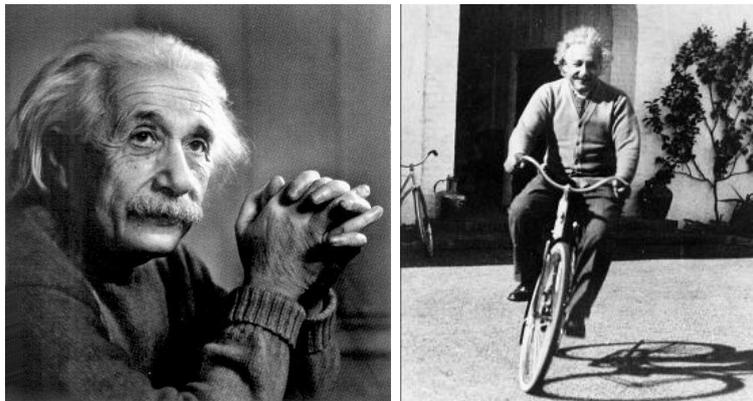


Descubre la Relatividad

José Ignacio Illana*

*Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada*

Enero de 2013



*Email: jillana@ugr.es.



Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Relatividad Especial | 1 |
| 1 | Constancia de la velocidad de la luz | 3 |
| 1.1 | Naturaleza y velocidad de la luz | 3 |
| 1.2 | El “éter luminífero” | 4 |
| 1.3 | Primeros experimentos | 5 |
| 1.3.1 | Aberración estelar | 5 |
| 1.3.2 | Arrastre del éter: experimento de Fizeau | 5 |
| 1.3.3 | Preludio del experimento de Michelson-Morley | 6 |
| 1.4 | El experimento de Michelson-Morley | 7 |
| 1.5 | La hipótesis de contracción de Lorentz-Fitzgerald | 8 |
| 1.6 | El experimento de Kennedy-Thorndike | 9 |
| 1.7 | Otros experimentos | 10 |
| 1.8 | El segundo postulado de Einstein | 11 |
| | Ejercicios | 11 |
| 2 | Espacio, tiempo y espaciotiempo: diagramas de Minkowski | 13 |
| 2.1 | Introducción: los postulados de la relatividad especial | 13 |
| 2.2 | La definición de tiempo | 14 |
| 2.2.1 | ¿Qué se entiende por medir el tiempo? | 14 |
| 2.2.2 | El sistema común de tiempos: relojes sincronizados | 14 |
| 2.2.3 | La relatividad de las medidas del tiempo: dilatación temporal | 16 |
| 2.3 | La definición de espacio | 17 |
| 2.3.1 | ¿Qué se entiende por medir una longitud? | 17 |
| 2.3.2 | La relatividad de la medidas espaciales: contracción espacial | 17 |
| 2.4 | Resumen: las transformaciones de Lorentz | 18 |
| 2.5 | El espaciotiempo: diagramas de Minkowski | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.5.1 | Observador en reposo | 19 |
| 2.5.2 | Observador en movimiento relativo: transformaciones de Lorentz | 20 |
| 2.5.3 | El intervalo y la calibración de los ejes | 20 |
| 2.5.4 | Orden temporal: pasado, presente, futuro y causalidad | 21 |
| | Ejercicios | 22 |
| 3 | Relatividad: la misma historia según distintos protagonistas | 25 |
| 3.1 | La historia | 25 |
| 3.2 | Análisis de los hechos: diagrama espacio-tiempo | 25 |
| 3.2.1 | Protagonistas: dos observadores inerciales | 25 |
| 3.2.2 | Los puntos de vista: sistemas de referencia espacio-tiempo | 25 |
| 3.2.3 | Distintas varas de medir: calibrado de los ejes | 26 |
| 3.2.4 | Los hechos: líneas de universo | 26 |
| 3.2.5 | Momentos clave: sucesos relevantes | 27 |
| 3.2.6 | Longitudes | 27 |
| 3.2.7 | Secuencia temporal | 27 |
| 3.2.8 | Tiempo que el tren tarda en cruzar la estación | 28 |
| 3.3 | Versiones de lo ocurrido | 28 |
| 3.3.1 | La película según el jefe de estación | 28 |
| 3.3.2 | La película según el maquinista del tren | 28 |
| 3.4 | Conclusiones | 29 |
| | Ejercicios | 30 |
| 4 | La paradoja de los gemelos | 31 |
| 4.1 | La aventura de los gemelos | 31 |
| 4.2 | La paradoja | 31 |
| 4.3 | Solución | 32 |
| 4.3.1 | Diagrama espacio-tiempo | 32 |
| 4.3.2 | El número de felicitaciones por Año Nuevo | 33 |
| 4.3.3 | Interpretación de lo sucedido | 34 |
| 4.3.4 | Algunos comentarios | 34 |
| 4.4 | Comprobación experimental: relojes voladores | 35 |
| | Ejercicios | 36 |
| 5 | Apariencia de los objetos que se mueven a altas velocidades | 37 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1 | Introducción | 37 |
| 5.2 | Mecanismos de distorsión de las imágenes | 37 |
| 5.2.1 | Contracción de Lorentz | 37 |
| 5.2.2 | Rotación aparente | 38 |
| 5.2.3 | Retrasos de la luz | 38 |
| 5.2.4 | Ejemplos | 39 |
| 5.3 | San Jorge y el dragón | 44 |
| 5.3.1 | Historia | 44 |
| 5.3.2 | Sucesos importantes | 44 |
| 5.3.3 | Versión de San Jorge | 45 |
| 5.3.4 | Versión del dragón ... si pudiera contarlo | 45 |
| | Ejercicios | 46 |
| 6 | El efecto Doppler y el desplazamiento cosmológico al rojo | 47 |
| 6.1 | Introducción | 47 |
| 6.2 | Efecto Doppler acústico | 47 |
| 6.2.1 | Fuente y receptor en movimiento respecto al aire | 48 |
| 6.2.2 | Fuente en reposo | 48 |
| 6.2.3 | Receptor en reposo | 49 |
| 6.3 | Efecto Doppler para la luz | 49 |
| 6.3.1 | Fuente y observador se alejan | 49 |
| 6.3.2 | Fuente y observador se acercan | 50 |
| 6.3.3 | Caso general y efecto Doppler transversal | 50 |
| 6.4 | Desplazamiento cosmológico al rojo como efecto Doppler | 52 |
| 6.4.1 | El parámetro de desplazamiento al rojo | 52 |
| 6.4.2 | La ley de Hubble-Humanson | 52 |
| | Ejercicios | 53 |
| 7 | Dinámica relativista: $E = mc^2$ y movimiento acelerado | 55 |
| 7.1 | Introducción | 55 |
| 7.2 | La equivalencia entre masa y energía | 55 |
| 7.3 | Transformaciones de Lorentz de velocidades y aceleraciones | 58 |
| 7.4 | El sistema de referencia de reposo instantáneo | 58 |
| 7.5 | Ejemplo práctico | 59 |
| | Ejercicios | 60 |

