Problema 1. *Sea n un número natural que no sea múltiplo de 2 ni de 3 y consideremos un tablero cuadrado $n \times n$. Probar que se puede escribir en cada casilla un número del 1 al n de forma que no haya dos números iguales en ninguna fila, columna o diagonal.*

Solución. Consideremos numeradas las casillas en $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ donde escribimos $\mathbb{Z}_n = \{1, \ldots, n\}$ el anillo de enteros módulo n. Dados $p, q \in \mathbb{Z}_n$, asignamos a la casilla (p, q) el número $p - 2q \in \mathbb{Z}_n$ y veamos que esta asignación cumple las propiedades que se requieren.

En efecto, en cada fila los números son distintos puesto que si $(p_1, q), (p_2, q) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, entonces $p_1 - 2q = p_2 - 2q$ si, y sólo si, $p_1 = p_2$ y en cada columna también son distintos ya que si $(p, q_1), (p, q_2) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, entonces $p - 2q_1 = p - 2q_2$ si, y sólo si, $q_1 = q_2$ puesto que n no es par y 2 tiene inverso en $\mathbb{Z}_n$. Ahora bien, cualquier diagonal se escribe de una de las siguientes maneras

$$\{(p_0, q_0) + a(1, 1) : a \in \mathbb{Z}_n\} \quad \text{ó} \quad \{(p_0, q_0) + a(1, -1) : a \in \mathbb{Z}_n\}$$

para cierto $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. En el primer caso, si dos elementos de la diagonal (pongamos $(p_0, q_0) + a_1(1, 1)$ y $(p_0, q_0) + a_2(1, 1)$) tienen asignado el mismo número, entonces $p_0 - 2q_0 - a_1 = p_0 - 2q_0 - a_2$ luego $a_1 = a_2$. En el segundo caso, si $(p_0, q_0) + a_1(1, -1)$ y $(p_0, q_0) + a_2(1, -1)$ tienen asignado el mismo número se tiene que $p_0 - 2q_0 + 3a_1 = p_0 - 2q - 0 + 3a_2$ de donde $a_1 = a_2$ puesto que n no es múltiplo de 3 y 3 tiene inverso en $\mathbb{Z}_n$. En cualquier caso, hemos probado que no hay dos números iguales en la misma diagonal (principal o no) del tablero. $\square$

Problema 2. *Sea n un número natural. Demostrar la desigualdad*

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq n + 1$$

y estudiar para qué valores de n se tiene una igualdad.

Solución 1. Es aplicación directa de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. $\square$

Solución 2. Transformamos la desigualdad a probar en

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$$

Es claro que para $n = 1$ se tiene una igualdad. Supuesta la desigualdad para $n - 1$ (con $n \geq 2$), tomando cocientes será suficiente ver que

$$n = \frac{n!}{(n-1)!} \leq \frac{(\frac{n+1}{2})^n}{(\frac{n}{2})^{n-1}} = \frac{1}{2}(n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}$$

para probarla para n. Observemos ahora que $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-1}$ es una sucesión creciente al número e que vale 2 cuando $k = 1$, luego tenemos que

$$\frac{1}{2}(n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} \geq \frac{1}{2}(n+1) \cdot 2 = n + 1 > n$$

lo que nos garantiza que, de hecho, la desigualdad original es estricta para $n \geq 2$. $\square$

Problema 3. *Sea* $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una aplicación tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen exactamente ocho parejas distintas* $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *verificando* $f(p, q) = n$ *(en otras palabras, cada número natural tiene exactamente ocho preimágenes por* f*). Probar que existen* $a, b \in \mathbb{N}$ *tales que* $f(a, b) > ab$*.*

Solución. Probemos que para algún $n \in \mathbb{N}$ hay más de $8n$ pares (a, b) verificando $ab \leq n$. En efecto, si tuviéramos que $f(a, b) \leq ab$ para cualesquiera a, b, entonces tendríamos que $f(a, b) \leq n$ para más de $8n$ pares (a, b) luego algún valor en $\{1, \ldots, n\}$ le sería asignado a más de 8 pares contradiciendo la hipótesis.

Visto eso, el número de pares (a, b) tales que $ab \leq n$ es justamente

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \geq n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - n$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de $x \in \mathbb{R}$ (observemos que $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ coincide con el número de divisores de k en $\{1, \ldots, n\}$). Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, habrá de ser mayor o igual que 9 a partir de un término, lo que nos lleva a que existirán $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $f(a, b) > ab$.

