

PRÁCTICA N° 1

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN MODULACIÓN (MTF) DE UN OJO REAL

Objetivo:

Calcular la función de transferencia en modulación (MTF) de ojos reales.

Para calcular numéricamente la función de transferencia de un sistema óptico (en nuestro caso el ojo) es necesario calcular los coeficientes de aberración correspondientes. Para ello hemos implementado dos programas. En el primero se obtienen los coeficientes de aberración esférica y desenfoque mediante un trazado de rayos a través del sistema óptico del ojo. En el segundo se calcula numéricamente la MTF, considerando los coeficientes de aberración y el efecto Stiles-Crawford.

Material:

Un ordenador con el programa MTF 1. Aplicación programada por Enrique Moreno Pérez, basada en la algorítmica de la Tesis doctoral de Rosario González Anera, Los datos de modelo de ojo han sido recopilados por Pepe Fernández Dorado. Coordinación: María del Mar Pérez.

Método: Utilizaremos (para calcular los coeficientes de aberración) un programa en el que se ha modelado un ojo parametrizando todos los valores que son necesarios para calcular objetivamente la respuesta en frecuencias de este sistema óptico. Una vez creado este modelo esquemático, es posible variar cada uno de los parámetros anatómicos con objeto de que el alumno pueda introducir los correspondientes a su propio ojo o a cualquier caso que se le ocurra estudiar. Haciendo un trazado de rayos en este modelo de ojo podemos

calcular los coeficientes de aberración correspondientes, los cuales son necesarios para calcular la MTF (a partir de la aberración de onda).

Revisión bibliográfica:

Para determinar la aberración esférica hemos implementado un trazado de rayos a través de las cuatro superficies esféricas de nuestro modelo de ojo: la superficie anterior de la córnea (1), la superficie posterior de la córnea (2), la superficie anterior del cristalino (3) y la superficie posterior del cristalino (4) (ver figura 1). No hay pérdida de generalidad si suponemos simetría axial para el sistema.

Considerando un punto objeto situado en el eje a una distancia muy lejana, hemos realizado el trazado de rayos variando la altura de incidencia (y_1) sobre la primera superficie del ojo, (superficie anterior de la córnea).

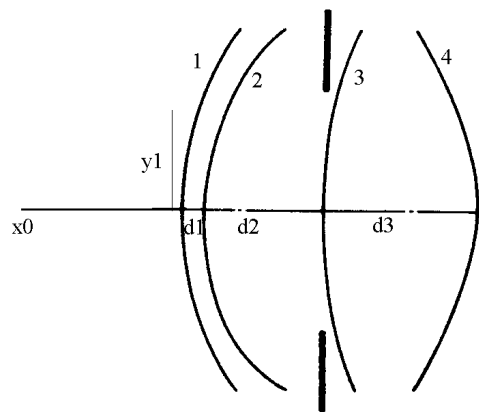


Figura 1. Esquema con las principales variables del trazado de rayos.

Las variables de entrada del programa son:

- Los radios de curvatura en el eje de cada una de las superficies del ojo (R_1 , R_2 , R_3 , R_4).

- Las asfericidades (parámetro Q) de cada una de las superficies (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).
- Las distancias entre cada una de las superficies: espesor corneal, profundidad de la cámara anterior y espesor del cristalino. (En realidad, las variables de entrada d_1, d_2 y d_3 están referidas a la superficie posterior del cristalino, que es donde hemos establecido nuestro origen).
- Los índices de refracción de cada uno de los medios en función de la longitud de onda (n_1, n_2, n_3, n_4).
- La altura de incidencia de los rayos sobre el eje del sistema óptico (y_1).
- La distancia entre el punto objeto lejano considerado y la superficie posterior del cristalino (x_0).
- El diámetro de la zona de ablación (d).
- El número de dioptrías que es necesario eliminar para emetropizar (D).
- El radio de la pupila de salida del ojo (R_p).