| | |
|--|-----------|
| 8 Electromagnetismo y relatividad especial | 61 |
| 8.1 Introducción | 61 |
| 8.2 Las ecuaciones de Maxwell y el concepto de campo | 62 |
| 8.2.1 Las ecuaciones | 62 |
| 8.2.2 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas | 63 |
| 8.2.3 El campo magnético y las fuerzas magnéticas | 64 |
| 8.2.4 La relación entre campos eléctricos y magnéticos | 65 |
| 8.3 Las ondas electromagnéticas | 66 |
| 8.4 La velocidad de la luz y el segundo postulado de Einstein | 67 |
| 8.5 La unificación de la electricidad y el magnetismo | 68 |
| 8.5.1 Una paradoja del electromagnetismo resuelta por la relatividad . . . | 69 |
| | |
| II Relatividad General | 71 |
| | |
| 9 El principio de equivalencia de inercia y gravedad | 73 |
| 9.1 Introducción | 73 |
| 9.2 El principio de equivalencia | 73 |
| 9.2.1 La relatividad general | 74 |
| 9.2.2 La igualdad de masa inercial y masa gravitatoria | 75 |
| 9.2.3 La teoría de la gravitación | 77 |
| 9.3 Relatividad general y el principio de Mach | 78 |
| | |
| 10 Gravedad y espaciotiempo | 81 |
| 10.1 Relatividad de las medidas del tiempo | 81 |
| 10.2 Relatividad de las medidas espaciales | 83 |
| 10.3 Métrica, curvatura y geodésicas | 83 |
| 10.3.1 El concepto de métrica | 83 |
| 10.3.2 La geometría euclídea | 84 |
| 10.3.3 La geometría de Minkowski | 85 |
| 10.3.4 Otras geometrías no euclídeas | 86 |
| 10.4 Las ecuaciones de campo de Einstein | 87 |
| 10.5 Volviendo al principio de equivalencia | 88 |
| Ejercicios | 89 |
| | |
| 11 Tests de la relatividad general | 91 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 11.1 | Introducción | 91 |
| 11.2 | La deflexión de la luz y lentes gravitatorias | 91 |
| 11.3 | El avance del perihelio de Mercurio | 93 |
| 11.4 | Ondas gravitatorias | 94 |
| 11.5 | Agujeros negros | 95 |
| 12 | Cosmología | 97 |
| 12.1 | Introducción | 97 |
| 12.2 | Modelos de universo | 97 |
| 12.3 | La paradoja de Olbers | 102 |
| | Ejercicios propuestos | 105 |
| | Bibliografía | 107 |

Parte I

Relatividad Especial

Tema 1

Constancia de la velocidad de la luz

1.1 Naturaleza y velocidad de la luz

Ya en los tiempos de Pitágoras (siglo VI a. de C.) la luz se consideraba un chorro de partículas, lo que explica que se progague en línea recta (como evidencia el contorno de las sombras o el hecho de no poder ver detrás de las esquinas) y justifica fácilmente el fenómeno de la reflexión.

I. Newton (1642-1726) afianza el *modelo corpuscular*, con el que fue capaz de explicar la refracción: las partículas eran atraídas hacia la superficie de separación de los dos medios aumentando su velocidad normal y dejando la tangencial inalterada, lo que conducía a la relación de Descartes $\sin \varepsilon / \sin \varepsilon' = v' / v$ pero implicaba erróneamente que la luz viajaba más rápido en el medio más denso.^a Para Newton la luz blanca se descomponía en luces simples de distintos colores, consecuencia de partículas de diferentes masas con las que explicaba la dispersión en los prismas.

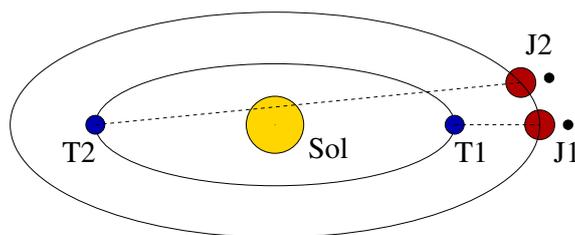


Figura 1.1: Mientras Júpiter y la Tierra se mueven de 1 a 2, la distancia que la luz debe recorrer desde Júpiter hasta la Tierra aumenta una distancia igual al diámetro de la órbita terrestre.

El astrónomo danés O. Roemer en 1675 fue el primero en medir la velocidad de la luz al observar el retraso en las ocultaciones de las lunas de Júpiter (cuyas órbitas son muy regulares) que llegaba a ser de unos 16 minutos, lo que atribuyó a la mayor distancia que la luz tiene que recorrer: en seis meses la Tierra completa la mitad de su órbita (de diámetro bien conocido) mientras Júpiter apenas avanza una pequeña fracción de la suya (Fig. 1).^b

^aEsto último se desmintió en 1849 cuando Foucault midió la velocidad de la luz en distintos medios.

^bHoy en día la velocidad de la luz se mide muy fácilmente y con gran precisión tomando el tiempo que tarda en regresar la luz láser enviada desde la Tierra a un reflector de esquina situado sobre la Luna.

Contemporáneo de Newton y enemigo acérrimo suyo, R. Hooke propuso en 1667 que la luz es una vibración que se propaga a través de un medio, igual que el sonido. Fue Ch. Huygens (1629-1695) quien desarrolló la *teoría ondulatoria* y mostró cómo podía explicarse la reflexión y la refracción. La gran autoridad científica de Newton impidió que la teoría ondulatoria progresara y no fue hasta el primer cuarto del s. XIX cuando, basándose en ella, T. Young explicó el fenómeno de las interferencias (brillantes colores de finas películas de aire comprendidas entre superficies de cristal) midiendo por primera vez las longitudes de onda de los distintos colores, y A. Fresnel explicó la difracción (penetración de la luz en zona de sombra geométrica) y la polarización de la luz en medios anisótropos.

En 1846 J.C. Maxwell ratificó la teoría ondulatoria al describir la luz como una onda electromagnética, cuya velocidad en el vacío viene *predicha* correctamente en función de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio ($c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$) y es independiente de la longitud de onda para el vacío. La velocidad de las ondas electromagnéticas debía ser independiente del movimiento de la fuente, en contraste con un modelo corpuscular o balístico, pero se suponía relativo al medio en el que se propagaba. Las ondas electromagnéticas fueron descubiertas experimentalmente por Hertz en 1888.

Al mismo tiempo aparecían otros fenómenos, como la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos, que no podían explicarse con el modelo ondulatorio clásico. La teoría de M. Planck en 1900, que suponía la propagación de la luz en cuantos discretos de energía $h\nu$, sirvió a A. Einstein en 1905 para explicar el efecto fotoeléctrico. N. Bohr, ampliando las condiciones de cuantización, explicó el espectro del átomo de hidrógeno en 1912 y A.H. Compton en 1922 el efecto que lleva su nombre. La incomodidad que causaba la *doble naturaleza de la luz, ondulatoria y corpuscular*, fue resuelta por L. de Broglie en 1925 quien propuso que *todo* corpúsculo lleva asociado una onda de longitud $\lambda = h/p$. Así surgió la mecánica cuántica, pero ésta es otra historia.

1.2 El “éter luminífero”

Las propiedades ondulatorias de la luz son irrefutables: difracción, interferencia, polarización, etc. Pero si la luz es una onda, *¿qué está vibrando?* Era natural suponer la existencia de un *medio* por el que se propagaran las ondas de luz, del mismo modo que se necesita aire o cualquier otro medio comprimible para que se propague el sonido. El sonido viaja más rápido en aquellos medios que son más difíciles de comprimir. Así que se suponía que la luz era simplemente una onda propagándose en un material misterioso, llamado *éter*, que lo rodeaba y lo permeaba todo (los cuerpos transparentes), incluyendo el vacío interplanetario. El éter debía tener unas propiedades muy extrañas: muy ligero y a la vez muy difícil de comprimir (muy rígido), porque la velocidad de la luz es muy alta, y además debía ser muy tenue, pues opone una resistencia casi nula al paso de cuerpos sólidos, como los planetas. Podemos imaginarnos el éter como un viento fantasmal que sopla sobre la Tierra.