Cuando incluimos el cero como natural, es fácil ver que el resultado sigue siendo cierto. Es fácil darse cuenta además de que el número 8 no juega un papel destacado en el problema. $\square$

Problema 4. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, definamos*

$$a(x) = \text{ínf} \left\{ \left| x - \sqrt{p^2 + 2q^2} \right| : p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

i) Probar que el ínfimo de la definición se alcanza para cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir, realmente es un mínimo.

ii) Estudiar la existencia del límite $\text{lím}_{x\to+\infty} a(x)$ *y, de existir, calcularlo.*

Solución. En primer lugar, observamos que los elementos de la forma $\sqrt{p^2 + 2q^2}$ son los radios de círculos con centro en el origen y que pasan por $(p, q\sqrt{2})$ luego todo apunta a que si existe $\text{lím}_{x\to\infty} a(x)$, éste debe ser cero ya que dichos círculos parecen amontonarse más cuando crecen p y q. Además, en cada intervalo compacto hay sólo un número finito de estos radios, luego no se acumulan y el ínfimo de la definición es un mínimo.

Si $x > 0$ y escribimos $m < x \leq m + 1$ para cierto $m \in \mathbb{N}$ y tomamos el mayor $n \in \mathbb{N}$ tal que $m^2 + 2n^2 < k^2$, tenemos que $\sqrt{m^2 + 2n^2} < k \leq \sqrt{m^2 + 2(n+1)^2}$ y la distancia de k al punto más cercano de la forma $\sqrt{p^2 + 2q^2}$ es menor que la longitud de este intervalo que, a su vez, es menor que $(2n+1)/\sqrt{m^2 + 2n^2} < (2n+1)/m < (4\sqrt{m} + 1)/m$ que tiende a cero cuando $r \to \infty$. Para la última acotación usamos que $\sqrt{r + x} - \sqrt{r} < 1 + \frac{x}{2\sqrt{r}}$ para todo $r > 0$, fórmula que se deduce del desarrollo de Taylor de la raíz cuadrada.

Hemos probado así que $\text{lím}_{x\to+\infty} a(x) = 0$. $\square$

Problema 5. *Sea V un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{5\times 10}(\mathbb{R})$. Supongamos que V contiene elementos de rango* 0*,* 1*,* 2*,* 4 *y* 5*. ¿Implica ésto que V tenga algún elemento de rango* 3*?*

Solución. La respuesta es no. Un ejemplo es el siguiente:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

tiene elementos de rango cero (para $a = b = c = 0$) de rango 1 (para $a = b = 0$ y $c = 1$), de rango dos (para $a = c = 0$ y $b = 1$), de rango cuatro (para $a = 1$, $b = c = 0$) y de rango cinco (para $a = c = 1$, $b = 0$) pero no tiene elementos de rango tres.

Es fácil darse cuenta además que añadiendo o quitando columnas nulas, esto vale para cualquier $\mathcal{M}_{5\times k}(\mathbb{R})$ siempre que $k \geq 5$. $\square$

Problema 6. *Razonar si existe una familia* $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *verificando simultáneamente las siguientes tres condiciones:*

(1) Cada K_n *es compacto.*

(2) Cada K_n *está contenido en* $\mathbb{Q}$.

(3) Si $K \subseteq \mathbb{R}$ *es otro compacto contenido en* $\mathbb{Q}$*, entonces existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $K \subseteq K_n$.

Solución. Veamos que la respuesta es negativa.

Supongamos que $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de compactos de $\mathbb{Q}$ y consideremos I_n el intervalo $[\frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{2n-1}}]$ y $T_n = I_n \cap \mathbb{Q}$. Es claro que podemos tomar $x_n \in T_n - K_n \neq \emptyset$ y se cumple que $\text{lím}\{x_n\} = 0$ luego $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es un conjunto compacto de racionales que cumple que $x_n \in K - K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego K no está contenido en ningún K_n. $\square$

Problema 7. *Sean a, b, c números naturales y consideremos el conjunto de puntos de coordenadas enteras del cubo $[1, a] \times [1, b] \times [1, c] \subseteq \mathbb{R}^3$ (es decir, una cuadrícula tridimensional con $a \cdot b \cdot c$ puntos). ¿Para qué valores de (a, b, c) se puede encontrar un camino cerrado que una todos los puntos, formado por segmentos paralelos a algún eje y de forma que cada uno de estos segmentos una dos de los puntos?*

Solución. Coloreamos los puntos de la cuadrícula de blanco y negro de manera que si una casilla es de color blanco (resp. negro), entonces la casilla de su derecha, la de su izquierda, la de delante, la de detrás, la de arriba y la de abajo sean de color negro (resp. blanco). En otras palabras, estamos coloreando como en un tablero de ajedrez tridimensional.

