Problema nº 1
Propuesto el 15 de Enero de 2007
Abierto hasta el 12 de Febrero de 2007

Dado un número real positivo L, demostrar que existe una sucesión de números naturales $\{x_n\}$ verificando las siguientes dos condiciones:

a) $\{x_n\}$ *es estrictamente creciente.*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = L$

Problema nº 2
Propuesto el 15 de Enero de 2007
Abierto hasta el 12 de Febrero de 2007

Colocamos tres bolas esféricas macizas de radio 1 sobre una mesa de forma que cada una de ellas sea tangente a las otras dos y a la mesa. ¿Cuál es el radio de una cuarta bola que sea tangente a estas tres y a la mesa?

Problema nº 3
Propuesto el 15 de Enero de 2007
Abierto hasta el 12 de Febrero de 2007

Tenemos un dado de 6 caras numeradas del 1 a 6 y en el que dos caras cualesquiera tienen la misma probabilidad de salir en una tirada. Si lanzamos n veces el dado,
¿con qué probabilidad la suma de los resultados obtenidos es un múltiplo de 5?

Problema nº 4
Propuesto el 15 de Enero de 2007
Abierto hasta el 12 de Febrero de 2007

Supongamos que una función creciente $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *verifica las condiciones*

i) $f(1) = 1$

ii) $f(\frac{x}{3}) = \frac{f(x)}{2}$ *para cualquier* $x \in [0,1]$.

iii) $f(1-x) = 1 - f(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$

Demostrar que f *es continua y calcular* $f(\frac{207}{2007})$.

Problema nº 5
Propuesto el 15 de Enero de 2007
Abierto hasta el 12 de Febrero de 2007

Sea $n \in \mathbb{N}$ *y consideremos la matriz cuadrada* A *de orden* $n \times n$ *tal que el elemento que se encuentra en la fila* i*-ésima y en la columna* j*-ésima de* A *viene dado por*

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}$$

Calcular el determinante de A.

Problema nº 6

Propuesto el 12 de Febrero de 2007
Abierto hasta el 12 de Marzo de 2007
(Se admiten soluciones de apartados sueltos)

Supongamos que $f, g : [0,1] \to [0,1]$ *son funciones continuas que cumplen*

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \text{ para cualquier } x \in [0,1]$$

a) *Demostrar que existe* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = g(x_0)$.

b) *¿Es cierto (a) si sólo una de las funciones es continua?*

c) *Dar un ejemplo en el que* f *y* g *no tengan puntos fijos comunes, es decir, no exista* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

Problema nº 7

Propuesto el 12 de Febrero de 2007
Abierto hasta el 12 de Marzo de 2007

Sea k *un número natural. Se pide probar cuál es el mínimo número natural* n *(si existe) tal que* $5^n - 1$ *es múltiplo de* 2^k.

Problema nº 8
Propuesto el 19 de Febrero de 2007
Abierto hasta el 19 de Marzo de 2007

Hay un montón de 2000 piedras. Ana y Fran se turnan para quitar alternadamente piedras respetando las siguientes reglas:

i) En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 ó 5 piedras.

ii) No se puede retirar la misma cantidad de piedras que quitó el otro jugador la vez anterior.

y pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida.
Si empieza Ana, ¿hay alguna estrategia que le permita ganar a uno de ellos siempre, independientemente de lo que haga el otro?

Problema nº 9
Propuesto el 26 de Febrero de 2007
Abierto hasta el 26 de Marzo de 2007

Dada $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación biyectiva, determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

es o no convergente a un número real.