Veamos algunos intentos de detectar este viento etéreo, hasta que finalmente la idea hubo de desecharse porque no estaba de acuerdo con los experimentos.

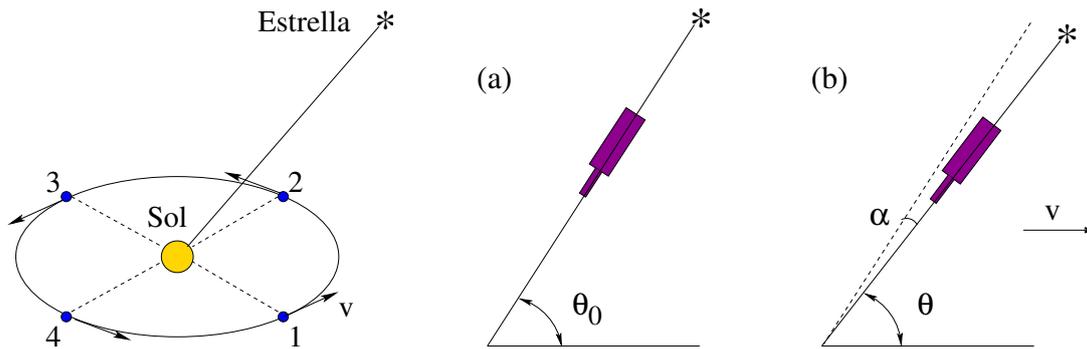


Figura 1.2: Fundamento de la aberración estelar.

1.3 Primeros experimentos

1.3.1 Aberración estelar

La aberración estelar fue descubierta en 1725 por el astrónomo británico J. Bradley cuando intentaba medir la distancia a algunas estrellas aplicando el método del paralaje (ver Fig. 2). Debido a la variación en la posición de la Tierra cabría esperar que la altitud θ de la estrella (ángulo respecto al plano de la eclíptica) fuera mayor (menor) en el punto 2 (4), sin embargo θ era máximo (mínimo) en 3 (1). Para entender el fenómeno nótese que el telescopio de la Fig. 2 situado en una Tierra en reposo (a) debería apuntar según la altitud verdadera θ_0 , pero si la Tierra se mueve en (b) con velocidad v el telescopio debe inclinarse un ángulo diferente θ . La diferencia $\alpha = \theta_0 - \theta$ es la *aberración*. Asistimos a un fenómeno comparable cuando observamos la inclinación de las gotas de lluvia desde un vehículo en movimiento. El efecto neto es que en el transcurso de un año la estrella parece describir una pequeña elipse alrededor de su posición fija cuyo semieje vertical es proporcional a v/c .

El modelo corpuscular de la luz podía dar una explicación inmediata al fenómeno (exactamente como las gotas de lluvia) pero el modelo ondulatorio es válido solamente si el éter es completamente insensible al movimiento de la Tierra. Si por el contrario el éter próximo a la Tierra fuese arrastrado por ella la aberración no se observaría.

1.3.2 Arrastre del éter: experimento de Fizeau

En 1851 Fizeau llevó a cabo un famoso experimento. Envío luz a través de tuberías de agua que fluían en direcciones diferentes. El agua, puesto que es transparente debía arrastrar algo de éter, según había postulado Fresnel en 1818, lo que por tanto alteraría la velocidad de la luz. Los resultados fueron positivos.

Nos encontramos por tanto ante una gran contradicción: la aberración estelar requiere que la Tierra y la atmósfera terrestre no arrastren nada de éter, mientras que el experimento de Fizeau muestra que los medios transparentes arrastran una cantidad mensurable de éter.

Había que seguir buscando una manera de detectar el movimiento de la Tierra a través del éter.

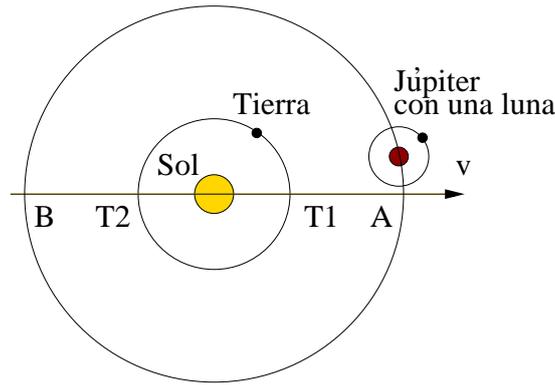


Figura 1.3: Órbitas de la Tierra, Júpiter y una luna de Júpiter.

1.3.3 Preludio del experimento de Michelson-Morley

En 1879 Maxwell propuso volver a utilizar las lunas de Júpiter, esta vez para un experimento diferente: intentar medir la velocidad del sistema solar a través del éter (Fig. 3). Júpiter tiene un periodo de 12 años terrestres, así que en medio año la Tierra pasa de T1 a T2 mientras que Júpiter no avanza mucho en su órbita. Si observamos los tiempos aparentes de los eclipses con la Tierra en T1 y en T2 (seis meses más tarde) podemos medir el tiempo t_0 que tarda la luz en recorrer una distancia igual al diámetro l de la órbita terrestre, $t_0 = l/c \approx 16$ min (método usado por Roemer para medir c). Pero si se mide ese tiempo cuando Júpiter se encuentra en A (t_A) y luego en B (t_B), seis años después, podríamos descubrir si el sistema solar se mueve a través del éter con velocidad v . En efecto, como $v \ll c$,

$$\left. \begin{aligned} t_A &= \frac{l}{c-v} \approx t_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \\ t_B &= \frac{l}{c+v} \approx t_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t = t_A - t_B \approx \frac{2lv}{c^2} = \frac{2v}{c}t_0. \quad (1.1)$$

Nótese que si pudiésemos medir la diferencia de tiempos Δt con la precisión de 0.1 s detectaríamos velocidades del éter desde $v = 15$ km/s. Recordando que la velocidad de orbitación de la Tierra es de unos 30 km/s, parece que Maxwell tuvo una buena idea. Sin embargo conocer Δt con esa precisión en un intervalo de 6 años no era posible, pues los datos astronómicos no eran lo suficientemente exactos.

Este tipo de experimentos se llaman de primer orden (el efecto es proporcional a la primera potencia de v/c) y se distinguen de los experimentos terrestres para medir la velocidad de luz, que son de segundo orden (efecto proporcional a v^2/c^2), en los que el rayo va y vuelve a su punto de partida (en seguida veremos esto). Maxwell pensaba que no sería posible detectar estos efectos de segundo orden en el laboratorio. Sin embargo, sólo dos años después, en 1887, A.A. Michelson inventó un instrumento con una sensibilidad sin precedentes para buscar el efecto que Maxwell había despreciado: el *interferómetro de Michelson*. Sus experimentos le hicieron merecedor del premio Nobel en 1907.