Observemos entonces que un camino va uniendo alternativamente casillas blancas y negras, luego al ser cerrado habrá de contener el mismo número de puntos blancos que negros y, en particular, el número de puntos tendrá que ser par. Esto sólo puede ocurrir en el caso de que uno de los tres números a, b, c sea par, luego hemos encontrado una condición necesaria para que exista el camino cerrado buscado.

Es fácil darse cuenta de que la condición también es suficiente, esto es, si uno de los tres números es par, existe el camino cerrado, ejercicio que se deja al lector. $\square$

Problema 8. *Consideremos el subconjunto de números reales*

$$\Omega = \left\{ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

¿Existe una sucesión de elementos de Ω convergiendo a $\sqrt{\pi}$?

Solución. Usando la identidad $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ tenemos que

$$a_n := \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ luego para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n < \varepsilon$. Es claro entonces que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|ma_n - \sqrt{\pi}| < \varepsilon$, luego el número

$$x := ma_n = \sqrt[3]{m^3(n+1)} - \sqrt[3]{m^3 n} \in \Omega$$

verifica que $|x - \sqrt{\pi}| < \varepsilon$ y hemos encontrado puntos de Ω arbitrariamente próximos a $\sqrt{\pi}$, lo que da respuesta afirmativa a la pregunta del enunciado. $\square$

Nota: Es obvio que el número $\sqrt{\pi}$ no juega un papel destacado en la solución. De hecho, una demostración similar permite construir sucesiones de puntos de Ω convergiendo a cualquier número real. Ω es otro ejemplo, junto con $\mathbb{Q}$, de un conjunto denso y numerable en $\mathbb{R}$.

Problema 9. *Supongamos que coloreamos cada punto de $\mathbb{R}^2$ usando tres colores distintos.*

a) Probar que existen necesariamente dos puntos del mismo color a distancia 1.

b) Dar un número de colores para el que no existan puntos del mismo color a distancia 1.

Solución (de Juan M. Urbano (a) y Samuel Johnson (b)). Supongamos por reducción al absurdo que es posible colorear los puntos del plano con tres colores de modo que no existan dos puntos a distancia 1 con un mismo color. Dados dos puntos cualesquiera A y B del plano a distancia $\sqrt{3}$ han de tener el mismo color, pues basta trazar las correspondientes circunferencias de radio 1 centradas en A y en B, las cuales se cortan en dos puntos D y E ambos distando 1 de A y de B. Ésto nos permite obtener la contradicción deseada pues basta considerar tres puntos del plano A, B y C tales que la distancia entre A y B sea igual a $\sqrt{3}$, así como la distancia entre A y C, mientras que la distancia entre B y C sea igual a 1. Por una parte llegamos a que A y B han de tener el mismo color, así como A y C, y por otra que B y C no pueden tener el mismo color al estar a distancia 1. Por consiguiente han de existir siempre al menos dos puntos coloredos con un mismo color a distancia 1.

Se puede cubrir el plano con 7 colores sin que ningún punto del mismo color se encuentre a distancia 1. Para conseguirlo, se tesela el plano con hexágonos regulares de arista a. Llamemos h_1 a una casilla cualquiera, que pintaremos (su interior) de color 1. Elegimos un hexágono vecino h_2 y lo pintamos de color 2. El vecino de h_2 opuesto a h_1 es h_3, que pintaremos de color 3, y así sucesivamente hasta el color 7. Luego se comienza de nuevo por el color 1. Hay dos hexágonos que están en contacto simultáneamente con h_1 y h_2: uno lo pintaremos de color 4 y otro de color 6. A partir de ellos, se llenan cíclicamente sus filas con los siete colores del mismo modo que con la fila de las casillas h_1 y h_2. Los bordes de los hexágonos se colorean de un color arbitrario de entre los de los hexágonos que bordean. Si tomamos $a < 1/2$ tenemos que dos puntos de un mismo hexágono están a distancia menor que 1 luego no se contradice el enunciado. Es fácil calcular además que la distancia entre dos hexágonos distintos que estén coloreados con el mismo color es al menos $a\sqrt{7}$ luego tomando $a > 1/\sqrt{7}$ tenemos las condiciones buscadas. $\square$

Problema 10. *¿Qué elementos de la sucesión*

$$\{101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101, \ldots\}$$

son números primos?

