Problema 1. *Demostrar que existen infinitos números naturales $n \in \mathbb{N}$ de forma que cada uno de los números n, $n+1$ y $n+2$ es un cuadrado perfecto o bien la suma de dos cuadrados perfectos.*

Solución de María Calvo. Vamos a dar una familia infinita de ternas que cumplen la condición pedida. Para todo $a \in \mathbb{N}$,

$$4a^4 + 4a^2,\ 4a^4 + 4a^2 + 1,\ 4a^4 + 4a^2 + 2$$

son tres números consecutivos que cumplen que

$$\begin{aligned} 4a^4 + 4a^2 &= (2a^2)^2 + (2a)^2 \\ 4a^4 + 4a^2 + 1 &= (2a^2 + 1)^2 \\ 4a^4 + 4a^2 + 2 &= (2a^2 + 1)^2 + 1^2 \end{aligned}$$

luego basta tomar $n = 4a^4 + 4a^2$ para cada natural a.

Problema 2. *Supongamos que una matriz cuadrada A de orden n tiene por elementos a los números $\{1, 2, \dots, n^2\}$ sin repetir ninguno.*

a) ¿Cuál es el rango mínimo que puede tener A?

b) ¿Cuál es el rango máximo que puede tener A?

Solución. Descartemos en primer lugar el caso en que $n = 1$, donde tenemos que $A = (1)$ y el rango de A siempre es uno. Para $n \geq 2$, es claro que A no puede tener rango 1 ya que en tal caso todas las filas serían múltiplo de una de ellas y esto no puede ocurrir con los números $\{1, 2, \dots, n^2\}$. En cambio, la matriz sí puede tener rango 2 (por ejemplo, tomando $a_{ij} = n(i-1)+j$) luego deducimos que el rango mínimo de A que puede tener A es 2.

Para ver ahora que A puede tener rango n y responder al apartado (b), tomemos como A una matriz cuyos elementos sean $\{1, 2, \dots, n^2\}$ pero debajo de la diagonal principal todos sean números pares y en la diagonal principal impares. Es obvio que una tal matriz A tiene determinante impar ya que el determinante es la suma de $n!$ productos de n elementos y todos estos productos son pares salvo uno (el de los elementos de la diagonal principal). En particular, su determinante es distinto de cero y, por tanto, tiene rango n.

Problema 3. *Supongamos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que tiene límite en todos los puntos, es decir, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ para cualquier $a \in [0,1]$.*

a) Demostrar que el conjunto de puntos en que f es discontinua es numerable.

b) ¿Existe una función f en tales condiciones con infinitos puntos de discontinuidad?

Solución de Lourdes Moreno. Consideremos el conjunto

$$G = \{(a, f(a)) : f \text{ no es continua en } x = a\}$$

y probemos que dicho conjunto no tiene puntos de acumulación en el conjunto, es decir, si llamamos G' al conjunto derivado de G, entonces $G' \cap G = \emptyset$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $(b, f(b)) \in G' \cap G$. Sabemos por la caracterización de punto de acumulación que existe una sucesión $\{(a_n, f(a_n))\} \longrightarrow (b, f(b))$ luego $\{a_n\} \to b$ y $\{f(a_n)\} \to f(b)$ y acabamos de llegar a una contradicción, ya que por hipótesis f no era continua en el punto b. El apartado (a) es ahora consecuencia de que todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sin puntos de acumulación es numerable.

Un ejemplo que pone de manifiesto que el conjunto G puede ser numerable infinito es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0, \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución alternativa al apartado (a). Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$A_k = \{a \in [0,1] : |f(a) - \lim_{x\to a} f(x)| > \tfrac{1}{k}\}$$

Es evidente que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ luego si probamos que cada A_k es numerable habremos terminado. No obstante, vamos a probar que cada A_k es de hecho finito. En efecto, si A_k fuera infinito, al ser $[0,1]$ compacto, existiría $b \in [0,1]$ y una sucesión $\{a_n\} \subseteq A_k \setminus \{b\}$ con $\{a_n\} \to b$. Como $a_n \in A_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in [0,1] \setminus \{b\}$ tal que $|b_n - a_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(b_n) - f(a_n)| > \frac{1}{k}$. Esto implica que $\{b_n\} \to b$ pero no puede ser $\lim\{f(b_n)\} = \lim\{f(a_n)\}$ lo que contradice que existe límite de f en b.

Ejemplo alternativo para el apartado (b). Un ejemplo muy interesante para el apartado (b) consiste en definir $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = 0$ para $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ y para $x = 0$ y, para $x \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, expresamos $x = \frac{p}{q}$ como fracción irreducible y definimos $f(x) = \frac{1}{q}$. Puede comprobarse que f tiene límite cero en todos los puntos pero no coincide con el valor en los racionales. Evidentemente el conjunto de puntos de discontinuidad es $]0,1] \cap \mathbb{Q}$ que, aparte de ser infinito numerable, es denso en $[0,1]$.

Problema 4. *Un octógono tiene sus ángulos iguales.*

a) Si las longitudes de sus lados son números naturales, demostrar que los lados opuestos del octógono son iguales dos a dos.

b) ¿Ocurre lo mismo si imponemos que las longitudes de los lados sean números racionales?