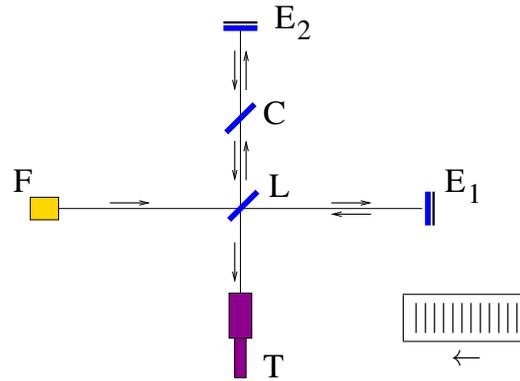


Figura 1.4: El interferómetro de Michelson y franjas de interferencia.

1.4 El experimento de Michelson-Morley

En la Fig. 4 se presenta un esquema del interferómetro de Michelson. Luz monocromática procedente de una fuente F incide sobre una lámina de cristal L inclinada a 45° que posee una capa de metal semirreflectante. Ésta divide a la luz en dos partes. Una atraviesa la lámina y alcanza un espejo E_1 . A continuación recorre el camino inverso hasta llegar al punto en donde el haz se desdobló inicialmente, y una fracción de él se refleja en la lámina llegando hasta el telescopio T . La otra parte del haz original es enviada por reflexión al espejo E_2 , vuelve y, tras atravesar la lámina L , llega hasta el telescopio. Una lámina de compensación C hace pasar este segundo haz a través del mismo espesor de cristal que el primero, para conseguir simetría óptica. Llamaremos brazo 1 (2) al que tiene en su extremo el espejo 1 (2).

Supongamos que el aparato de Michelson se encuentra orientado de forma que el hipotético viento de éter sopla en la dirección E_1L con velocidad v . Entonces la luz viaja primero en contra y luego a favor de la “corriente” de éter por el brazo 1 pero cruza transversalmente la corriente por el brazo 2, como si de un río se tratara.^c Entonces los tiempos de ida y vuelta en cada brazo, en función de los respectivos caminos ópticos l_1 y l_2 , son

$$t_1^0 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1c}{c^2-v^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (1.2)$$

$$t_2^0 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1.3)$$

Por tanto, tomando $v \ll c$, la diferencia de tiempos viene dada por

$$\Delta t^0 = t_1^0 - t_2^0 \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{(2l_1 - l_2)v^2}{c^3} \quad \uparrow v \quad (1.4)$$

Si ahora giramos el interferómetro un ángulo de 90° obtenemos fácilmente

$$t_1^{90} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1.5)$$

^cEs fácil ver que remando a velocidad c cruzando un río de corriente v se alcanza la orilla de enfrente como si se remara a una velocidad más pequeña $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, pues la trayectoria no es perpendicular a la orilla. Véase Problema 1.1.

$$t_2^{90} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad (1.6)$$

y por tanto,

$$\Delta t^{90} = t_1^{90} - t_2^{90} \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{(l_1 - 2l_2)v^2}{c^3} \quad \leftarrow v \quad (1.7)$$

En ambos casos observamos por el telescopio una *figura de interferencia*: patrón de franjas claras y oscuras (circulares si la fuente es puntual) debidas a la interferencia de ondas coherentes que recorren caminos ópticos diferentes con máximos en $\Delta l \approx 2(l_1 - l_2) = n\lambda$ (siendo n un entero). Lo más interesante es que si comparamos las franjas que se obtienen en cada caso podríamos *observar si toda la figura de interferencia se ha desplazado* una cantidad

$$\Delta d = \Delta l^0 - \Delta l^{90} \approx c(\Delta t^0 - \Delta t^{90}) \approx (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.8)$$

Un desplazamiento de δ franjas corresponde a $\Delta d = \lambda\delta$, es decir

$$\delta = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}, \quad (1.9)$$

donde ahora podemos tomar l_1 y l_2 como las longitudes de los brazos del interferómetro. Se trata de un efecto de segundo orden en v/c , como habíamos anticipado, y por tanto muy pequeño, pues el objetivo era detectar el movimiento de la Tierra respecto al éter ($v \approx 30$ km/s) lo que significa $v/c \approx 10^{-4}$.

En el primer experimento de Michelson (1881) se usó una fuente de $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m (lámpara de sodio) y un interferómetro de brazos iguales $l \equiv l_1 = l_2 = 1.2$ m, con lo que se esperaba $\delta = 0.04$ franjas, pequeño pero suficiente, pues Michelson se las había ingeniado para detectar separaciones de hasta $\delta_{\min} = 0.02$ franjas. Sin embargo no se observó *ningún desplazamiento apreciable*.

Este resultado inesperado condujo a renovados intentos en busca de su explicación teórica, en especial por parte de Lorentz, como veremos a continuación. Era necesaria también una repetición más precisa del experimento, así que Michelson, esta vez en colaboración con E.W. Morley, invirtió gran esfuerzo en mejorar el aparato montándolo sobre una plataforma de mármol que flotaba sobre mercurio (el tráfico de los carruajes introducía vibraciones problemáticas) y haciendo más largos los brazos del interferómetro, $l = 11$ m. En esta versión refinada del experimento, llevada a cabo en 1887, se esperaba $\delta = 0.4$ franjas pero no se observó ningún corrimiento superior a $\delta_{\min} = 0.005$ franjas.

Este experimento se considera uno de los pilares básicos sobre los que se asienta la relatividad especial. Sucesivos experimentos similares se han realizado con resultados igualmente negativos (tabla 1.1). El último y más preciso es el de Joos (1930) con $l = 21$ m, $\delta = 0.75$ y $\delta_{\min} = 0.002$.

1.5 La hipótesis de contracción de Lorentz-Fitzgerald

En 1892, H.A. Lorentz y G.F. Fitzgerald, independientemente, propusieron una explicación para el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley. Sugirieron que sí había

| Año | Experimento | $l_1 = l_2$ [m] | δ | δ_{\min} | δ/δ_{\min} |
|---------|------------------|-----------------|----------|-----------------|------------------------|
| 1881 | Michelson | 1.2 | 0.04 | 0.02 | 2 |
| 1887 | Michelson-Morley | 11.0 | 0.40 | 0.005 | 40 |
| 1902-04 | Morley-Miller | 32.2 | 1.13 | 0.015 | 80 |
| 1927 | Illingworth | 20.0 | 0.07 | 0.0004 | 175 |
| 1930 | Joos | 21.0 | 0.75 | 0.002 | 375 |

Tabla 1.1: Resultados de los experimentos de Michelson-Morley y sucesores.

una diferencia en la velocidad de la luz en los dos brazos pero sucedía que uno de los brazos se contraía de modo tal que se cancelaba el efecto de las diferentes velocidades.

Sea el brazo 1 el que se mueve paralelamente al éter. Entonces su longitud queda contraída por un factor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.10)$$

mientras que el brazo 2 no cambia, de modo que

$$l'_1 = l_1/\gamma \quad \Rightarrow \quad t_1^0 = \frac{2l'_1}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.11)$$

$$l'_2 = l_2 \quad \Rightarrow \quad t_2^0 = \frac{2l'_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.12)$$

Si giramos 90° el interferómetro entonces es el brazo 2 el que se contrae por el mismo factor, con lo que ahora

$$l'_1 = l_1 \quad \Rightarrow \quad t_1^{90} = \frac{2l'_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.13)$$

$$l'_2 = l_2/\gamma \quad \Rightarrow \quad t_2^{90} = \frac{2l'_2}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.14)$$

Por tanto,

$$\Delta t^0 = \Delta t^{90} = \frac{2(l_1 - l_2)}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.15)$$

y no hay desplazamiento de las franjas según (1.8). Se puede demostrar que el resultado es el mismo para cualquier ángulo.