Solución. En primer lugar, 101 es un número primo. Los demás elementos de esta sucesión se pueden escribir como

$$\sum_{k=0}^{n} 100^k = \frac{100^{n+1}-1}{99} = \begin{cases} (10^{n+1}+1) \cdot \frac{10^{n+1}-1}{9 \cdot 11} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{10^{n+1}+1}{11} \cdot \frac{10^{n+1}-1}{9} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

para $n \geq 2$ y los dos factores que aparecen en la última expresión son números enteros mayores que 1 luego, salvo 101, todos los elementos son números compuestos. $\square$

Problema 11. *Supongamos que $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(1) = 1$ y*

$$f'(x) = \frac{x}{x^4 + f(x)^4}, \quad \forall x > 1$$

a) Probar que f es creciente.

b) Dar una cota superior para f.

Solución (de Samuel Johnson). De la expresión de $f'(x)$ se deduce que $f'(x) > 0$, $\forall x > 1$ luego $f(x)$ es estrictamente creciente y $f(x) > 1$, $\forall x > 1$. Si definimos una nueva función derivable $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$h'(x) = \frac{x}{x^4 + 1}, \forall x > 1$$

tendremos que $h'(x) > f'(x)$, $\forall x > 1$. Si $h(1) = 1$, entonces $h(x) \geq f(x)$ en todo el intervalo (cumpliéndose la igualdad sólo en $x = 1$). La función $h(x)$ se puede integrar, dando $h(x) = \arctan(x^2)/2 + 1 - \pi/8$. Su tendencia asintótica será $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1 + \pi/8$. Por lo tanto, una cota superior para $f(x)$ es $L_0 = 1 + \pi/8 \approx 1{,}39...$ □

Acerca de la optimalidad de la cota (dos formas de acercarse al supremo de la función):

1. En la línea que propone Samuel Johnson, para cada $\varepsilon > 0$, puede definirse una sucesión por recurrencia como $a_1 = 1$ y

   $$a_{n+1} = a_n + \varepsilon \frac{1 + \varepsilon n}{(1 + \varepsilon n)^4 + a_n^4}$$

   En vista de que $f''(x) < 0$ y, por tanto, $f(x + \varepsilon) < f(x) + \varepsilon f'(x)$ según la fórmula de Taylor. Haciendo tender $n \to \infty$ se obtiene una aproximación por exceso del valor del límite en función de ε. Ahora haciendo tender $\varepsilon \to 0$ se tiene una sucesión de cotas del límite pero no es claro que esta sucesión converja al supremo de la función (puede consultarse el método de Euler que se usa para probar la existencia de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias).

2. Una forma más intuitiva de mejorar las cotas consiste en utilizar la cota superior dada por $1 + \pi/8$ en la solución para obtener una cota inferior mediante

   $$f(x) \geq f(1) + \int_1^\infty \frac{x}{x^4 + (1 + \pi/8)^4} dx = g(x)$$

   y ahora usar la cota inferior $g(x)$ para obtener una cota superior mediante el mismo método. Reiterando este proceso, obtenemos una sucesión de cotas superiores que, claramente, es decreciente pero ¿convergerá esta sucesión al supremo de la función?

Problema 12. *Sea V un espacio vectorial de dimensión 10 y sean F, G subespacios vectoriales de V de dimensiones 3 y 6 respectivamente y tales que $F \subseteq G$. Consideremos*

$$A = \{f : V \to V : f \text{ lineal y } f(F) \subseteq F, f(G) \subseteq G\}$$

a) Probar que A es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares usuales entre aplicaciones lineales.

b) Calcular la dimensión de A.

Solución. Veamos que A es un subespacio vectorial del espacio de todas las aplicaciones lineales de V en V. En primer lugar observamos que A es no vacío, pues la aplicación nula de V en V es lineal y verifica trivialmente los requisitos $f(F) \subseteq F$ y $f(G) \subseteq G$. Comprobemos que para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $f, g \in A$, se verifica que $\lambda f + \mu g \in A$. Si $v \in F$, tenemos $(\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v)$ y como $f(v), g(v) \in F$ y F es subespacio vectorial de V, obtenemos que $(\lambda f + \mu g)(v) \in F$. De manera totalmente análoga, se comprueba que si $v \in G$, entonces $(\lambda f + \mu g)(v) \in G$. Por tanto, $\lambda f + \mu g \in A$ y A es subespacio vectorial.