Una vez ejecutado este programa, la salida son mil pares de puntos que corresponden a la altura de cada rayo que entra en el modelo de ojo y los datos de aberración transversal correspondientes.

Para el cálculo de los coeficientes de aberración es necesario disponer de datos de aberraciones transversales. La aberración Esférica Transversal (AET) la hemos obtenido a partir de la Aberración Esférica Longitudinal (AEL) (ver figura 2 y ecuación 1). Para calcular la Aberración Esférica Longitudinal (AEL) hemos aplicado las leyes de la Óptica Geométrica, calculando el punto en el que cada rayo cortará el eje tras atravesar el ojo. En primer lugar calculamos el punto de corte del rayo con la primera superficie (superficie anterior de la córnea). Al tratarse de una superficie cónica, para cada rayo tenemos dos posibles puntos de corte. En el caso de una superficie convexa tomamos la menor de las soluciones. La superficie anterior de la córnea, la superficie posterior de la córnea, y la superficie anterior del cristalino son superficies convexas. La superficie posterior del cristalino es cóncava; en este caso hay que

estudiar los distintos casos, ya que el espesor del cristalino es de 4 mm. Una vez conocido el punto de corte del rayo con la superficie posterior del cristalino, y el ángulo que forma el rayo con el eje, podemos calcular el punto de corte del rayo con el eje.

Para determinar la Aberración Esférica Longitudinal (*AEL*) calculamos el punto imagen paraxial para un punto objeto muy alejado. La Aberración Esférica Longitudinal (*AEL*) se define como la distancia a la que corta al eje el rayo paraxial menos la distancia a la que corta al eje el no paraxial. La *AEL* hay que estudiarla respecto a un plano de referencia, en nuestro caso el plano considerado es el que pasa por el punto imagen paraxial para una longitud de onda de 555 nm; todos los valores de *AEL* estarán referidos a este plano.

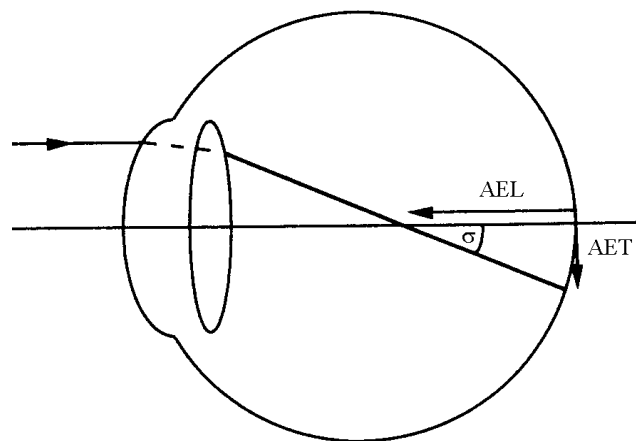


Figura 2. Esquema que muestra la relación entre el ángulo σ que forma el rayo con el eje, la *AEL* y la *AET*.

Para cada una de las alturas de incidencia de los rayos sobre nuestro sistema óptico hemos calculado la correspondiente Aberración Esférica Transversal (*AET*), (multiplicando la *AEL* por el ángulo que forma el rayo emergente con el eje (ver figura 2):

$$AEL = \frac{AET}{\tan \sigma} \quad (1)$$

donde σ es el ángulo que forma el rayo con el eje después de la última superficie de refracción y AET es la altura a la cual el rayo corta el plano imagen paraxial (en metros).

Una vez conocida la AET para cada una de las alturas de incidencia podemos calcular los coeficientes de aberración ajustando mediante mínimos cuadrados los datos a la siguiente expresión:

$$C_{20}(\lambda)y + C_{40}(\lambda)y^3 + C_{60}(\lambda)y^5 = \frac{-nAET}{R_w} \quad (2)$$

donde y es la altura del rayo sobre la pupila del salida del ojo; AET es la aberración esférica transversal correspondiente a ese rayo; n es el índice de refracción del espacio imagen y R_w es el radio de curvatura de la esfera de referencia.

