Problema 1. *Demostrar que existen infinitos números naturales $n \in \mathbb{N}$ de forma que cada uno de los números n, $n+1$ y $n+2$ es un cuadrado perfecto o bien la suma de dos cuadrados perfectos.*

Problema 2. *Supongamos que una matriz cuadrada A de orden n tiene por elementos a los números $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ sin repetir ninguno.*

a) *¿Cuál es el rango mínimo que puede tener A?*

b) *¿Cuál es el rango máximo que puede tener A?*

Problema 3. *Supongamos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que tiene límite en todos los puntos, es decir, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ para cualquier $a \in [0,1]$.*

a) *Demostrar que el conjunto de puntos en que f es discontinua es numerable.*

b) *¿Existe una función f en tales condiciones con infinitos puntos de discontinuidad?*

Problema 4. *Un octógono tiene sus ángulos iguales.*

a) *Si las longitudes de sus lados son números naturales, demostrar que los lados opuestos del octógono son iguales dos a dos.*

b) *¿Ocurre lo mismo si imponemos que las longitudes de los lados sean números racionales?*

Problema 5. *Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplan la siguiente propiedad: para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, si $x - y$ es racional, entonces $f(x) - f(y)$ también es racional.*

Problema 6. *Consideremos la sucesión $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ definida por*

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1}$$

Hallar el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

Problema 7. *Supongamos que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, tiene sus tres raíces reales.*

a) *Demostrar que $a^2 \geq 3b$.*

b) *¿En qué situaciones se da la igualdad $a^2 = 3b$?*

Problema 8. *Consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$f(n) = E\left(n + \sqrt{n} + \tfrac{1}{2}\right)$$

Demostrar que

$$f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$$

es decir, la imagen de f contiene a todos los números naturales excepto los cuadrados perfectos. ¿Es f inyectiva?

Problema 9. *Supongamos que* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *es una sucesión de* n *números reales tal que cualesquiera* 7 *elementos consecutivos tienen suma positiva mientras que cualesquiera* 11 *elementos consecutivos tienen suma negativa. Hallar el mayor valor posible de* n *para el que esta situación sea posible.*

Problema 10. *Supongamos que* K *es subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^3$ *que tiene la propiedad de que su intersección con cualquier plano de* $\mathbb{R}^3$ *es un círculo o bien vacía. Demostrar que* K *es una bola cerrada en* $\mathbb{R}^3$.

Problema 11. *Sea* $P(x)$ *un polinomio con coeficientes reales no negativos y supongamos que* $P(4) = 2$ *y* $P(16) = 8$. *Demostrar que* $P(8) \leq 4$ *y determinar para cuáles de estos polinomios se da la igualdad en la desigualdad anterior*

Problema 12. *Demostrar que en un conjunto de diez números naturales consecutivos siempre hay uno de ellos que es primo relativo con todos los demás.*

Problema 13. *Sea* ABC *un triángulo en el plano y* M *el punto medio del lado* BC. *Si* r_1 *y* r_2 *son los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos* ABM *y* ACM *respectivamente, demostrar que* $r_1 < 2r_2$.

Problema 14. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ *números reales tales que*

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (a_{k+1} - a_k)^2 = 1$$

Hallar el mayor valor posible de

$$E = \sum_{k=1}^{n} (a_{n+k} - a_k)$$

Problema 15. *Encontrar todos los números naturales* n *tales que*

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31$$

es un cuadrado perfecto.

Problema 16. *Supongamos que* $n, k \in \mathbb{N}$ *son tales que el polinomio* $x^{2n} + x^n + 1$ *es divisible por* $x^{2x} - x^k + 1$. *Demostrar que* $x^{2n} + x^n + 1$ *también es divisible por* $x^{2k} + x^k + 1$.

Problema 17, propuesto por Juan Manuel Urbano. *Encontrar todos los conjuntos de tres números naturales (distintos) que verifican que la suma de dos cualesquiera de ellos es divisible por el tercero.*

Problema 18. *Hallar todos los valores de* $k \in \mathbb{R}$ *para los que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(a + b + c + d) - 1$$

para cualesquiera $a, b, c, d \in [-1, \infty)$.

Problema 19. *Consideremos la sucesión* $\{a_n\}$ *definida por* $a_1 = a_2 = 1$ *y*

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Determinar el valor de a_{2009}.

Problema 20. *Llamaremos cruz a una figura compuesta por un cuadrado al que se le han pegado sobre cada uno de sus lados cuadrados con el mismo lado. En un tablero* 10×11*, ¿cuál es el número máximo de cruces que pueden dibujarse sobre la cuadrícula sin que dos de ellas se solapen?*