP \cdot \operatorname{sen} \angle BAP}$$

Usando otra vez el Teorema del Seno en los triángulos ABP y ACB y observando que $CP = BP$, obtenemos finalmente

$$\frac{BM}{CM} = \frac{CP \cdot AP}{AP \cdot BP} = 1.$$

Problema 15. *Dado un triángulo en el plano euclídeo, determinar un punto tal que*

1. *la suma de los cuadrados de las distancias a los tres vértices sea mínima.*
2. *la suma de los cuadrados de las distancias a los tres lados sea mínima.*

Solución. Consideremos coordenadas cartesianas (x, y) en el plano y supongamos que los vértices tienen por coordenadas (x_a, y_a), (x_b, y_b) y (x_c, y_c). La suma S de los cuadrados de las distancias de un punto (x, y) a los tres vértices viene dada por

$$\begin{aligned} S &= (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (x-x_b)^2 + (y-y_b)^2 + (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 \\ &= [3x^2 - 2(x_a+x_b+x_c)x - (x_a^2+x_b^2+x_c^2)] + [3y^2 - 2(y_a+y_b+y_c)y - (y_a^2+y_b^2+y_c^2)] \end{aligned}$$

Está claro que minimizar S equivale a minimizar el primer y el segundo corchete por separado ya que las variables x e y están separadas, pero cada uno de ellos es un polinomio de segundo grado en su correspondiente variable, de donde fácilmente se deduce que el mínimo absoluto se alcanza en el punto

$$\left(\tfrac{1}{3}(x_a+x_b+x_c), \tfrac{1}{3}(y_a+y_b+y_c)\right),$$

que no es otro que el baricentro del triángulo y hemos resuelto el apartado (1).

Para resolver el apartado (2), llamemos d_a, d_b y d_c a las distancias orientadas de un punto arbitrario del plano a los correspondientes lados, de forma que la distancia es positiva para los puntos interiores al triángulo. Notemos que siempre se verifica la ecuación $ad_a+bd_b+cd_c = A$, donde a, b, c son los lados del triángulo y A su área (para probarlo basta con considerar los triángulos formados por el punto arbitrario y cada pareja de vértices y hacer un cálculo de áreas, donde es fundamental que las áreas tenga signo). Recíprocamente, para cada terna $(d_a, d_b, d_c) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ cumpliendo $ad_a + bd_b + cd_c = A$, es fácil ver que existe un punto del plano tal que d_a, d_b, d_c son las distancias a los lados desde este punto. Por tanto, hemos reducido el problema a minimizar $d_a^2+d_b^2+d_c^2$ bajo la restricción $ad_a+bd_b+cd_c = A$, esto es, si tomamos (d_a, d_b, d_c) como coordenadas en $\mathbb{R}^3$, buscamos el punto del plano $ad_a + bd_b + cd_c = A$ más cercano al origen. Resolviendo este problema llegamos a que el punto que minimiza la cantidad buscada satisface

$$d_a = \frac{Aa}{a^2+b^2+c^2}, \qquad d_b = \frac{Ab}{a^2+b^2+c^2}, \qquad d_c = \frac{Ac}{a^2+b^2+c^2}.$$

Estas tres ecuaciones determinan al punto. Como las tres distancias son positivas, deducimos que es interior al triángulo.

Nota 1: Observemos que si hubiéramos considerado las distancias en valor absoluto a las rectas, es decir, distancias no orientadas, entonces la cantidad a minimizar es la misma luego no hay problema en considerar tales distancias orientadas.

Nota 2: Como apunta L.L. Salcedo en su solución al apartado (2), el punto en cuestión es el conocido como punto simediano. Esto se prueba fácilmente introduciendo coordenadas trilineales. Un punto del plano tiene coordenadas trilineales $(x : y : z)$ respecto de un triángulo dado ABC de lados a, b, c si las distancias d_a, d_b y d_c del punto a los correspondientes lados satisfacen

$$\frac{x}{d_a} = \frac{y}{d_b} = \frac{z}{d_c}.$$

En otras palabras, cuando x, y, z son proporcionales a d_a, d_b, d_c (si alguna distancia es cero, entonces la correspondiente coordenada trilinal es también cero). Además, todo punto del plano está determinado por sus coordenadas trilineales. Entonces, se ha probado que las coordenadas trilineales del punto solución de (2) son $(a : b : c)$ y puede probarse que el punto simediano (intersección de las simedianas, ver Problema 14) también tiene coordenadas trilineales $(a : b : c)$, lo que resuelve finalmente el problema.