Por extraña que parezca esta hipótesis, fue muy difícil refutarla experimentalmente. Hubo que esperar 40 años para que la situación quedara totalmente aclarada por E.J. Kennedy y E.M. Thorndike.

1.6 El experimento de Kennedy-Thorndike

La esencia del experimento de Kennedy-Thorndike (1932) no está en rotar el interferómetro, sino en dejarlo fijo al laboratorio durante mucho tiempo y mirar las potenciales variaciones día-noche o estacionales en el movimiento de la Tierra respecto al éter.

Consideremos la Tierra en la orientación A . Si la contracción de Lorentz-Fitzgerald fuera cierta entonces uno esperaría

$$\Delta t_A = \frac{2(l_1 - l_2)}{c\sqrt{1 - v_A^2/c^2}}, \quad (1.16)$$

mientras que en otra orientación B :

$$\Delta t_B = \frac{2(l_1 - l_2)}{c\sqrt{1 - v_B^2/c^2}}. \quad (1.17)$$

La clave está en que usando un *interferómetro de brazos desiguales* ($l_1 \neq l_2$) se debería observar un desplazamiento de las franjas $\Delta t_A \neq \Delta t_B$ ya que $v_A \neq v_B$ para dos orientaciones cualesquiera. Sin embargo *no se observó ningún desplazamiento* dentro de la precisión experimental, que permitía distinguir diferencias de velocidades de hasta 3 m/s.

1.7 Otros experimentos

El uso de láseres y máseres ha mejorado mucho la precisión con la que se conoce la isotropía de la propagación de la luz. El experimento más preciso es el de A. Brillet y J.L. Hall (1979) que ponen un límite en la anisotropía de 3 partes en 10^{15} , rotando el interferómetro en diferentes direcciones, al estilo de Michelson-Morley. D. Hils and J.L. Hall llevaron a cabo en 1990 un experimento del tipo de Kennedy-Thorndike (láseres fijos y medidas realizadas durante un año) en el que no encontraron variaciones al nivel de 2 partes en 10^{13} .

Todas las pruebas de la constancia de la velocidad de la luz que hemos visto hasta ahora se basan en fuentes estáticas con observador en movimiento. Si la luz es una onda que se propaga en un medio, la situación anterior es diferente a si son las fuentes las que están en movimiento (un sonido no viaja más rápido cuando se emite por una fuente en movimiento). En ausencia de un medio de propagación la constancia de la velocidad de la luz debe darse en ambas situaciones. La evidencia experimental de la invariancia de la velocidad de la luz emitida por fuentes en movimiento constituye una prueba directa del segundo postulado y fue más difícil de conseguir: fue en 1964 en el CERN (Laboratorio Europeo de Física de Partículas, en Ginebra), cuando se midió por primera vez la velocidad de los fotones emitidos en la desintegración del pión neutro.

El pión neutro vive sólo 8×10^{-17} s y se desintegra principalmente en dos fotones (rayos gamma): $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Los piones se producen a una elevadísima velocidad en el laboratorio cuando protones de muy alta energía colisionan contra un blanco fijo, $v_\pi = 0.99975c$ (casi a la velocidad de la luz). Los piones recorren una distancia pequeñísima antes de desintegrarse, unos pocos μm , así que la distancia que recorren los fotones producidos hasta llegar al detector se conoce muy bien. A partir del tiempo de vuelo se pudo medir $v_{\text{fotón}} = (2.9977 \pm 0.0004) \times 10^8$ m/s. Esta es *la misma velocidad de la luz emitida por una fuente en reposo*, dentro del error experimental. De hecho, si hiciéramos la hipótesis de que $c_{\text{movimiento}} = c_{\text{reposo}} + kv_{\text{fuente}}$ tendríamos que admitir que $k < 10^{-4}$.

1.8 El segundo postulado de Einstein

En 1905 Einstein propone la Relatividad Especial, basada en dos postulados. El primero es el *principio de relatividad* (invariancia de Galileo) y el segundo es la *constancia de la velocidad de la luz en el vacío* (idéntica para todos los observadores, independientemente de la localización, época, orientación o velocidad uniforme de la fuente).

La luz es una onda esencialmente diferente al sonido o a una ola, pues no necesita ningún medio para su propagación. El éter no existe.

El primer postulado puede ser digerido con facilidad pero el segundo constituye una innovación dramática, de la que ya hemos dado pruebas experimentales: exigirá revisar nuestras nociones de conceptos fundamentales como espacio, tiempo o energía. Éste será el objeto del resto del curso.

Ejercicios

1.1 Supongamos que nos desplazamos en una barca remando a velocidad c respecto a un río cuya corriente tiene una velocidad v . Demuestra que nuestra velocidad v' respecto a un observador en tierra firme es:

a) $v' = c + v$, si remamos corriente abajo.

b) $v' = c - v$, si remamos en contra de la corriente.

c) $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, si remamos perpendicularmente a la corriente.

Nótese que, en la teoría del éter, c juega el papel de la velocidad de la luz respecto al éter, v es la velocidad del viento de éter respecto al observador y v' es la velocidad de luz según ese observador.

Tema 2

Espacio, tiempo y espaciotiempo: diagramas de Minkowski

2.1 Introducción: los postulados de la relatividad especial

Primer postulado (principio de relatividad)

Las leyes de la física son las mismas para cualquier observador inercial (no acelerado).^a

Esto *no significa* que un observador subido a un vagón con velocidad uniforme y otro observador en el andén de una estación obtengan *los mismos resultados numéricos* para un fenómeno determinado: por ejemplo, ambos observadores ven trayectorias diferentes para una pelota que el primero deje caer libremente, pero en los dos casos las trayectorias se describen usando las *mismas leyes* de Newton.

Este postulado pone de manifiesto la *imposibilidad de distinguir estados de reposo o movimiento absolutos* para un observador inercial: el observador en el tren no puede distinguir si se está moviendo a no ser que pueda observar directamente la *velocidad relativa* respecto al andén (describiendo la cortina de la ventanilla y mirando a través de ella).

Este principio no sólo se refiere a las leyes que describen objetos móviles (para ellos es fácil de demostrar), sino a *todas* las leyes de la física, lo que le convierte en un postulado (no demostrable) que aún no ha sido rebatido experimentalmente.

Einstein pone así *fin a la idea del éter luminífero*. Si existiera, las ecuaciones de Maxwell (leyes de la física que predicen la velocidad de la luz y que no necesitan de ninguna especificación de la velocidad del observador) deberían modificarse en función del estado de movimiento del observador respecto al éter.

^aSe le llama relatividad especial o restringida pues se aplica sólo a observadores no acelerados. La relatividad general, que Einstein desarrolló posteriormente, incluye también a observadores acelerados. A diferencia de la primera, que fue publicada en un sólo trabajo en *Annalen der Physik* en 1905, la relatividad general se fue fraguando en varios años entre 1907 y 1915.

Segundo postulado (constancia o universalidad de la velocidad de la luz)

La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, independientemente de la velocidad de la fuente de luz respecto al observador.

El éxito reconocido de las ecuaciones de Maxwell en la descripción de una gran variedad de fenómenos electromagnéticos sugirió la validez de este postulado. Sin embargo, como ya hemos visto, la primera confirmación experimental *directa* de este postulado no llegó hasta 1964 cuando se observó que los fotones emitidos por un pión a gran velocidad no viajaban a distinta velocidad que los emitidos por una fuente en reposo.