Solución de Samuel Johnson. Llamemos los lados del octógono a, b, c, d, e, f, g y h, consecutivamente. Si todos los ángulos son iguales, entonces prolongando los lados a, c, e y g se obtiene un rectángulo (ver Fig. 1); lo mismo ocurre para los lados b, d, f y h. Además, un rectángulo se ha de encontrar rotado $\pi/4$ con respecto del otro. Por lo tanto, un lado de uno de los rectángulos será

$$L = a/\sqrt{2} + b + c/\sqrt{2}. \tag{1}$$

El lado opuesto del mismo recutángulo será

$$L = e/\sqrt{2} + f + g/\sqrt{2}. \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$a - e + c - g = \sqrt{2}(f - b) \tag{3}$$

Como la diferencia de naturales es un entero y el producto de un entero por un irracional (aquí, $\sqrt{2}$) es otro irracional, la igualdad (3) se cumple si y sólo si $a + c = e + g$ y $b = f$. Por simetría, el argumento es válido para inferir que $a = e$, $c = g$ y $d = h$; es decir, los lados han de ser iguales dos a dos.

Como la direrencia de racionales es un racional y el producto de un racional por un irracional es otro irracional, el mismo razonamiento lleva a concluir que también si los lados son racionales, han de ser iguales dos a dos.

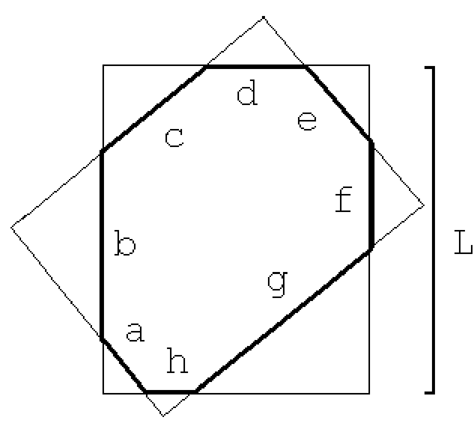

Figura 1: Octógono con todos los lados iguales. Se cumple $L = a/\sqrt{2}+b+c/\sqrt{2} = e/\sqrt{2}+f+g/\sqrt{2}$.

Problema 5. *Hallar todas las funciones continuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplan la siguiente propiedad: para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$, si $x-y$ es racional, entonces $f(x)-f(y)$ también es racional.*

Solución. Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos la función $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f_n(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$, que es continua como diferencia de continuas y sólo toma valores racionales. El teorema del valor intermedio nos asegura que f es constante luego, si llamamos a_n a esta constante, tenemos

$$f(1)-f(0)=(f(1)-f(\tfrac{n-1}{n}))+\ldots+(f(\tfrac{2}{n})-f(\tfrac{1}{n})+(f(\tfrac{1}{n})-f(0))=na_n$$

Llamando $f(0)=b$ y $f(1)=a+b$, deducimos que $f_n(x)=\frac{1}{n}a$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Dado cualquier número racional $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ con $p,q\in\mathbb{N}$, tenemos que

$$f(\tfrac{p}{q})=f_q(\tfrac{p-1}{q})+f_q(\tfrac{p-2}{q})+\ldots+f_q(\tfrac{1}{q})+f_q(0)+f(0)=pf_q(\tfrac{1}{q})+b=\tfrac{p}{q}a+b$$

luego $f(x)=ax+b$ para $x\in\mathbb{Q}^+$ y, para $x\in\mathbb{Q}^-$, se razona de forma análoga obteniendo que $f(x)=ax+b$ para todo $x\in\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y f es continua, deducimos que $f(x)=ax+b$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Así, hemos probado que las únicas funciones que pueden cumplir la propiedad del enunciado son los polinomios de primer grado con coeficientes racionales. Es inmediato comprobar que estas funciones la cumplen y, por tanto, son las únicas.

Problema 6. *Consideremos la sucesión* $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ *definida por*

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1}$$

Hallar el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

Solución de María Calvo. Consideremos la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y estudiemos su radio de convergencia. Vamos a ver que $a_n \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 1$ por inducción sobre n. Para $n = 1$, tenemos que $a_1 = \frac{1}{2}$ y, suponiendo que se cumple para $n-1$, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k+1} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esto demuestra que $f(x)$ converge absolutamente para $|x| < 1$. En particular, la serie del enunciado es convergente e igual a $f(\frac{1}{2})$. Vamos probar a continuación la fórmula

$$f'(x) = f(x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+2}, \quad |x| \leq 1$$

Esta es consecuencia del teorema de Mertens para el producto de Cauchy de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ (que se puede aplicar ya que ambas series son absolutamente convergentes para $|x| < 1$. Concretamente,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k x^{n-k}}{n-k+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = f'(x)$$

Como $f(x) > 0$ para $x > 0$ ya que los a_k son positivos, podemos escribir para cierto $c \in \mathbb{R}$,

$$\log(f(x)) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = -\int \frac{x + \log(1-x)}{x^2} = \frac{(1-x)\log(1-x)}{x} + c$$

de donde obtenemos finalmente para $0 < x < 1$ la expresión

$$f(x) = c'(1-x)^{\frac{1-x}{x}}$$

e imponiendo que f sea continua en $x = 0$ y $f(0) = a_0 = 1$, obtenemos que $c' = e^{-1}$ y ya es fácil calcular $f(\frac{1}{2}) = \frac{e}{2}$, que es el valor de la suma buscada.