Construimos una base $\mathbb{B}$ de V como sigue. Partimos de una base $\mathbb{B}_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ para el subespacio F, la ampliamos a una base de G, $\mathbb{B}_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, y por último ampliamos ésta a una base de V, $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$. Usando esta base, podemos ver A como un subespacio del espacio vectorial de matrices de orden 10 $\mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ y es claro que toda matriz de A tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} X & & \\ 0 & Y & Z \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

siendo X, Y y Z matrices de órdenes 3×3, 6×3 y 10×4, respectivamente. De aquí obtenemos que $\dim(A) = 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 67$. $\square$

Problema 13. *Para cada número natural $n \geq 2$, consideremos*

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^3 - A = I_n\}$$

donde I_n es la matriz indentidad de orden n.

a) Probar que cada E_n es no vacío.

b) Probar que $\det A > 0$ *para cualquier $A \in E_n$.*

Solución. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x - 1$. Como f es continua y se tiene que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, el teorema de Bolzano nos asegura que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Tomando $A = \alpha I$, es inmediato que $A^3 - A = \alpha^3 I - \alpha I = I$ y, por tanto, $A \in E_n$ y este conjunto no es vacío.

Sea ahora una matriz cualquiera $A \in E_n$ y veamos que $\det(A) > 0$. La hipótesis $A^3 = A + I$ implica que $A(A + I)(A - I) = A^3 - A = I$ y, en particular, ninguna de las matrices A, $A + I$, $A - I$ tiene determinante cero. Además, la igualdad $A^3 = A + I$ también nos dice que $\det(A)$ y $\det(A + I)$ tienen el mismo signo, luego es suficiente ver que $\det(A + I)^3 \geq 0$. Desarrollando

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I = (A + I) + 3A^2 + 3A + I = A^2 + 2(A + I)^2$$

y factorizando $A^2 + 2(A + I)^2 = (A + i\sqrt{2}(A + I))(A - i\sqrt{2}(A + I))$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tenemos que

$$\det(A + I)^3 = \det(A + i\sqrt{2}(A + I)) \det(A - i\sqrt{2}(A + I)) = |\det(A + i\sqrt{2}(A + I))|^2 \geq 0$$

donde hemos usado que, en el producto anterior de determinantes, uno es conjugado del otro. $\square$

Problema 14. *Hallar las posibles funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la imagen de un intervalo cerrado de longitud d es un intervalo cerrado de longitud d para cualquier $d > 0$.*

Solución. La propiedad del enunciado nos dice que, dados $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x), f(y)$ pertenece a un intervalo de longitud $|x - y|$ luego $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, esto es, f es lipschitziana y, en particular, continua. Veamos que es inyectiva para lo que supongamos que $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$ cumplen que $f(x) = f(y)$ y consideremos $a, b \in [x, y]$ tales que $f(a) \geq f(z) \leq f(b)$ para todo $z \in [x, y]$, esto es, en a y b se alcanzan el máximo y el mínimo de f en $[x, y]$ respectivamente, extremos que existen por ser f continua. Entonces $f([x, y]) = [f(b), f(a)]$ y, por tanto $f(b) - f(a) = |x - y|$ luego $|x - y| = |f(b) - f(a)| \leq |a - b| \leq |x, y|$ donde la última igualdad se deduce de que $[a, b] \subseteq [x, y]$. Por tanto, $\{a, b\} = \{x, y\}$ y, como $f(x) = f(y)$, llegamos a que f es constante en $[x, y]$ contradiciendo que $f([x, y])$ es un intervalo de longitud $|x - y|$.

Como f es continua e inyectiva, entonces es monótona. Supongamos sin perder generalidad que es creciente (en caso de ser decreciente se razona cambiando f por $-f$). Observemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f([0, x]) = [f(0), f(x)]$ luego $f(x) = x + f(0)$ y, análogamente, $f(x) = x + f(0)$ para $x < 0$. Deducimos que las únicas funciones que cumplen la condición del enunciado son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Problema 15. *Sean A y B matrices cuyos elementos son números complejos y supongamos que verifican que $AB = A + B$. Probar que $AB = BA$.*

Solución. Es claro que ambas matrices tienen que ser cuadradas para que $AB = A + B$ tenga sentido. Ahora bien, esta igualdad la podemos escribir como $(A - I)(B - I) = I$. Como quiera que una matriz y su inversa conmutan, tenemos que $(B + I)(A + I) = I$. Desarrollando esta última igualdad llegamos a que $BA = A + B$, de donde $AB = BA$. $\square$

Problema 16. *¿Existe alguna función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *y tal que* $f(x) > 0$ *y* $f'(x) = f(f(x))$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$*?*