Problema 16. *Determinar el valor de la siguiente integral definida:*

$$\int_0^1 \left(\sqrt[5]{1-x^{17}} - \sqrt[17]{1-x^5} \right) dx.$$

Solución. Si tomamos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = \sqrt[5]{1-x^{17}}$, es fácil ver que f es biyectiva y su inversa es $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$, $f^{-1}(x) = \sqrt[17]{1-x^5}$. Como quiera que f es decreciente y $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, es inmediato que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^{-1}$ pues el área que comprenden las gráficas de ambas funciones es la misma. De ahí deducimos que el valor pedido es cero.

Problema 17. *Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, tenemos una cuadrícula de dimensiones $3 \times n$. ¿De cuántas formas se pueden rellenar las $3n$ casillas de la cuadrícula con fichas de tamaño 3×1?*

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear). Sea A_n el número de formas de poner las n fichas 3×1 (indistinguibles y no orientadas) en el tablero de $3 \times n$ casillas. Por inspección, se establece $A_1 = A_2 = 1$ y $A_3 = 2$. Además es fácil ver que

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-3}, \qquad n \geq 4.$$

En efecto, la columna n-ésima o bien está ocupada por una sola ficha dispuesta verticalmente (y la otras $n-1$ columnas se ocupan de A_{n-1} maneras) o bien está ocupada por tres fichas dispuestas horizontalmente (y las otras $n-3$ columnas se ocupan de A_{n-3} maneras).

Para obtener una expresión explícita consideramos la función generatriz

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n-1} + A_{n-3}) x^n \\ &= A_{-1} + x f(x) + A_{-3} + A_{-2} x + A_{-1} x^2 + x^3 f(x), \end{aligned}$$

donde la sucesión se ha extendido usando la recurrencia de forma que $A_0 = 1$, $A_{-1} = A_{-2} = 0$ y $A_{-3} = 1$. Esto implica que

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^3} = \sum_{m=0}^{\infty} (x + x^3)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m+2k},$$

donde se ha usado la fórmula del binomio de Newton. Se concluye que[1]

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n-2k}{k}.$$

[1] $\lfloor n/3 \rfloor$ indica parte entera de $n/3$.

Problema 18. *Encontrar todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear). Si se define la función auxiliar $g(x) = f(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$, la condición puede reescribirse como $g(x - f(y)) = g(x) + g(f(y))$. Cambiando x por $x + f(y)$, llegamos a que $g(x) = g(x + f(y)) + g(f(y))$ y, haciendo $x = 0$, esta condición implica $g(f(y)) = \frac{1}{2}g(0)$. De ahí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad g(x + f(y)) = g(x) - \frac{1}{2}g(0).$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}g(0) &= g(f(x - f(y))) = g(f(x) + f(f(y)) - 1 + xf(y)) \\ &= -\tfrac{1}{2}g(0) + g(f(f(y)) - 1 + xf(y)) = -g(0) + g(-1 + xf(y)). \end{aligned}$$

Como $f \equiv 0$ no es una solución de la ecuación inicial, se puede elegir $f(y) \neq 0$ y entonces $-1 + xf(y)$ puede ser cualquier número real. Esto implica $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{3}{2}g(0)$. Finalmente, tomando $x = 0$ se obtiene $g(0) = 0$ y de ahí $g \equiv 0$.

Por tanto la única solución es $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Problema 19. *En cierto país hay 21 ciudades conectadas por autobuses de varias compañías. Cada compañía opera en sólo 5 ciudades de forma que tiene líneas que unen cualesquiera dos de las cinco ciudades. No hay problema en que dos compañías compartan algunas de sus ciudades, pero sabemos que cada par de ciudades está unido por, al menos, una línea directa (sin pasar por otra ciudad intermedia). ¿Cuál es el mínimo número de compañías necesario para que esta situación sea posible?*

Problema 20. *Consideremos la sucesión recurrente definida por* $a_0 = 0$ *y*

$$a_n = \frac{1}{2E(a_{n-1}) - a_{n-1} + 1} \qquad (n \geq 1),$$

donde $E(x)$ *representa la parte entera de* $(x \in \mathbb{R}$. *Demostrar que la sucesión* $\{a_n\}$ *recorre todos los racionales positivos, tomando cada valor una única vez.*

Solución (de L. L. Salcedo, departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear)
Sea $1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, \ldots$, la sucesión en $\mathbb{N}$ definida por la recurrencia

$$b_0 = 1, b_1 = 1, \qquad b_{j+1} = (2E(b_{j-1}/b_j) + 1)b_j - b_{j-1}, \quad j \geq 1. \tag{1}$$

Es inmediato comprobar que $b_j > 0$ y $a_j = b_{j-1}/b_j$ para todo $j \geq 1$.