Este postulado es el responsable de que sea tan *difícil conciliar* la teoría de la relatividad con la visión que tenemos del mundo a través de nuestro *sentido común*.

2.2 La definición de tiempo

El trabajo de Einstein se basa en la definición clara y precisa de conceptos que nos pueden parecer simples y hasta pueriles. La idea es establecer el significado de conceptos básicos, como el tiempo o el espacio, de modo que sirvan como instrucciones para hacer medidas (*definiciones operacionales*). Persiguiendo esta idea hasta sus últimas consecuencias, Einstein consiguió remover los cimientos de la física newtoniana.

2.2.1 ¿Qué se entiende por medir el tiempo?

Definir el tiempo desde el punto de vista operacional es *medir* el tiempo. Un reloj no es más que un dispositivo que aprovecha algún fenómeno que se repite con regularidad. Lo importante para Einstein no es la precisión del reloj sino *cómo utilizamos los relojes*. Siempre que hablamos de tiempo nos referimos a *sucesos simultáneos*: por ejemplo, la llegada del tren y la posición de las manecillas del reloj. Sin embargo existe *ambigüedad* sobre la hora a la que ocurre un suceso debido a que la luz necesita cierto tiempo para informar a *observadores distantes*, que no están en el mismo lugar de los sucesos que están observando. Veremos que también hay problemas cuando se trata de *observadores móviles*.

2.2.2 El sistema común de tiempos: relojes sincronizados

Einstein buscó una definición operacional que permitiera asignar un tiempo único y bien determinado para un suceso. Veámoslo con un ejemplo típico.

Observadores distantes

Pablo y Alicia son dos observadores situados frente una vía de ferrocarril en los puntos *A* y *B*, respectivamente (Fig. 2.1). La hora de un suceso en *A* viene caracterizada por una lectura del reloj de Pablo que sea simultánea al suceso. Del mismo modo, el reloj de Alicia describe la hora de un suceso en *B*. Disponemos, por tanto, de dos definiciones de tiempo unívocas: la hora de Pablo y la hora de Alicia, para los sucesos que ocurran en *A*

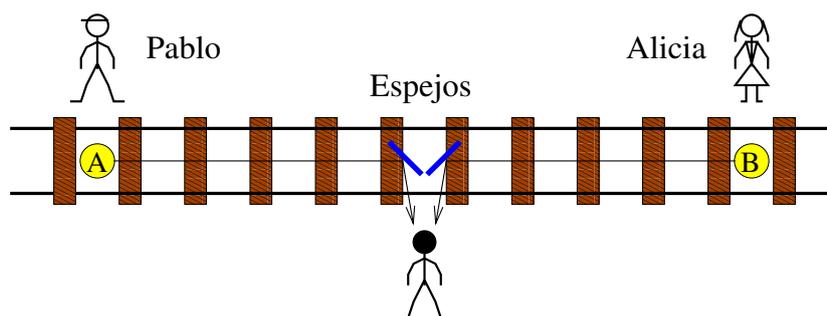


Figura 2.1: Pablo y Alicia acuerdan un sistema común de tiempos.

y B , respectivamente. ¿Podemos establecer un *sistema común de tiempos* para representar unívocamente las horas de los sucesos que ocurran en cualquier punto del espacio?

La clave está en *sincronizar los relojes* de todos los observadores situados en cualquier punto del espacio para que todos marquen la misma hora. Para sincronizar los relojes de Pablo y Alicia basta con medir la distancia entre ambos y situarse en el punto medio con dos espejos colocados según indica la Fig. 2.1 de modo que se pueda ver a la vez a ambos sin girar la cabeza. Supongamos que eres tú mismo el que se pone en el punto medio. Entonces, pides a Pablo y Alicia que disparen el flash de sus respectivas cámaras fotográficas a la hora en punto. Si ves desde el punto medio ambos flashes llegar desfasados entonces pides a uno de ellos que retrase o adelante su reloj según convenga. Así, les haces disparar sus flashes y reajustar sus relojes hasta que ambos flashes lleguen al punto medio simultáneamente. Entonces ambos relojes estarán sincronizados. Lo que hemos hecho con Pablo y Alicia lo podríamos repetir con tantos relojes y observadores en reposo como quisiéramos.

Ya podemos ponernos de acuerdo sobre la hora a la de un suceso: es la que marca *un reloj situado en el lugar en el que ocurre el suceso*. Nótese que este tiempo común (llamado *tiempo propio*) para todos los observadores en reposo entre sí, no es el que marca el reloj de un observador cualquiera que *ve* el suceso, pues la luz no llega instantáneamente a cada observador.

Observadores móviles

Si *intentamos* ahora sincronizar el tiempo común de los relojes fijos respecto a la vía con el de un observador (Gertrudis) que se desplaza a velocidad uniforme en un vagón (Fig. 2.2) *veremos que no es posible*.

Supongamos que Pablo y Gertrudis ya tienen sus relojes sincronizados y tú te encuentras en el punto medio como antes. Exactamente a la hora en punto Gertrudis pasa frente a ti. Un poco después te llegan dos flashes simultáneos procedentes de las cámaras de Pablo y Alicia, confirmando que aún están sincronizados. Sin embargo, Gertrudis no está de acuerdo: para ella ambos flashes no pueden ser simultáneos porque, antes de que los destellos hayan llegado hasta a ti, Gertrudis se ha acercado a Alicia alejándose de Pablo. Consecuentemente, el flash de Alicia le llega antes a Gertrudis que el flash de Pablo.

De este modo, sucesos simultáneos para observadores en reposo frente a la vía no lo

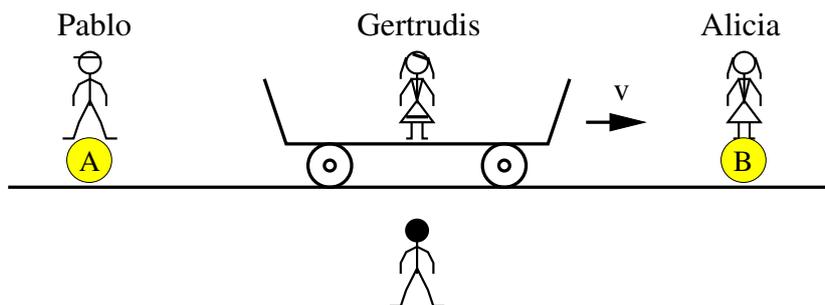


Figura 2.2: Gertrudis no está de acuerdo con el sistema común de tiempos de Pablo y Alicia.

son para Gertrudis (observador que se mueve respecto a la vía) y, por tanto, no pueden acordar un sistema común de tiempos. Sin embargo, Gertrudis puede establecer su *propio* sistema común de tiempos para emplearlo con todos los observadores que se encuentren en su vagón, en reposo respecto a ella.

2.2.3 La relatividad de las medidas del tiempo: dilatación temporal

Puesto que observadores en movimiento relativo no se pueden poner de acuerdo en un sistema común de tiempos, Einstein llegó a la revolucionaria conclusión de que *el tiempo para unos y otros no es el mismo*.