Solución. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cumpliendo los requisitos del enunciado. Como $f(x) > 0$, f es estrictamente creciente luego existe $a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $a \geq 0$ por ser $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es creciente, esto implica que $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$. Sin embargo, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = f(a)$ luego $f(a) = 0$ y hemos llegado a una contradicción. Esto prueba que no puede existir una función en tales condiciones. $\square$

Problema 17. *En un recinto cuadrado tenemos cuatro perros colocados en los vértices y un lobo en el centro. El lobo se puede mover en cualquier dirección a una velocidad de 40 km/h, mientras que cada perro se puede mover a 60km/h pero sólo se puede mover por los lados del cuadrado. Si el lobo se encuentra a un perro puede matarlo sin problemas pero si se encuentra a dos, éstos lo matan. ¿Tiene el lobo una estrategia para escapar del recinto cuadrado? ¿Tienen los perros una estrategia para que el lobo no escape sin morir en el intento?*

Solución. La estrategia ganadora la tienen los perros y es la siguiente. En cada momento, se trazan las dos rectas imaginarias paralelas a las diagonales del cuadrado y, en los cuatro puntos que estas dos rectas cortan a los lados del cuadrado, han de encontrarse siempre los perros. Esta es una estrategia ganadora ya que si el lobo llega a un punto de la frontera del cuadrado, al menos dos de estos puntos tienden a confundirse lo que se traduce en que habrá al menos dos perros esperándolo.

Vamos a justificar ahora que los perros pueden actuar de esta manera para lo que supondremos[1] que el lobo sigue un camino $\alpha : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Entonces, los perros siguen trayectorias de clase C^1 a trozos (los instantes en que dichas trayectorias dejan de ser derivables son cuando atraviesan un vértice, pero supondremos este dato despreciable). No es difícil comprobar que si $\beta(t)$ es la trayectoria de un perro sobre uno de los lados, entonces $\|\beta'(t)\| \leq \sqrt{2}\|\alpha'(t)\|$ lo que nos lleva a que si el lobo puede ir a una velocidad máxima de 40km/h, los perros no tendrán que superar una velocidad de $40\sqrt{2}$km/h $\approx$ 56,56km/h, lo que hace factible la estrategia ganadora de los perros. □

[1] Esta es una condición aceptable para poder hablar de velocidad.

Problema 18. *Sean* $x_1, \ldots, x_n$ *números reales arbitrarios. Probar que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \cos(x_i - x_j) \geq 0$$

Solución. Podemos expresar

$$\sum_{i,j=1}^{n} \cos(x_i - x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\cos(x_i)\cos(x_j) + \operatorname{sen}(x_i)\operatorname{sen}(x_j)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(x_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(x_i)\right)^2 \geq 0$$

donde hemos usado la fórmula del coseno de una diferencia y agrupado términos. $\square$

Problema 19. *Sea n un número natural. Calcular, en función de n el número de elementos de la siguiente sucesión que son múltiplos de n.*

$$\{9, 99, 999, 9999, \ldots\}$$

Solución. Es obvio que si n es múltiplo de 2 o de 5, entonces ningún término de la sucesión es divisible entre n. Sin embargo, vamos a probar que cualquier número que no sea múltiplo de 2 ni de 5 divide a infinitos términos de la sucesión. En efecto, si n es primo relativo con 10, el teorema de Euler nos asegura que $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{10}$, donde $\varphi(n)$ es el número de enteros entre 1 y n primos relativos con n. Por tanto, $10^{k\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{10}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, lo que nos dice que $10^{k\varphi(n)} - 1$ es divisible por n para todo $k \in \mathbb{N}$ y esto nos da infinitos términos de la sucesión del enunciado que son divisibles por n. $\square$

Problema 20. *Encontrar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución (de Francisco de los Santos). En primer lugar, es fácil ver que la función constante cero es solución de la ecuación. Supondremos en lo que sigue que $f(x)$ no es idénticamente nula.