Problema nº 10
Propuesto el 12 de Marzo de 2007
Abierto hasta el 9 de Abril de 2007

Sea $[a,b]$ un intervalo compacto no vacío, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $\lambda > 0$. Demostrar que la única solución del problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) - \lambda x(t) = 0 \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

es $x(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Problema nº 11
Propuesto el 12 de Marzo de 2007
Abierto hasta el 9 de Abril de 2007

Sean a, b, c números enteros distintos. Demostrar que no existe ningún polinomio P con coeficientes enteros y tal que

$$P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$$

Problema nº 12
Propuesto el 12 de Marzo de 2007
Abierto hasta el 9 de Abril de 2007

Partiendo de que $0 < y_1 < x_1$, consideramos la sucesión definida por

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x_n + y_n}{2}, \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \right)$$

Calcular los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

Problema nº 13

Propuesto el 10 de Abril de 2007
Abierto hasta el 7 de Mayo de 2007

Sea P_1 un triángulo equilátero de lado 1 y, para $n \geq 2$, definimos P_n como el polígono que resulta al eliminar en cada vértice de P_{n-1} el triangulito que tiene por lados un tercio de los lados adyacentes al vértice. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \text{Area}(P_n)$$

Nota: *Por ejemplo, P_2 es un hexágono regular de lado $\frac{1}{3}$, P_3 es un dodecágono irregular y cada polígono tiene el doble de lados que el precedente, aunque para $n \geq 3$ se pierde la regularidad.*

Problema nº 14

Propuesto el 10 de Abril de 2007
Abierto hasta el 7 de Mayo de 2007

Sea G un grupo finito de matrices reales $n \times n$ junto con la multiplicación de matrices. Probar que si la suma de las trazas de los elementos de G es cero, entonces la suma de los elementos de G es la matriz nula.

Problema nº 15

Propuesto el 16 de Abril de 2007
Abierto hasta el 14 de Mayo de 2007

Calcular el siguiente límite (en caso de que exista):

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$

Problema nº 16
Propuesto el 8 de Mayo de 2007
Abierto hasta el 5 de Junio de 2007

Sea G un grupo finito no conmutativo y $f : G \to G$ un isomorfismo de grupos. Consideremos el conjunto

$$A_f = \{g \in G : f(g) = g^{-1}\}$$

i) Demostrar que $|A_f| \leq \frac{3}{4}|G|$, donde $| \cdot |$ denota el número de elementos.

ii) ¿Puede darse la igualdad en la desigualdad establecida en (i)?

$\boxed{\text{Nota}}$ *En otras palabras, estamos acotando cuántos elementos como mucho puede llevar un automorfismo de G en sus correspondientes inversos.*

Problema nº 17
Propuesto el 8 de Mayo de 2007
Abierto hasta el 5 de Junio de 2007

En un prado hay una valla rodeando un círculo de radio 1. En un punto de la valla y de forma exterior al círculo, está atada una cabra con una cuerda de longitud π. Suponiendo que ni la cabra ni la cuerda puedan traspasar la valla, ¿cuál es el área de la superficie accesible para la cabra?

Problema nº 18
Propuesto el 14 de Mayo de 2007
Abierto hasta el 11 de Junio de 2007

¿Existe una familia no numerable de subconjuntos (distintos) de $\mathbb{N}$ con la propiedad de que los elementos de cualquier subfamilia (con al menos dos elementos) tengan intersección finita? Justificar la respuesta.

Problema nº 19
Propuesto el 14 de Mayo de 2007
Abierto hasta el 11 de Junio de 2007

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ verifica

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{n^2}{1+n^2}$$

¿Determina esta condición todas las derivadas de f en cero? En caso afirmativo, calcularlas; en caso negativo, justificarlo.

Problema nº 20 (ÚLTIMO DE ESTE CURSO)
Propuesto el 14 de Mayo de 2007
Abierto hasta el 11 de Junio de 2007

En un tablero $n \times n$ tenemos en cada casilla un cero y tenemos la siguiente jugada: elegir una casilla y sumarle uno a cada elemento de su fila y su columna (así, en cada jugada sumamos $2n-1$ unos).

i) Probar que mediante la reiteración de estas jugadas puede conseguirse que en todas las casillas haya un número impar

ii) Hallar en función de n el número mínimo de jugadas para lograr el objetivo establecido en (i).