Problema 7. *Supongamos que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, tiene sus tres raíces reales.*

a) Demostrar que $a^2 \geq 3b$.

b) ¿En qué situaciones se da la igualdad $a^2 = 3b$?

Solución de Lourdes Moreno. Si un polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ con coeficientes reales tiene tres raíces reales, probemos que $a^2 \geq 3b$. Distingamos los tres tipos de casos que se nos pueden dar:

1. Si las tres raices del polinomio son distintas, o sea, tenemos tres raíces de multiplicidad 1, por el Teorema de Rolle podemos afirmar que la derivada del polinomio debe de tener dos raíces reales distintas. Por tanto, el discriminante de la derivada debe ser cero, es decir,

$$4a^2 - 12b = 4(a^2 - 3b) > 0 \implies a^2 - 3b > 0 \implies a^2 > 3b$$

2. Si tenemos una raíz doble y otra simple, al tener un polinomio de grado tres (en $+\infty$ tiende a $\pm\infty$, y en $-\infty$ tiende a $\mp\infty$) podemos garantizar la existencia de un máximo y de un mínimo, luego la derivada primera del polinomio debe de tener dos raíces distintas (una de ellas es la raíz doble del polinomio original) y, por los mismos motivos anteriores, obtenemos la desigualdad buscada.

3. Por último, si el polinomio tiene una raíz real triple se da la igualdad ya que dicho polinomio es de la forma $P(x) = (x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3$, siendo r la raiz de partida.

Problema 8. *Consideremos la función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por*

$$f(n) = E\left(n + \sqrt{n} + \tfrac{1}{2}\right)$$

Demostrar que

$$f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$$

es decir, la imagen de f *contiene a todos los números naturales excepto los cuadrados perfectos. ¿Es* f *inyectiva?*

Solución de Francisco de los Santos. Consideremos $E(\sqrt{n})$ y estudiemos qué valores adopta cuando n está comprendido entre dos cuadrados perfectos consecutivos arbitrarios, $n = m^2$ y $n = (m+1)^2$. Obviamente, $E(\sqrt{m^2}) = m$ y $E(\sqrt{(m+1)^2}) = m + 1$, luego $E(\sqrt{m^2 + p}) = m$ si $p \in \{0, 1, \ldots, 2m\}$, como se recoge en la primera fila de la tabla que se muestra más abajo.

Sea ahora $E(\sqrt{n}+1/2)$. La parte entera de $\sqrt{n}$ sólo cambia al sumarle $1/2$ si la parte fraccionaria de $\sqrt{n}$ es mayor o igual que $1/2$. El valor a partir del cual esto ocurre lo determina la desigualdad $\sqrt{m^2 + p} \geq m+1/2$, es decir, cuando $p \geq m+1$. Así pues, $E(\sqrt{m^2 + p}+1/2) = m$ si $p \in \{0, \ldots, m\}$ y $E(\sqrt{m^2 + p} + 1/2) = m + 1$ si $p \in \{m + 1, \ldots, 2m\}$ (segunda fila de la tabla).

Finalmente, puesto que $E(n + x) = n + E(x)$ si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, $f(n) = n + E(\sqrt{n} + 1/2)$, cuyos valores muestran en la tercera fila de siguiente tabla:

n	m^2	$\ldots$	$m^2 + m$	$m^2 + m + 1$	$\ldots$	$m^2 + 2m$
$E(\sqrt{n})$	m	$\ldots$	m	m	$\ldots$	m
$E(\sqrt{n} + 1/2)$	m	$\ldots$	m	$m + 1$	$\ldots$	$m + 1$
$f(n)$	$m^2 + m$	$\ldots$	$m^2 + 2m$	$m^2 + 2m + 2$	$\ldots$	$m^2 + 3m + 1$

Es claro ahora que f recorre todos los naturales a excepción de los cuadrados perfectos (nótese el salto de $m^2 + 2m$ a $m^2 + 2m + 2$), y que f es inyectiva puesto que es estrictamente monótona, $f(n + 1) > f(n)$.