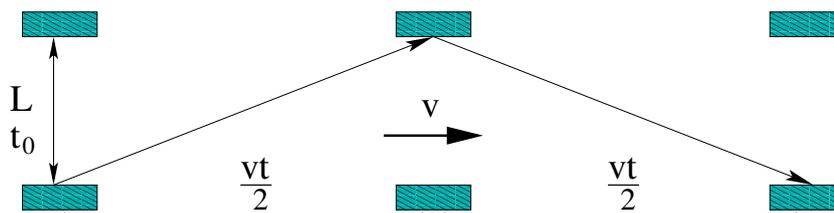


Figura 2.3: La luz reflejada en el techo del vagón constituye un reloj en movimiento.

Analicemos un experimento mental que ilustra esta conclusión de Einstein (Fig. 2.3). Un rayo de luz es emitido desde el suelo del vagón y devuelto al mismo reflejado por un espejo situado en el techo. Para Gertrudis el rayo recorre una distancia $2L$ en un tiempo t_0 . Para un observador fijo respecto a la vía el rayo recorre una distancia mayor en un tiempo t . Un físico newtoniano tomaría “obviamente” $t_0 = t$ y por tanto esperaría que la velocidad de la luz medida por el observador fijo a la vía será mayor que la medida por Gertrudis. Esto es también lo que nos dice nuestra intuición. Sin embargo, *para Einstein ambas velocidades de la luz deben ser las mismas* lo que nos lleva a tener que aceptar que las respectivas *medidas del tiempo* t_0 y t *no son las mismas*.^b El reloj de Gertrudis parece ir más lento pues t_0 es menor que t , lo que es lo mismo,

las medidas de tiempo que hace un observador están dilatadas respecto a las que hace otro que se mueva uniformemente respecto a él.

Estudiaremos la dilatación temporal con más detalle en un próximo tema.

^bPodemos hacer fácilmente las cuentas: $c = \frac{2L}{t_0} = \frac{2\sqrt{L^2 + (vt/2)^2}}{t} \Rightarrow t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

2.3 La definición de espacio

De nuevo haremos uso de una definición operacional: ¿cómo medimos el espacio?

2.3.1 ¿Qué se entiende por medir una longitud?

Si queremos medir la longitud de un bloque en reposo no tenemos ninguna dificultad: basta con alinear las marcas de una regla con los extremos del bloque. Aunque no compares a la vez ambos extremos con las marcas de la regla, sabes que la medida será la misma pues las marcas no se mueven respecto al bloque.

Pero si el bloque se mueve tenemos un problema: necesitamos conocer la posición de ambos extremos del bloque en el mismo instante. *Las medidas de longitud son, en último término, medidas de sucesos simultáneos.*

2.3.2 La relatividad de la medidas espaciales: contracción espacial

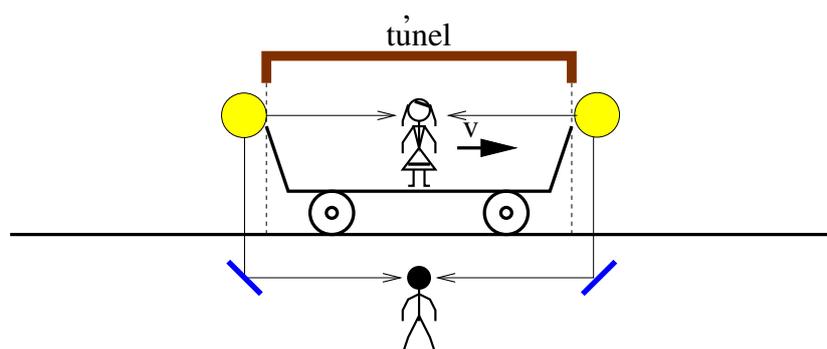


Figura 2.4: Gertrudis en su vagón atravesando el túnel.

Volvamos a nuestro ejemplo típico. Ahora el vagón de Gertrudis va a atravesar un túnel, cuya longitud medida cuidadosamente por un observador en reposo respecto a la vía es L (Fig. 2.4). Un observador fijo (tú mismo) se sitúa en el punto medio del túnel con un sistema de espejos que le permite ver los dos extremos del túnel sin girar la cabeza. En un momento dado, ves que la cola del vagón desaparece en el interior del túnel en el mismo instante en que la cabeza asoma por el otro extremo. Estos dos instantes de tiempo los señalizamos mediante dos destellos luminosos emitidos desde los extremos del túnel. Ambos te llegarán simultáneamente. Por tanto llegas a la conclusión de que el vagón *mide igual que el túnel*.

¿A qué conclusión llega Gertrudis? Ella también ve los destellos luminosos pero para ella no son simultáneos: verá primero el que proviene de la cabeza del vagón (que le informa de que la cabeza del vagón sale del túnel) y *después* el de la cola. Es decir, para ella, cuando la cabeza del tren sale del túnel, la cola aún no ha entrado en el túnel. En consecuencia, Gertrudis pensará que el vagón es *más largo que el túnel*. Por tanto, la longitud del vagón está contraída para ti (que lo mides en movimiento) respecto a la que mide Gertrudis (que lo mide en reposo). Las longitudes medidas en reposo se llaman *longitudes propias*. En consecuencia:

las medidas de longitud que hace un observador están contraídas respecto a las que hace otro que se mueva uniformemente respecto a él.

Estudiaremos la contracción espacial con más detalle en un próximo tema.

2.4 Resumen: las transformaciones de Lorentz

Hemos llegado a la conclusión de que observadores inerciales distintos obtendrán resultados distintos en sus medidas del espacio y del tiempo.

Las *transformaciones de Lorentz* son las ecuaciones que permiten relacionar las medidas que hace un observador inercial del espacio, x , y del tiempo, t , referentes a un suceso con las medidas que haría otro observador inercial, que se mueve a velocidad v respecto al primer observador, referentes al *mismo* suceso. Sus expresiones son

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c}x \right) & \text{o bien} & & ct &= \gamma \left(ct' + \frac{v}{c}x' \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) & & & x &= \gamma (x' + vt') \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ es el factor de Lorentz. Nótese que si v es mucho menor que c entonces $\gamma \approx 1$ y recuperamos nuestra *intuición* (galileana) pues $t' \approx t$ y $x' \approx x - vt$.

Estas ecuaciones *resumen de forma cuantitativa la teoría de la relatividad de Einstein* que acabamos de exponer. Así en los ejemplos anteriores, t' sería el tiempo propio de Gertrudis (instante en que se produce el suceso según su sistema común de tiempos) que no sólo depende del tiempo propio del observador en reposo respecto a la vía, t , sino también de la localización del suceso respecto a ese observador, x . Del mismo modo, la localización del suceso según Gertrudis, x' , está relacionada con t y x .

Las *otras dos direcciones espaciales*, y y z , que son *perpendiculares a la dirección del movimiento relativo* de los dos observadores inerciales, *no se transforman*:

$$y' = y \quad (2.2)$$

$$z' = z \quad (2.3)$$

y por ello, generalmente, no hablaremos de ellas. Nótese que siempre podemos elegir nuestros ejes de coordenadas para que el eje x coincida con la dirección de v .

2.5 El espaciotiempo: diagramas de Minkowski

El concepto unificado de *espaciotiempo*, introducido por H. Minkowski en 1908, es una *mera simplificación matemática*. El espacio y el tiempo son completamente diferentes, se miden de formas muy distintas (como hemos visto) y los percibimos también de distinto modo.