Dados estos coeficientes de aberración podemos calcular $W_{20}(\lambda), W_{40}(\lambda), W_{60}(\lambda)$ que son los coeficientes de aberración de onda correspondientes al desenfoque, aberración esférica de tercer orden y aberración esférica de quinto orden respectivamente, mediante las expresiones:

$$W_{20}(\lambda) = \frac{1}{2} R_p^2 C_{20}(\lambda)$$

$$W_{40}(\lambda) = \frac{1}{4} R_p^4 C_{40}(\lambda) \quad (3)$$

$$W_{60}(\lambda) = \frac{1}{6} R_p^6 C_{60}(\lambda)$$

donde R_p es el radio de la pupila de salida del sistema. Estos son los coeficientes que introduciremos en la función aberración de onda.

Para calcular la OTF de un sistema operando con iluminación incoherente afectado de aberraciones podemos calcular la convolución de dos funciones de pupila desplazadas (Barakat, 1962; Kidger, 1978); siendo en esta expresión r la coordenada radial tal que $r^2 = \xi^2 + \eta^2$; λ la longitud de onda empleada; z la distancia desde la pupila de salida del sistema al plano donde estamos evaluando la OTF, y, f_x y f_y son las frecuencias espaciales:

$$OTF(f_x, f_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi + \frac{\lambda z f_x}{2}, \eta + \frac{\lambda z f_y}{2}\right) \cdot P^*\left(\xi - \frac{\lambda z f_x}{2}, \eta - \frac{\lambda z f_y}{2}\right) d\xi d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (4)$$

siendo P la función de pupila generalizada dada por la ecuación:

$$P(r) = \sqrt{\exp(-0.05R_p^2 r^2 \ln 10)} \left[\exp ik(W_{20}r^2 + W_{40}r^4 + W_{60}r^6) \right] \quad (5)$$

donde r es la coordenada radial normalizada, ($0 \leq r \leq 1$); R_p es el radio de la pupila de salida; k es el número de onda ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$); W_{20} es un desenfoque que trata la aberración cromática y eventuales cambios adicionales de enfoque, y W_{40} , W_{60} son los coeficientes resultantes de la aberración de onda esférica. Suponemos que la función de aberración se define uniformemente sobre todo el intervalo considerado.

La expresión (4) para la OTF proporciona una interpretación geométrica importante; por un lado, integramos en el área de solapamiento entre dos

funciones geométricas desplazadas, una centrada en $\left(\frac{\lambda z f_x}{2}, \frac{\lambda z f_y}{2}\right)$ y la segunda, centrada en el punto diametralmente opuesto: $\left(-\frac{\lambda z f_x}{2}, -\frac{\lambda z f_y}{2}\right)$.

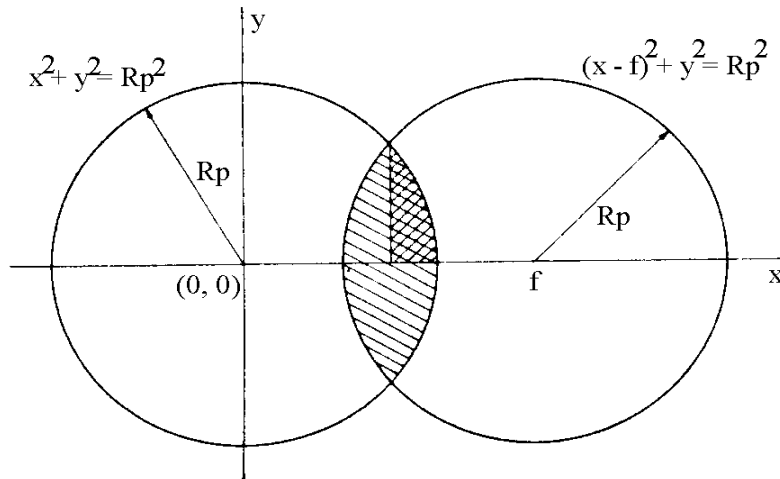


Figura 3. Coordenadas de integración numérica para calcular los valores de la MTF.