Problema 9. *Supongamos que* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *es una sucesión de* n *números reales tal que cualesquiera* 7 *elementos consecutivos tienen suma positiva mientras que cualesquiera* 11 *elementos consecutivos tienen suma negativa. Hallar el mayor valor posible de* n *para el que esta situación sea posible.*

Solución de Francisco de los Santos. Que la sucesión no puede ser indefinida es inmediato sin más que reparar en que una secuencia de 77 números puede descomponerse en 7 bloques consecutivos de 11, lo que implicaría que la suma de todos ellos es positiva, o en 11 bloques de 7, lo que implicaría que dicha suma es negativa. La cota más baja, sin embargo, no es 77, sino 17. Para demostrarlo vamos a comprobar que, de haber una solución con 17 elementos, a partir de ella se puede encontrar otra de 11 cuyos elementos son todos positivos, en contradicción con que su suma ha de ser negativa. Notemos primero que si 2 sucesiones cumplen las condiciones del enunciado, entonces su suma también las cumple. Sea pues una sucesión de 17 números $\{a_1, a_2, \ldots, a_{17}\}$ que satisfaga dichas condiciones y consideremos las siguientes dos subsucesiones de 16 números que, obviamente, también las cumplen: $\{a_1, a_2, \ldots, a_{16}\}$ y $\{a_2, a_3 \ldots, a_{17}\}$. Como se ha indicado antes, su suma es una tercera solucón de 16 elementos, a saber, $\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{16} + a_{17}\}$. Sumando ahora las siguientes dos subsucesiones de 15 elementos que se obtienen de la anterior, $\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{15} + a_{16}\}$ y $\{a_2 + a_3, \ldots, a_{16} + a_{17}\}$, se llega a $\{a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, \ldots, a_{15} + a_{16} + a_{17}\}$. De iterar el prodedimiento 3 veces más se obtendría la siguiente sucesión de 11 números

$$\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_7, a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_8, \ldots, a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{17}\},$$

en la que todos los elementos son suma de 7 números consecutivos, y por tanto positivos, en contradicción con que su suma total debe ser negativa.

Para encontrar una solución de 16 números notemos que, como dada una solución $\{a_1, \ldots, a_n\}$, su inversa $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1\}$ también lo es, sumando ambas se construye una solución simétrica, por lo que en realidad sólo hace falta encontrar 8 números y no 16. Consideremos pues

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1\}$$

Se puede buscar una solucíon lo más simple posible imponiendo que todas las sumas 7 números consecutivos sean iguales, e igualmente para las de 11, lo que resulta en una secuencia de la forma $\{a, a, b, a, a, a, b, a, a, b, a, a, a, b, a, a\}$ en la que todas las series de 7 números consecutivos suman $5a + 2b$, y las de 11, $8a + 3b$. A partir de aquí, sin mucho esfuerzo puede encontrarse, por ejemplo, $a = -12$ y $b = 31$.

Problema 10. *Supongamos que K es subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ que tiene la propiedad de que su intersección con cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ es un círculo o bien vacía. Demostrar que K es una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$.*

Solución de Francisco Montiel. Por ser K compacto, el producto cartesiano $K \times K \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ también es compacto. Es sabido que la función distancia $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que asocia a cada par de puntos (x, y) su distancia euclídea es continua, luego por ser $K \times K$ compacto, alcanzará su máximo en dicho conjunto. Sean $x_1, x_2 \in K$ puntos tales que $d(x_1, x_2) = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \in K\} = 2r$, y sea $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ el punto medio del segmento $[x_1, x_2]$. Vamos a probar que K es la bola cerrada de centro x_0 y radio r, es decir, $K = \overline{B}(x_0, r)$ y lo probaremos por doble inclusión.

- ($\supseteq$) Sea $x \in B(x_0, r)$ y sea π un plano que contenga a x, x_1 y x_2 (será único si los tres puntos no están alineados y habrá infinitos si lo están). Como x_1 y x_2 pertenecen a $\pi \cap K$, se tendrá que esta intersección es no vacía y, por tanto, será un círculo C. Como x_1 y x_2 están en C, el diámetro del círculo será mayor o igual que la distancia que los separa, que es $2r$. Pero todos los puntos del círculo están a distancia menor o igual que r de x_0 ya que su diámetro ha de ser menor o igual que $2r$ (en caso contrario, habría puntos de K separados por una distancia mayor que $2r$, lo cual es imposible) y, por tanto, el radio de C es r. En particular, x_1 y x_2 son puntos diametralmente opuestos de C, luego x_0 será el centro de C. Ahora bien, recopilando todo lo anterior resulta que x es un punto contenido en el mismo plano π que el círculo C y que dista del centro x_0 de dicho círculo menos que su radio r (por estar x en la bola). En consecuencia, $x \in C \subseteq K$ y ya tenemos la primera inclusión.
- ($\subseteq$) Esta inclusión es trivial a partir de lo ya visto: si $x \in K$, consideremos de nuevo un plano π que contenga a x, x_1 y x_2, cuya intersección con K de nuevo será un círculo de centro x_0 y radio r. Como x pertenece ahora a $\pi \cap K$, pertenece también a la bola, lo cual nos da la inclusión que faltaba.

Problema 11. *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos y supongamos que $P(4) = 2$ y $P(16) = 8$. Demostrar que $P(8) \leq 4$ y determinar para cuáles de estos polinomios se da la igualdad en la desigualdad anterior*

Solución de Francisco de los Santos. Al ser los coeficientes números reales no negativos, el polinomio $P(x)$ es convexo en $\mathbb{R}^+$ y, en particular, en el intervalo $I = [4, 16]$. Por ser convexo en I, los valores de $P(x)$ tales que $x \in I$ quedan por debajo del segmento comprendido entre los puntos $(4, 2)$ y $(16, 8)$, o bien coinciden con él. Como el punto $(8, 4)$ forma parte de dicho segmento, queda demostrado que $P(8) \leq 4$. La igualdad sólo se da si $P(x)$ es la recta que contiene a I, es decir, si $P(x) = x/2$.