La idea es probar que al variar j, (b_{j-1}, b_j) pasa exactamente una vez por todos los pares de números naturales primos entre sí: Al ser primos entre sí no habrá cancelación de factores entre b_{j-1} y b_j y cada número racional positivo aparecerá exactamente una vez en a_j.

- Los pares (b_{j-1}, b_j) son primos entre sí. Por inducción: b_0, b_1 lo son y de la recurrencia se deduce que si (b_{j-1}, b_j) son primos entre sí, (b_j, b_{j+1}) también.

- Los pares no se repiten. Por reducción al absurdo: Supongamos que $b_{i+k} = b_i$ y $b_{i+k+1} = b_{i+1}$ para ciertos i, k positivos. La recurrencia es invertible:

  $$b_{j-1} = (2E'(b_{j+1}/b_j) - 1)b_j - b_{j+1},$$

  donde $E'(x)$ denota el menor entero mayor o igual que x. Aplicando la recurrencia inversa una vez se deduce que también $b_{i+k-1} = b_{i-1}$. Aplicando la recurrencia inversa $i+1$ veces se concluye $b_{k-1} = b_{-1} = 0$, lo cual contradice la propiedad $b_j > 0$ para $j \geq 0$.

Sea la colección de números naturales $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, definida por la recurrencia

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2^{n-1} \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} n+1 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Por tanto la generación $n = 1$ es $(1, 1)$, la $n = 2$ es $(1, 2, 1)$, la $n = 3$ es $(1, 3, 2, 3, 1)$, la $n = 4$ es $(1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1)$, etc. La *ley de formación* es que cada nueva generación se obtiene de la anterior insertando entre cada dos números su suma. El punto crucial es el siguiente

Afirmación. La sucesión b_j coincide con la sucesión

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} n \\ 2^{n-1} \end{bmatrix}, \ldots$$

Si nos creemos la afirmación, se puede ahora comprobar que (b_i, b_{i+1}) acaba pasando por todos los pares de números primos: Por la ley de formación, un par de términos sucesivos (a, b) (por ejemplo $a > b$, el orden no importa porque cada generación es simétrica bajo reflexión) aparece en una generación si y sólo si el par $(a - b, b)$ aparece en la generación anterior. Recursivamente (algoritmo de Euclides) por ser primos entre sí se llegará a un par de tipo $(n, 1)$. Como en efecto $(n, 1)$ sí está en la sucesión, (a, b) también.

Demostración de la afirmación. Dado que $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}n\\2^{n-1}\end{bmatrix}, \ldots$, coincide en los primeros términos a $\{b_j\}$, basta ver que esta sucesión también satisface la recurrencia (1) para probar que siempre coincide con b_j. La recurrencia (1) se satisface para los cuartetos $\begin{bmatrix}n\\2^{n-1}-1\end{bmatrix} = n$, $\begin{bmatrix}n\\2^{n-1}\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}n+1\\1\end{bmatrix} = n+1$ y $\begin{bmatrix}n+1\\2\end{bmatrix} = n$, a caballo sobre dos generaciones. También se cumple obviamente para el trío $\begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n+1\\2k+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}$. Para el caso que falta, $\begin{bmatrix}n+1\\2k-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix}$, usamos inducción sobre n. Supongamos que la recurrencia se cumple hasta la generación n-ésima y sea $\begin{bmatrix}n+1\\2k-1\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix} + r$ (donde c y r son el cociente y el resto de la división, es decir, $c, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < \begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix}$). Entonces (usando la ley de formación) $\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix} = (c-1)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} + r$ con $0 \leq r < \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$, y la recurrencia implica $\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} - r$. A su vez, por la ley de formación, $\begin{bmatrix}n+1\\2k+2\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix} - r$, ó $\begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix} = (c-1)\begin{bmatrix}n+1\\2k\end{bmatrix} - r$, y se verifica (1).