Problema 1. *Sea n un número natural que no sea múltiplo de 2 ni de 3 y consideremos un tablero cuadrado $n \times n$. Probar que se puede escribir en cada casilla un número del 1 al n de forma que no haya dos números iguales en ninguna fila, columna o diagonal.*

Problema 2. *Sea n un número natural. Demostrar la desigualdad*

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq n+1$$

y estudiar para qué valores de n se tiene una igualdad.

Problema 3. *Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen exactamente ocho parejas distintas $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verificando $f(p, q) = n$ (en otras palabras, cada número natural tiene exactamente ocho preimágenes por f). Probar que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $f(a, b) > ab$.*

Problema 4. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, definamos*

$$a(x) = \text{ínf}\left\{\left|x - \sqrt{p^2 + 2q^2}\right| : p, q \in \mathbb{N}\right\}$$

i) Probar que el ínfimo de la definición se alcanza para cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir, realmente es un mínimo.

ii) Estudiar la existencia del límite $\text{lím}_{x \to \infty} a(x)$ y, de existir, calcularlo.

Problema 5. *Sea V un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{5\times 10}(\mathbb{R})$. Supongamos que V contiene elementos de rango 0, 1, 2, 4 y 5. ¿Implica ésto que V tenga algún elemento de rango 3?* (3 puntos)

Problema 6. *Razonar si existe una familia $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ verificando simultáneamente las siguientes tres condiciones:*

(1) Cada K_n es compacto.

(2) Cada K_n está contenido en $\mathbb{Q}$.

(3) Si $K \subseteq \mathbb{R}$ es otro compacto contenido en $\mathbb{Q}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_n$.

Problema 7. *Sean a, b, c números naturales y consideremos el conjunto de puntos de coordenadas enteras del cubo $[1, a] \times [1, b] \times [1, c] \subseteq \mathbb{R}^3$ (es decir, una cuadrícula tridimensional con $a \cdot b \cdot c$ puntos). ¿Para qué valores de (a, b, c) se puede encontrar un camino cerrado que una todos los puntos, formado por segmentos paralelos a algún eje y de forma que cada uno de estos segmentos una dos de los puntos?*

Problema 8. *Consideremos el subconjunto de números reales*

$$\Omega = \left\{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

¿Existe una sucesión de elementos de Ω convergiendo a $\sqrt{\pi}$

Problema 9. *Supongamos que coloreamos cada punto de $\mathbb{R}^2$ usando tres colores distintos.*

a) *Probar que existen necesariamente dos puntos del mismo color a distancia 1.*

b) *Dar un número de colores para el que no existan puntos del mismo color a distancia 1.*

Problema 10. *¿Qué elementos de la sucesión*

$$\{101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101, \ldots\}$$

son números primos?

Problema 11. *Supongamos que* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es una función derivable tal que* $f(1) = 1$ *y*

$$f'(x) = \frac{x}{x^4 + f(x)^4}, \quad \forall x > 1$$

a) *Probar que* f *es creciente.*

b) *Dar una cota superior para* f.

Problema 12. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión 10 y sean* F, G *subespacios vectoriales de* V *de dimensiones 3 y 6 respectivamente y tales que* $F \subseteq G$. *Consideremos*

$$A = \{f : V \to V : f \text{ lineal y } f(F) \subseteq F, f(G) \subseteq G\}$$

a) *Probar que* A *es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares usuales entre aplicaciones lineales.*

b) *Calcular la dimensión de* A.

Problema 13. *Para cada número natural* $n \geq 2$, *consideremos*

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^3 - A = I_n\}$$

donde I_n *es la matriz indentidad de orden* n.

a) *Probar que cada* E_n *es no vacío.*

b) *Probar que* $\det A > 0$ *para cualquier* $A \in E_n$.

Problema 14. *Hallar las posibles funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que la imagen de un intervalo cerrado de longitud* d *es un intervalo cerrado de longitud* d *para cualquier* $d > 0$.

Problema 15. *Sean* A *y* B *matrices cuyos elementos son números complejos y supongamos que verifican que* $AB = A + B$. *Probar que* $AB = BA$.

Problema 16. *¿Existe alguna función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *y tal que* $f(x) > 0$ *y* $f'(x) = f(f(x))$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$*?*

Problema 17. *En un recinto cuadrado tenemos cuatro perros colocados en los vértices y un lobo en el centro. El lobo se puede mover en cualquier dirección a una velocidad de 40 km/h, mientras que cada perro se puede mover a 60km/h pero sólo se puede mover por los lados del cuadrado. Si* *el lobo se encuentra a un perro puede matarlo sin problemas pero si se encuentra a dos, éstos lo matan. ¿Tiene el lobo una estrategia para escapar del recinto cuadrado? ¿Tienen los perros una estrategia para que el lobo no escape sin morir en el intento?*

Problema 18. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales arbitrarios. Probar que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \cos(x_i - x_j) \geq 0$$

Problema 19. *Sea n un número natural. Calcular, en función de n el número de elementos de la siguiente sucesión que son múltiplos de n.*

$$\{9, 99, 999, 9999, \ldots\}$$

Problema 20. *Encontrar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 21. *En cada uno de los vértices de un cuadrado de lado 10 km. se halla una tortuga. Las tortugas comienzan a moverse (no necesariamente por los lados del cuadrado) a una velocidad constante de 1 km/h de forma que su dirección siempre apunta a la tortuga del vértice consecutivo en el sentido de las agujas del reloj.*

a) Describir analíticamente la trayectoria de cada tortuga.

b) ¿Se encontrarán las tortugas en algún momento? En caso afirmativo, calcular el tiempo que transcurre hasta dicho momento.

Problema 22. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq m < n$ y sea $P(x)$ un polinomio de grado m. Probar que*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$$

Problema 23. *Sean a, b, c números reales positivos. Hallar todas las soluciones $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la ecuación*

$$\sqrt{a^x b^y + a^x c^z} + \sqrt{a^x b^y + b^y c^z} + \sqrt{a^x c^z + b^y c^z} = \sqrt{2}(a^x + b^y + c^z)$$

Problema 24. *Para cada número natural $n \geq 3$, consideremos*

$$A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3\}\}$$

Tomemos H_n como el conjunto de vectores de A_n que no tienen tres componentes consecutivas iguales y tomemos K_n el conjunto de vectores de A_n en los que no hay dos componentes con valor 3 consecutivas. Calcular, en función de n, el cociente

$$\frac{|H_{n+1}|}{|K_n|}$$

donde $|\Omega|$ indica el número de elementos de un conjunto Ω.

Problema 25. *Para cada* $a \in \mathbb{R}$, *calcular*

$$M_a = \sup_{p,q \in \mathbb{R}} \operatorname{long}\{x \in \mathbb{R} : |ax^2 + px + q| \leq 1\}$$

donde denotamos por $\operatorname{long}(\Omega)$ *la longitud de un conjunto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.