Solución alternativa. Escribamos $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ y observemos que

$$\begin{aligned} P(8) &= a_0 + 2^3 a_1 + 2^6 a_2 + \ldots + 2^{3n} a_n \\ &= \sqrt{a_0}\sqrt{a_0} + \sqrt{2^2 a_1}\sqrt{2^4 a_1} + \sqrt{2^4 a_2}\sqrt{2^8 a_2} + \ldots + \sqrt{2^{2n} a_n}\sqrt{2^{4n} a_n} \\ &\leq \sqrt{a_0 + 2^2 a_1 + \ldots + 2^{2n} a_n}\sqrt{a_0 + 2^4 a_1 + \ldots + 2^{4n} a_n} \ = \ \sqrt{P(2)P(4)} \ = \ 4 \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada a los vectores

$$u = \left(\sqrt{a_0}, \sqrt{2^2 a_1}, \ldots, \sqrt{2^{2n} a_n}\right), \qquad v = \left(\sqrt{a_0}, \sqrt{2^4 a_1}, \ldots, \sqrt{2^{4n} a_n}\right)$$

y la igualdad se alcanza cuando exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. El cociente entre las primeras componentes de u y v es igual a 1, entre las segundas es igual a 2, entre las terceras 2^2 y así sucesivamente siempre que el correspondiente coeficiente de $P(x)$ no se anule. Por tanto si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$, $P(x)$ sólo puede tener un coeficiente no nulo, esto es, $P(x) = ax^k$ para cierto $a \geq 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Además tiene que cumplir que $P(4) = 2^{2k} a = 2$ y $P(16) = 2^{4k} a = 8$, de donde se obtiene que $a = \frac{1}{2}$ y $k = 1$. Por lo tanto, el único polinomio con coeficientes positivos que cumple la igualdad es $P(x) = \frac{1}{2}x$.

Problema 12. *Demostrar que en un conjunto de diez números naturales consecutivos siempre hay uno de ellos que es primo relativo con todos los demás.*

Solución de Francisco de los Santos. Sean $m > n$ dos de tales números que suponemos tienen un divisor común k. Entonces, $m - n = k\bar{m} - k\bar{n} = k(\bar{m} - \bar{n}) \leq 9$, lo que implica que los únicos divisores comunes posibles son múltiplos de 2, 3, 5 ó 7. Pero de entre 10 números consecutivos 5 son impares, luego no son múltiplos de 2, de estos 5 sólo hay uno como máximo que sea múltiplo de 7, sólo uno múltiplo de 5 y sólo dos que sean múltiplos de 3. Esto deja como mínimo un número que no es múltiplo de 2, 3, 5 ni de 7 y éste es primo relativo con todos los demás.

Problema 13. *Sea ABC un triángulo en el plano y M el punto medio del lado BC. Si r_1 y r_2 son los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos ABM y ACM respectivamente, demostrar que $r_1 < 2r_2$.*

Solución. El área del triángulo ABM es la misma que la del triángulo ACM ya que tienen la misma base $BM = CM$ y la misma altura. Por lo tanto, si llamamos p_1 y p_2 al semiperímetro de ABM y ACM respectivamente, tenemos que $r_1 p_1 = r_2 p_2$ (el área de un triángulo es igual al producto del radio de su circunferencia inscrita y su semiperímetro) y deducimos que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{AM + CM + AC}{AM + BM + MB}$$

Así, tenemos que probar que $AM + CM + AC < 2(AM + BM + AB)$ o, lo que es lo mismo, $AM + CM + 2AB > AC$ y esta última desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular $AM + CM > AC$ (en el triángulo ACM) y de que $2AB > 0$.

Problema 14. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ *números reales tales que*

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (a_{k+1} - a_k)^2 = 1$$

Hallar el mayor valor posible de

$$E = \sum_{k=1}^{n} (a_{n+k} - a_k)$$

Solución. Para cada $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, consideremos $x_k = a_{k+1} - a_k$. Observemos en primer lugar, que los valores de los x_k determinan los valores de los a_k salvo una constante aditiva, pero eso no influye en el problema puesto que tanto la restricción como la función que queremos maximizar son invariantes frente a sumarle a todas las variables una constante. Ahora bien, la restricción sobre los x_k pasa a ser $\sum_{k=1}^{2n-1} x_k^2 = 1$ y, por otro lado, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$a_{n+k} - a_k = x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + \ldots + x_{k+1} + x_k$$

luego podemos sustituir en la expresión de E, obteniendo

$$E = \sum_{k=1}^{n} (a_{n+k} - a_k) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n + (n-1)x_{n-1} + \ldots + 2x_{2n-2} + x_{n-1}$$