Dado que la función de pupila y las aberraciones son rotacionalmente simétricas, elegimos una dirección de desplazamiento y trasladamos las dos funciones de pupila a lo largo del eje x. Entonces la ecuación (4) queda:

$$OTF(f) = M \int_{\frac{1}{2}f}^{R_p \sqrt{(R_p^2 - x^2)}} \int_0^{R_p \sqrt{(R_p^2 - x^2)}} P(x, y) P^*(x - f, y) dx dy \quad (6)$$

haciendo los cambios:

$$\xi = \frac{x}{R_p} \quad \eta = \frac{y}{R_p} \quad w = R_p f \quad (0 \leq w \leq 2) \quad \Omega = \frac{1}{2} w \quad (7)$$

donde Ω se mide en líneas/mm. La ecuación (6) queda:

$$OTF(\Omega) = \frac{M}{R_p^2} \int_{\frac{1}{2}w}^1 \int_0^{\sqrt{(1-\xi^2)}} P(\xi, \eta) P^*(\xi - w, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

donde la constante $\frac{M}{R_p^2}$ es tal que $OTF(0) = 1$. El integrando en (8) puede expresarse como:

$$P(\xi, \eta) P^*(\xi - w, \eta) = \sqrt{\exp(-0.05 \cdot \ln 10 \cdot R_p^2 [2\xi^2 + 2\eta^2 + w^2 - 2\xi w])} \cdot \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda} \Delta(\xi, w, \eta)\right\} \quad (9)$$

tomamos la raíz de la exponencial porque corresponde a la transmitancia en amplitud

En esta expresión:

$$\Delta(\xi, w, \eta) = W_{20} \{(\xi^2 + \eta^2) - [(\xi - w)^2 + \eta^2]\} + W_{40} \{(\xi^2 + \eta^2)^2 - [(\xi - w)^2 + \eta^2]^2\} + W_{60} \{(\xi^2 + \eta^2)^3 - [(\xi - w)^2 + \eta^2]^3\} \quad (10)$$

Se puede demostrar, por argumentos de simetría, que en la exponencial imaginaria de la ecuación (9) sólo contribuye el término del coseno. Dado que $W(\xi, \eta)$ es una función par de ξ , $(W(\xi, \eta) - W(\xi - w, \eta))$ será una función impar de ξ . El coseno de esto será una función par y el seno será impar, por ello, la integral del seno se anulará (Barakat, 1962; Kidger, 1978).

Hemos caracterizado la respuesta en frecuencias del sistema por la MTF monocromática (calculada para una longitud de onda de 555 nm), pues lo que nos interesa es estudiar las tendencias generales de las curvas, y éstas, no van a depender de la longitud de onda. Además, se discute acerca de la

necesidad o no de utilizar la OTF policromática como criterio de análisis para un sistema óptico. Uno de los puntos clave para esta discusión es que la frecuencia de corte del sistema depende de la longitud de onda, por tanto, si trabajamos con varias longitudes de onda no estaría definida una única frecuencia de corte para el sistema óptico (ver discusión en el "Introduction to the Optical Transfer Function", Williams y Becklund, 1989).