Se pueden obtener propiedades de f asignando valores a x e y. Por ejemplo, igualando $y = 0$ en la ecuación se obtiene $f(x)^2 = f(x)^2 f(0)^2 \ \forall x$, lo que implica que $f(0)^2 = 1$ porque, al no ser f idénticamente nula, existe por lo menos un real x tal que $f(x) \neq 0$. De aquí y de considerar $x = y$ se comprueba que $f(2x) = f(x)^4$. Veamos ahora que esta propiedad, junto con la de continuidad, implica que $f(x)$ no se anula nunca. En efecto, de existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ se llegaría a una contradicción porque entonces $f(x_0) = f(x_0/2)^4 = 0$, es decir, $x_0/2$ también será un cero de f y, por iteración, también lo sería cualquier número de la forma $x_0/2^n$. Ahora bien, tomando el límite $n \to \infty$ y usando la continuidad de f,

$$0 = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = \pm 1 \neq 0.$$

Puesto que f no se anula, $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2 > 0$, y como los números $x+y$ y $x-y$ son independientes se concluye que f tiene signo constante. Supongamos que $f(x) > 0$, lo que permite definir la función $g(x) = \log f(x)$ y transformar la ecuación original en

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y). \tag{1}$$

La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua por ser composición de funciones continuas. Nuevamente, de imponer $x = y$ se obtiene una propiedad útil, a saber, $g(2x) = 4g(x)$. A partir de ella, se observa por inspección que $g(x) = x^2$ es solución de (1). Esto sugiere una nueva (y definitiva) descomposición, $g(x) = x^2 h(x)$. Claramente, h es continua y ha de satisfacer $h(x) = h(2x) \ \forall x$. De aquí se concluye que $h(x) = h(x/2^n) \ \forall x$ y, tomando límite cuando $n \to \infty$, que $h(x) = h(0)$ es constante.

En consecuencia, las soluciones son la función nula y $f(x) = \pm e^{cx^2}$, siendo c un real arbitrario. En particular, si $c = 0$ se obtienen las soluciones constantes $f(x) = \pm 1$ y la solución nula puede verse como la que se obtiene en el límte $c \to -\infty$. $\square$

Problema 21. *En cada uno de los vértices de un cuadrado de lado 10 km. se halla una tortuga. Las tortugas comienzan a moverse (no necesariamente por los lados del cuadrado) a una velocidad constante de 1 km/h de forma que su dirección siempre apunta a la tortuga del vértice consecutivo en el sentido de las agujas del reloj.*

a) *Describir analíticamente la trayectoria de cada tortuga.*

b) *¿Se encontrarán las tortugas en algún momento? En caso afirmativo, calcular el tiempo que transcurre hasta dicho momento.*

Problema 22. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq m < n$ y sea $P(x)$ un polinomio de grado m. Probar que*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k) = 0.$$

Solución. Será suficiente probarlo en el caso en que $P(x) = x^j$ con $j < n$ puesto que en el caso general, $P(x)$ es una combinación lineal de potencias de x y la fórmula que queremos probar es lineal en P. Para ello, consideremos las cantidades

$$a_j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^j$$

y la siguiente identidad, que se deduce del teorema del binomio de Newton:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k.$$

Evaluando en $x = 0$, tenemos que $a_0 = 0$ y, derivando ambos miembros respecto de x reiteradamente,

$$\begin{aligned}
-n(1-x)^{n-1} \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}kx^{k-1} \\
n(n-1)(1-x)^{n-2} \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2} \\
&\vdots \\
n(n-1)\cdots(n-m+1)(1-x)^{n-j} \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m}
\end{aligned}$$

Evaluando estas igualdades en $x = 1$, tenemos que la primera de ellas nos da $a_1 = 0$, la segunda $a_2 - a_1 = 0$, la tercera $a_3 - 3a_2 + 2a_1 = 0$, etc, y nos queda un sistema de ecuaciones homogéneo y triangular que tienen que satisfacer los a_j. Deducimos de esto que $a_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ y hemos terminado la demostración. $\square$

Problema 23. *Sean a, b, c números reales positivos. Hallar todas las soluciones $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la ecuación*

$$\sqrt{a^x b^y + a^x c^z} + \sqrt{a^x b^y + b^y c^z} + \sqrt{a^x c^z + b^y c^z} = \sqrt{2}(a^x + b^y + c^z)$$

Solución. Sean $u = (\sqrt{a^x}, \sqrt{b^y}, \sqrt{c^z})$ y $v = (\sqrt{b^y + c^z}, \sqrt{a^x + c^z}, \sqrt{a^x + b^y})$. Es fácil ver que aplicando a estos vectores la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos que

$$\sqrt{a^x b^y + a^x c^z} + \sqrt{a^x b^y + b^y c^z} + \sqrt{a^x c^z + b^y c^z} \leq \sqrt{2}(a^x + b^y + c^z)$$

para cualesquiera $a, b, c > 0$ y $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ahora la ecuación del enunciado se traduce en ver para qué valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ tenemos una igualdad, y esto ocurre si, y sólo si, existe $\lambda > 0$ tal que $u = \lambda v$ (observemos que u no puede ser el vector cero). Más explícitamente, buscamos los valores de $x, y, z, \lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$ que cumplan que

$$\begin{cases} \sqrt{a^x} = \lambda\sqrt{b^y + c^z} \\ \sqrt{b^y} = \lambda\sqrt{a^x + c^z} \\ \sqrt{c^z} = \lambda\sqrt{a^x + b^y} \end{cases}$$