Con todo esto, podemos reescribir totalmente el enunciado, es decir, el mayor valor posible de E buscado es el máximo de la función lineal

$$f : \mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n + (n-1)x_{n-1} + \ldots + 2x_{2n-2} + x_{n-1}$$

restringida a la esfera unidad $\mathbb{S}^{2n-2} = \{x \in \mathbb{R}^{2n-1} : \sum_{k=1}^{2n-1} x_k^2 = 1\}$. Como la esfera es compacta, este máximo existe y, cómo la función f es lineal, f alcanzará su máximo y su mínimo absolutos en los puntos más alejados del hiperplano $f(x) = 0$, es decir, en el corte de la recta normal a este hiperplano con la esfera. Estos puntos vienen dados por el vectores normales al plano de módulo uno, esto es, el máximo y el mínimo de f se alcanzan en los puntos $\pm p_0$, donde

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 2(n-1)^2 + n^2}} (1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 2, 1)$$

A la vista de la expresión de $f(x)$, el máximo se alcanzará en el punto p_0 y el mínimo en $-p_0$. Por tanto, el valor buscado es

$$f(p_0) = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 2(n-1)^2 + n^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3} n(n+1)(2n+1) - n^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}(2n^3 + n)}$$

Nota. Observemos que la igualdad se da sólo en el punto p_0. Deshaciendo el cambio de variable $x_k = a_{k+1} - a_k$, es fácil llegar a que la igualdad se alcanza si, y sólo si,

$$a_k = \frac{\sqrt{3}k(k+1)}{2\sqrt{2n^3 + n}} + \lambda, \qquad a_{n+k} = \frac{\sqrt{3}(2n^3 - (n-k)(n-k+1)}{2\sqrt{2n^3 + n}} + \lambda, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 15. *Encontrar todos los números naturales n tales que*

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31$$

es un cuadrado perfecto.

Solución. Consideremos la descomposición

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10)$$

Es evidente que para $n = 10$ tenemos un cuadrado perfecto. También puede comprobarse (caso por caso) que, para $n < 10$ no es un cuadrado perfecto, luego nos centraremos en el caso $n > 10$, donde tenemos que $3(n - 10) > 0$, y vamos a ver que no puede ser un cuadrado perfecto. Razonando por reducción al absurdo, si para $n > 10$ tuviéramos un cuadrado perfecto, existiría $k \in \mathbb{N}$, $k < n^2 + 3n + 1$ tal que

$$(n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10) = (n^2 + 3n + 1 - k)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2 - (2kn^2 + 6kn + 2k - k^2)$$

y, por tanto, habrá de cumplirse que $2kn^2 + 6kn + 2k - k^2 = 3(n-10)$. Puede comprobarse fácilmente que el término de la izquierda es creciente en k para $1 \leq k < n^2 + 3n + 1$ luego si probamos que $2kn^2 + 6kn + 2k - k^2 > 3(n-10)$ para $k = 1$ (es decir, $2n^2 + 6n + 3 > 3(n-10)$) y para todo $n > 10$, esta desigualdad estricta se extenderá para todo valor de $k \in [1, n^2 + 3n + 1[$ y habremos llegado a la contradicción buscada. Ahora bien, esto es inmediato puesto que la desigualdad a probar se traduce en demostrar que $2n^2 + 3n + 33 > 0$ para todo $n > 10$.

Deducimos así que el único valor para el que el polinomio es un cuadrado perfecto es $n = 10$.

Problema 16. *Supongamos que $n, k \in \mathbb{N}$ son tales que el polinomio $x^{2n} + x^n + 1$ es divisible por $x^{2x} - x^k + 1$. Demostrar que $x^{2n} + x^n + 1$ también es divisible por $x^{2k} + x^k + 1$.*

Solución de Francisco Montiel. Por hipótesis, el polinomio $x^{2n} + x^n + 1$ es divisible por el polinomio $x^{2k} - x^k + 1$. En particular, eso nos dice que todas las raíces del segundo polinomio han de ser raíces del primero. Vamos a averiguar quiénes son las raíces de ambos polinomios:

1. Si $x^{2n} + x^n + 1 = 0$, llamando $x^n = z$, esta ecuación es equivalente a $z^2 + z + 1 = 0$ cuyas soluciones son los números complejos de módulo 1 y argumentos $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente, que notaremos $1_{\frac{2\pi}{3}}$ y $1_{\frac{4\pi}{3}}$. Sacando raíces $n-$ésimas, las raíces del polinomio original serán $1_{\frac{2\pi}{3n}+\frac{2\pi}{n}j}$ y $1_{\frac{4\pi}{3n}+\frac{2\pi}{n}j}$, $\quad j \in \{0, \ldots, n-1\}$
2. Por otra parte, si $x^{2k} - x^k + 1 = 0$, llamando $x^k = z$, esta ecuación es equivalente a $z^2 - z + 1 = 0$ cuyas soluciones son los números $1_{\frac{\pi}{3}}$ y $1_{\frac{5\pi}{3}}$. Sacando raíces $k-$ésimas, las raíces del polinomio original serán $1_{\frac{\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j}$ y $1_{\frac{5\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j}$, $\quad j \in \{1, \ldots, k-1\}$