Las variables de entrada del programa que hemos implementado para calcular la MTF son las siguientes:

- Los coeficientes de aberración calculados mediante el trazado de rayos ($C_{20}(\lambda), C_{40}(\lambda), C_{60}(\lambda)$).
- El radio de la pupila de salida del ojo (R_p).
- La distancia desde la pupila de salida del sistema al plano imagen (supuesto en retina) (z).
- El índice de refracción del espacio imagen ($n(\lambda)$).
- Los coeficientes de Gauss H_m, b_m, c_m y s_m con los que se han resuelto numéricamente las integrales (Barakat y Morello, 1962).
- Valores de longitudes de onda correspondientes al espectro visible (400 nm – 700 nm).
- Los valores de la curva de eficiencia luminosa fotópica, V_λ , para longitudes de onda entre 400 nm y 700 nm.

Procedimiento:

The screenshot shows the MTF 1.0 software interface. The window title is "MTF 1.0" and the menu bar includes "COEFICIENTES DE ABERRACIÓN", "MTF", "SALIR", "AYUDAS", and "Acerca de".

MODELOS (Models): A diagram shows a schematic of an eye model with four surfaces (1, 2, 3, 4) and refractive indices (n0, n1, n2, n3, n4). Distances d1, d2, and d3 are also indicated. Below the diagram, the "Radio de PS" (Pupillary Radius) is set to 3.5 (mm) and "Número de rayos" (Number of rays) is set to 2500.

Indices de refracción para una longitud de onda de 555 (nm) (Refractive indices for a wavelength of 555 nm):

Surface	Refractive Index
n0	1.0
n1	1.3772176619
n2	1.3386508304
n3	1.4215603098
n4	1.3373141327

Tomando como origen de coordenadas el vertice de la última superficie: (Taking the vertex of the last surface as the origin of coordinates)

Superficie posterior de la cornea: Radio 6.5 (mm), Asfericidad 0.0

Superficie anterior de la cornea: Radio 7.72 (mm), Asfericidad -0.26

Superficie posterior del cristalino: Radio -6.0 (mm), Asfericidad -1.0

Superficie anterior del cristalino: Radio 10.2 (mm), Asfericidad -3.1316

Distancias:

Parameter	Value (mm)
Distancia al origen del vertice de la cara posterior de la cornea	-7.05
Distancia al origen del vertice de la cara anterior de la cornea	-7.60
Distancia al origen del vertice de la cara posterior del cristalino	0.0
Distancia al origen del vertice de la cara anterior del cristalino	-4.0
Distancia al origen del punto objeto	-1000000

CALCULAR COEFICIENTES DE ABERRACIÓN (Calculate Aberration Coefficients)

COEFICIENTES DE ABERRACIÓN:

Wavelength (nm)	Aberration Coefficient
20	1.30429387026186E-6
40	0.000178878243069544
60	3.96550139380978E-6