Elevando al cuadrado las tres ecuaciones anteriores y sumando los resultados se llega a que $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ahora esas mismas ecuaciones al cuadrado nos dicen que $2a^x = b^y + c^z$, $2b^y = a^x + c^z$ y $2c^z = a^x + b^y$. Este sistema lineal de ecuaciones homogéneo en a^x, b^y y c^z tiene un grado de libertad y sus soluciones son las que cumplen $a^x = b^y = c^z$. Tomando logaritmos, tenemos que $x \log(a) = y \log(b) = z \log(c)$, que es un sistema lineal homogeneo de dos ecuaciones en x, y, z en el que distinguimos casos según su rango:

- Si $a = b = c = 1$, entonces cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación.
- Si dos de los tres números a, b, c son iguales a 1 y el otro distinto de 1, pongamos $a = b = 1$ y $c \neq 1$ sin pérdida de generalidad, entonces tenemos que las soluciones de la ecuación son $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Si uno de los tres números a, b, c es igual a 1 y los otros dos distintos de 1, pongamos $a = 1$ y $b, c \neq 1$ sin pérdida de generalidad, entonces las soluciones de la ecuación son $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
- Si ninguno de los tres números a, b, c es igual a 1, entonces las soluciones del sistema son

$$\left\{ \left(\tfrac{t}{\log(a)}, \tfrac{t}{\log(b)}, \tfrac{t}{\log(c)} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Puede comprobarse fácilmente que, en cada uno de los casos, todas estas son soluciones de la ecuación y, por tanto, son las únicas. $\square$

Problema 24. *Para cada número natural $n \geq 3$, consideremos*

$$A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3\}\}$$

Tomemos H_n como el conjunto de vectores de A_n que no tienen tres componentes consecutivas iguales y tomemos K_n el conjunto de vectores de A_n en los que no hay dos componentes con valor 3 consecutivas. Calcular, en función de n, el cociente

$$\frac{|H_{n+1}|}{|K_n|}$$

donde $|\Omega|$ indica el número de elementos de un conjunto Ω.

Solución. Cambiemos 3 por 0 para trabajar cómodamente en $\mathbb{Z}_3$. Consideremos la aplicación

$$\varphi : \mathbb{Z}_3 \times K_n \to H_{n+1}, \quad \varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = (a, a + x_1, a + x_1 + x_2, \ldots, a + \textstyle\sum_{k=1}^n x_k)$$

Es obvio que esta aplicación está bien definida ya que si no hay dos componentes con valor cero consecutivas entre los x_k, entonces $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n)$ no tiene tres componentes iguales consecutivas. También es muy fácil ver que φ es inyectiva y que la aplicación

$$\psi : H_{n+1} \to \mathbb{Z}_3 \times K_n, \quad \psi(y_1, \ldots, y_{n+1}) = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots, y_{n+1} - y_n)$$

está bien definida y cumple que $\varphi \circ \psi$ es la identidad en H_{n+1} luego φ es sobreyectiva. Deducimos que φ es una biyección y, por tanto, $3|K_n| = |\mathbb{Z}_3 \times K_n| = |H_{n+1}|$. En particular, el cociente que buscamos vale 3 para cualquier valor de $n \geq 3$. $\square$

Problema 25. *Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular*

$$M_a = \sup_{p,q \in \mathbb{R}} \operatorname{long}\{x \in \mathbb{R} : |ax^2 + px + q| \leq 1\}$$

donde denotamos por $\operatorname{long}(\Omega)$ *la longitud de un conjunto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Solución. Es evidente que $M_{-a} = M_a$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y que $M_0 = +\infty$. También es claro que $M_a = aM_1$ para $a > 0$ luego será suficiente calcular el valor de M_1 y nos centraremos en este caso.

Por otro lado, es obvio que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la parábola $x \mapsto x^2 + nx - 1$ (es la que se obtiene para $p = n$ y $q = -1$) cumple que

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - nx - 1| \leq 1\} = \left[\tfrac{1}{2}(n - \sqrt{n^2+8}), \tfrac{1}{2}(n + \sqrt{n^2+8})\right]$$

cuya longitud tiende a infinito cuando $n \to \infty$. Deducimos que $M_a = +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $\square$