Como las raíces del segundo polinomio han de ser raíces del primero, en particular $1_{\frac{\pi}{3k}}$ debe ser raíz de $x^{2n}+x^n+1$. Eso significa que debe existir $j_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que o bien $1_{\frac{\pi}{3k}} = 1_{\frac{2\pi}{3n}+\frac{2\pi}{n}j_0}$, o bien $1_{\frac{\pi}{3k}} = 1_{\frac{4\pi}{3n}+\frac{2\pi}{n}j_0}$. Puesto que ambos números tienen módulo 1, y sus argumentos están expresados con ángulos entre 0 y 2π, serán iguales si son iguales los argumentos. En el primer caso, se tiene:

$$\frac{\pi}{3k} = \frac{2\pi}{3n} + \frac{2\pi}{n}j_0 \Rightarrow n = 2\,(1 + 3j_0)\,k$$

mientras que en el segundo:

$$\frac{\pi}{3k} = \frac{4\pi}{3n} + \frac{2\pi}{n}j_0 \Rightarrow n = 2\,(2 + 3j_0)\,k$$

En cualquiera de los casos, se tiene que en las condiciones del problema el número $\frac{n}{k}$ es un entero par. Visto esto, pasemos a comprobar si el polinomio $x^{2n} + x^n + 1$ es divisible por $x^{2k} + x^k + 1$. Por lo ya dicho, las raíces de $x^{2k} + x^k + 1$ serán de la forma

$$1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j} \text{ y } 1_{\frac{4\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j}, \quad j \in \{0, \ldots, k-1\}$$

Sea $j_0 \in \{0, \ldots, k-1\}$. Sustituyamos la raíz $1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j_0}$ en el polinomio $x^{2n} + x^n + 1$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\left(1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j_0}\right)^{2n} + \left(1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j_0}\right)^{n} + 1 &= 1_{\frac{4n\pi}{3k}+\frac{4n\pi}{k}j_0} + 1_{\frac{2n\pi}{3k}+\frac{2n\pi}{k}j_0} + 1 \overset{(*)}{=} 1_{\frac{4\pi}{3}\frac{n}{k}} + 1_{\frac{2\pi}{3}\frac{n}{k}} + 1 = \\ &= \left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{4n} + \left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{2n} + 1\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ se debe a que $\frac{n}{k}$ es entero. Por otra parte, ya hemos dicho que $1_{\frac{\pi}{3k}}$ es raíz de $x^{2n} + x^n + 1$, luego $\left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{2n} + 1 = -\left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{n}$, así que sustituyendo:

$$\left(1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j_0}\right)^{2n} + \left(1_{\frac{2\pi}{3k}+\frac{2\pi}{k}j_0}\right)^{n} + 1 = \left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{4n} - \left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{n} = \left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{n}\left[\left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{3n} - 1\right] = 0$$

donde la última igualdad se debe a que

$$\left(1_{\frac{\pi}{3k}}\right)^{3n} = \left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{3n}{k}} = \left[\left(1_{\frac{\pi}{3}}\right)^{3}\right]^{\frac{n}{k}} = (-1)^{\frac{n}{k}} = 1$$

ya que $\frac{n}{k}$ es un entero par.

De manera análoga se comprueba que para cualquier $j_0 \in \{0, \ldots, k-1\}$ el número $1_{\frac{4\pi}{3k} + \frac{2\pi}{k} j_0}$ es raíz de $x^{2n} + x^n + 1$, ya que

$$\begin{aligned}
\left(1_{\frac{4\pi}{3k} + \frac{2\pi}{k} j_0}\right)^{2n} + \left(1_{\frac{4\pi}{3k} + \frac{2\pi}{k} j_0}\right)^{n} + 1 &= 1_{\frac{8n\pi}{3k} + \frac{4n\pi}{k} j_0} + 1_{\frac{4n\pi}{3k} + \frac{2n\pi}{k} j_0} + 1 \overset{(*)}{=} 1_{\frac{8\pi}{3}\frac{n}{k}} + 1_{\frac{4\pi}{3}\frac{n}{k}} + 1 = \\
&= \left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{4n} + \left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{2n} + 1
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $1_{\frac{2\pi}{3k}}$ es raíz de $x^{2n} + x^n + 1$, luego $\left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{2n} + 1 = -\left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{n}$ así que, sustituyendo:

$$\left(1_{\frac{4\pi}{3k} + \frac{2\pi}{k} j_0}\right)^{2n} + \left(1_{\frac{4\pi}{3k} + \frac{2\pi}{k} j_0}\right)^{n} + 1 = \left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{4n} - \left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{n} = \left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{n} \left[\left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{3n} - 1\right] = 0$$

donde la última igualdad se debe a que

$$\left(1_{\frac{2\pi}{3k}}\right)^{3n} = (1_{2\pi})^{\frac{n}{k}} = 1.$$

Por tanto, todas las raíces de $x^{2k} - x^k + 1$ son raíces de $x^{2n} + x^n + 1$, como se pretendía demostrar.