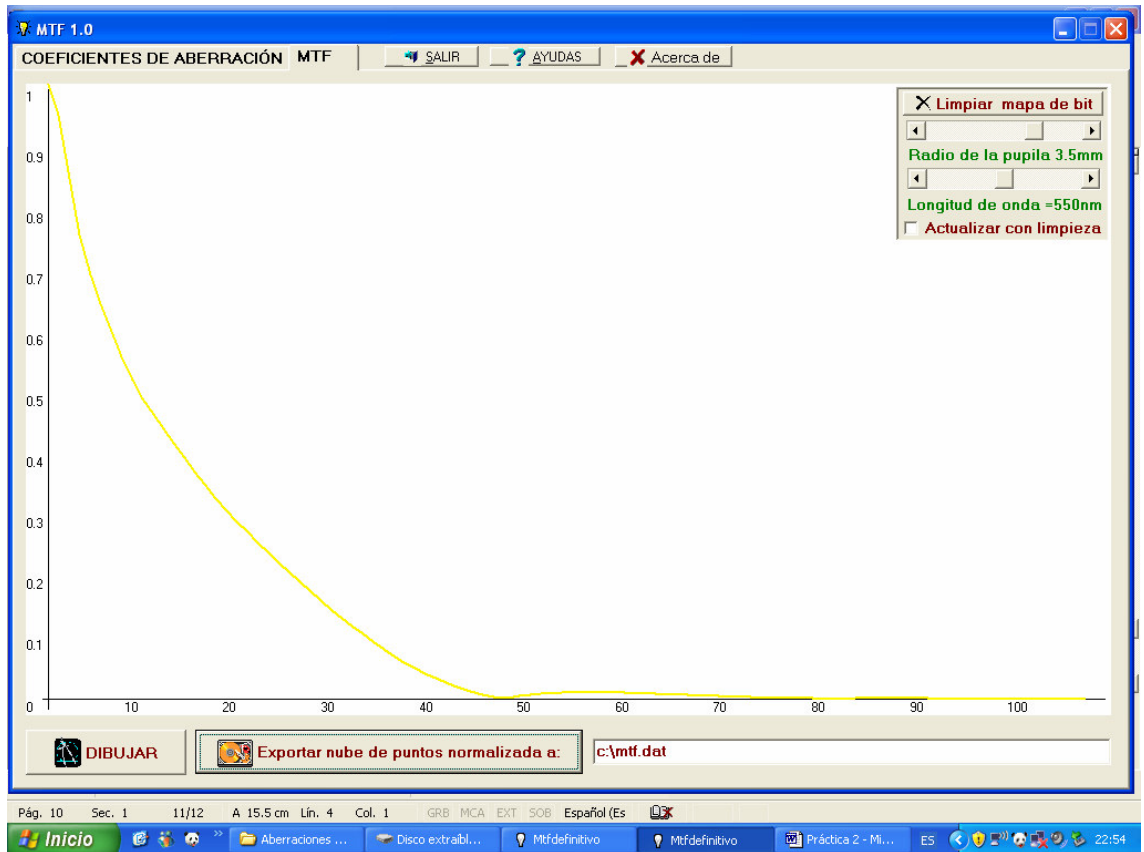
Cálculo de MTF Policromática. **GENERAR MTF PARA UNA** $\lambda = 555$

a) CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE ABERRACIÓN: Selecciona un modelo de ojo establecido (Pulse MODELOS). Automáticamente se cargan los parámetros (radio, asfericidad y distancia al origen del vértice) correspondientes a cada superficie. es decir, los datos que presenta por defecto el programa corresponden a un ojo estándar modelado para reproducir aspectos como la función visual o la anatomía de un ojo real. Seleccione el radio pupilar (por defecto 3,5mm). Pulse en “CALCULAR COEFICIENTES DE ABERRACIÓN”

b) Una vez calculados $C(20)$, $C(40)$ y $C(60)$, pulse GENERAR MTF. El alumno puede calcular la MTF del modelo de ojo estándar variando por ejemplo, el tamaño de la pupila de entrada del sistema, el radio de curvatura de alguna de las superficies oculares, etc.

c) Para visualizar la MTF, pulse DIBUJAR (pantalla MTF). Para obtener los valores de la MTF, el programa tiene como salida un fichero de texto con los valores de la respuesta en frecuencias del sistema. Pulse "Exportar nube de normalizados a:" de esta forma se exporta a la ruta indicada una nube de cien puntos correspondientes a la gráfica que se visualiza en pantalla.

d) Finalmente, con origin, se representan los valores calculados para cada una de las frecuencias espaciales del sistema. Abrir el archivo origin "MTF.opj", la primera columna son los valores de frecuencias espaciales en ciclos/grado. Los valores de MTF se pegan en otra columna Representado los valores obtenidos en función de la frecuencia espacial tenemos la respuesta en frecuencias del sistema.



Consideraciones:

Hemos calculado la MTF monocromática correspondiente a una longitud de onda de 555 nm (máximo de la curva de eficiencia luminosa). Para calcular la MTF policromática deberíamos calcular los 3 coeficientes de aberración esférica correspondientes a cada una de las longitudes de onda del visible y luego pesar cada una de estas MTF monocromáticas según su eficiencia luminosa.