Problema 17, propuesto por Juan Manuel Urbano. *Encontrar todos los conjuntos de tres números naturales (distintos) que verifican que la suma de dos cualesquiera de ellos es divisible por el tercero.*

Solución de Francisco de los Santos. Sea $\{a, b, c\}$ una de dichas ternas. Como se nos dice que no hay dos números iguales puede suponerse que $a < b < c$, luego $a + b < c + b$, por lo que se cumplirá que

$$\frac{a+b}{c} < \frac{c+b}{c} = 1 + \frac{b}{c} < 2,$$

donde la última desigualdad se sigue de $b < c$. Pero $(a + b)/c$ es un número natural y el único natural menor que 2 es 1, de forma que $a + b = c$. Usando esta relación para eliminar c en

$$\frac{a+c}{b} = n, \qquad \text{y} \qquad \frac{b+c}{a} = m$$

resulta

$$2\frac{a}{b} = n - 1 \qquad \text{y} \qquad 2\frac{b}{a} = m - 1,$$

de donde se obtiene $(m - 1)(n - 1) = 4$, igualdad que, en números naturales implica que, por ejemplo, $m - 1 = 1, 2$ ó 4. Las dos primeras soluciones conducen a, respectivamente, $a = 2b$ y $a = b$, contrarias a que $a < b$. Sólo puede ser válida pues la tercera, que implica $b = 2a$.

En definitiva, las ternas que satisfacen las condiciones del enunciado son de la forma $\{a, 2a, 3a\}$.

Problema 18. *Hallar todos los valores de* $k \in \mathbb{R}$ *para los que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(a+b+c+d) - 1$$

para cualesquiera $a, b, c, d \in [-1, \infty)$.

Solución de Francisco de los Santos. Para el caso particular $a = b = c = d$ la condición del enunciado se transforma en $4a^3 \geq 4ak - 1$. Cabe considerar dos casos según que a sea positivo o negativo:

$$\begin{aligned} k &\leq a^2 + \frac{1}{4a}, \qquad & a \in (0, \infty), \\ k &\geq a^2 + \frac{1}{4a}, \qquad & a \in [-1, 0). \end{aligned}$$

Ahora bien, el mínimo de $a^2 + 1/4a$ cuando $a \in (0, \infty)$ está en $a = 1/2$ y resulta ser $3/4$, luego $k \leq 3/4$. Por otro lado, el máximo de $a^2 + 1/4a$ cuando $a \in [-1, 0)$ está en $a = -1$ y resulta ser $3/4$, luego $k \geq 3/4$. El único posible valor de k es pues $3/4$. Para demostrar que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{3}{4}(a+b+c+d) - 1$, escribimos esta desigualdad de forma equivalente como

$$(4a^3 - 3a + 1) + (4b^3 - 3b + 1) + (4c^3 - 3c + 1) + (4d^3 - 3d + 1) \geq 0.$$

Pero $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 \geq 0$ si $x \in [-1, \infty)$ ($f(x)$ posee dos mínimos, uno en $x = -1$ y otro en $x = 1/2$, y en ambos casos $f(x) = 0$). Entonces, claramente, $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq 0$ porque cada sumando por separado es positivo o cero, lo que conlcuye la demostración.

Nota. Observemos que en el caso $k = \frac{3}{4}$, la igualdad en la desigualdad anterior se alcanza si, y sólo si, $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$, es decir, si, y sólo si, $a, b, c, d \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

Problema 19. *Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = a_2 = 1$ y*

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Determinar el valor de a_{2009}.

Solución de Francisco Montiel. Probaremos por inducción que $a_{n+1}a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para $n = 1$ se tiene que $a_2a_1 = 1 \cdot 1 = 1$ y, supuesta la igualdad para un cierto n, se tiene

$$a_{n+2}a_{n+1} = \left(\frac{1}{a_{n+1}} + a_n\right) a_{n+1} = 1 + a_{n+1}a_n = n + 1$$

donde la última igualdad es cierta por hipótesis de inducción. Entonces se tiene que

$$a_{n+1} = \frac{n}{a_n} = \frac{n}{n-1} a_{n-1}$$

Con esto obtenemos la recurrencia que nos permitirá averiguar a_{2009}. En efecto,

$$a_{2009} = \frac{2008}{2007} a_{2007} = \frac{2008}{2007} \cdot \frac{2006}{2005} a_{2005} = \ldots = \frac{2008}{2007} \cdot \frac{2006}{2005} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^{2008} 1004!^2}{2008!}$$

Observación de Francisco de los Santos. Con un argumento similar al anterior se prueba que

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n} \cdot n!^2}{(2n)!}$$

y si ahora usamos la fórmula de Stirling $n! \approx \sqrt{2n\pi}(n/e)^n$, obtenemos la aproximación $a_{2n+1} \approx \sqrt{n\pi}$, que se acerca bastante al verdadero valor de a_{2n+1} para n suficientemente grande. En particular, $a_{2009} \approx 56{,}16$.

Problema 20. *Llamaremos cruz a una figura compuesta por un cuadrado al que se le han pegado sobre cada uno de sus lados cuadrados con el mismo lado. En un tablero* 10×11, *¿cuál es el número máximo de cruces que pueden dibujarse sobre la cuadrícula sin que dos de ellas se solapen?*