Ahora bien, en relatividad no se analizan las localizaciones de objetos en el espacio, sino *sucesos* que están localizados en el espacio y en el tiempo: para especificar un suceso hay que decir *dónde* (tres dimensiones espaciales) y *cuándo* (una dimensión más, el

tiempo). Minkowski propuso concebir el mundo como una red espaciotemporal *tetradi-dimensional*. Esta visión tiene dos ventajas:

Primero, nos lleva a una *resolución gráfica* muy sencilla y práctica de las transformaciones de Lorentz, haciendo uso de los *diagramas espacio-tiempo* o diagramas de Minkowski, que estudiaremos a continuación.

Además, los diagramas espacio-tiempo nos permiten *visualizar la película completa* de la evolución de un objeto en el espacio y el tiempo: su *línea de universo*.

2.5.1 Observador en reposo

En realidad nos referimos a un observador inercial, \mathcal{O} , cualquiera, ya que, según el principio de relatividad no existe un observador privilegiado. Lo llamamos así para especificar el observador que se halla en reposo respecto a la vía en los ejemplos anteriores. Nótese que *un observador no es más que un sistema de referencia*, unos ejes de coordenadas espaciotemporales.

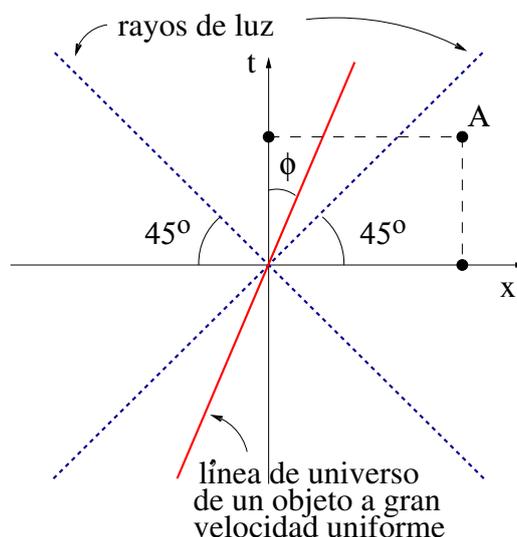


Figura 2.5: Diagrama espacio-tiempo para un observador \mathcal{O} .

Localizamos *un suceso A* mediante un punto cuyas coordenadas espacial, x , y temporal, t , se pueden leer sobre los ejes de coordenadas del diagrama espacio-tiempo (Fig. 2.5). La coordenada t indica el *tiempo propio* del suceso y la x es la *distancia medida desde el origen* que se toma como punto de referencia. Recuerdese que t no es la hora en la que \mathcal{O} ve el suceso sino el tiempo medido en el sistema común de tiempos.

El *eje x* es el conjunto de *sucesos simultáneos* que ocurren a $t = 0$. Una paralela cualquiera al eje x ($t = T$) indica sucesos simultáneos que ocurren en otro instante de tiempo T .

El *eje t* es el conjunto de *sucesos que ocurren en el mismo lugar*, $x = 0$. Cada paralela al eje t ($x = X$) indica sucesos que ocurren en otro lugar X .

Elegiremos las escalas de modo que $c = 1$. De este modo, longitudes y tiempos tienen las mismas unidades (metros, por ejemplo). Así, $t = 1$ m es el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro según \mathcal{O} (un *metro-luz*).

Los *rayos luminosos* (líneas de universo de la luz) se representan por líneas a 45° , pues para ellos $t = x$ ó $t = -x$ (según la luz viaje de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente), ya que hemos tomado $c = 1$.

La *línea de universo de un objeto* que se mueva con velocidad uniforme v es una línea recta ($t = \frac{1}{v}x$) que forma un ángulo $\phi = \arctan v$ con el eje t . El signo es positivo o negativo según se mueva de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente. Veremos que el ángulo ϕ en valor absoluto es siempre $|\phi| < 45^\circ$. Si la línea de universo del objeto no es recta entonces el movimiento no es uniforme.

2.5.2 Observador en movimiento relativo: transformaciones de Lorentz

Hasta ahora hemos descrito las cosas tal y como las mediría un observador en reposo respecto a la vía. Veamos cómo dibujar el diagrama espacio-tiempo para otro observador como Gertrudis, que se mueve uniformemente en un vagón a gran velocidad, v , según el eje x . Seguimos tomando $c = 1$. Hacemos coincidir, por simplicidad, el origen de coordenadas de ambos observadores.

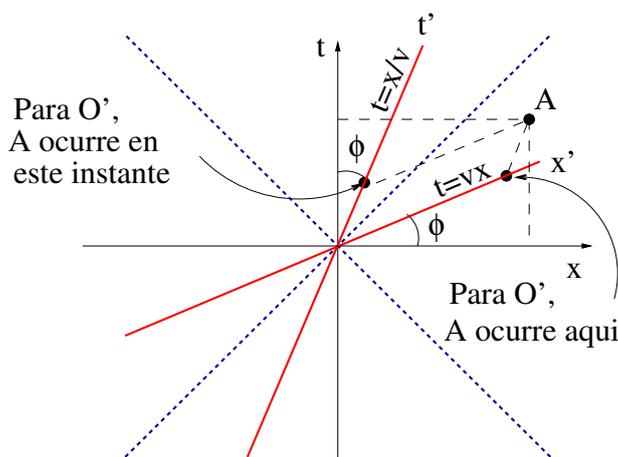


Figura 2.6: Diagrama espacio-tiempo para el observador móvil O' .

El eje x' es el conjunto de sucesos simultáneos que ocurren a $t' = 0$, lo que según (2.1) es lo mismo que la recta $t = vx$. Por tanto, forma un ángulo $\phi = \arctan v$ con el eje x .

El eje t' es el conjunto de sucesos que ocurren en $x' = 0$, lo que según (2.1) es lo mismo que la recta $t = \frac{1}{v}x$. Por tanto, forma el mismo ángulo $\phi = \arctan v$, esta vez, con el eje t .

Las *coordenadas espaciotemporales de un suceso*, por ejemplo el suceso A de antes, se hallan trazando paralelas a los ejes x' y t' , que ahora no serán perpendiculares entre sí (Fig. 2.6).

2.5.3 El intervalo y la calibración de los ejes

No todo es relativo al observador. Ya hemos visto que la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador. Además hay otra cantidad muy importante que también es

invariante. Se trata del *intervalo* entre dos sucesos, que cualquier observador puede determinar fácilmente a partir de sus medidas de la localización en el espacio y en el tiempo de dos sucesos cualesquiera. Supongamos, por simplicidad, que uno de los dos sucesos es el origen espaciotemporal O , que lo tomamos coincidente para dos observadores inerciales, \mathcal{O} y \mathcal{O}' , y sean (x, t) y (x', t') las coordenadas de otro suceso A , según cada observador. Entonces se define el intervalo como

$$\text{intervalo} \equiv \Delta s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \quad (2.4)$$

Es fácil comprobar usando las transformaciones de Lorentz (2.1) que esta igualdad se cumple.

El intervalo nos ayuda a *calibrar los ejes*: las *distancias entre las marcas de referencia de los ejes de cada observador no miden lo mismo* (véase la Fig. 2.7):

Para encontrar la relación entre las marcas de los ejes temporales (recordemos que tomamos $c = 1$) basta mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2 - x^2 = 1$ al eje t' , dado por $t = \frac{1}{v}x$.

Para los ejes espaciales hay que mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2 - x^2 = -1$ al eje x' , dado por $t = vx$.

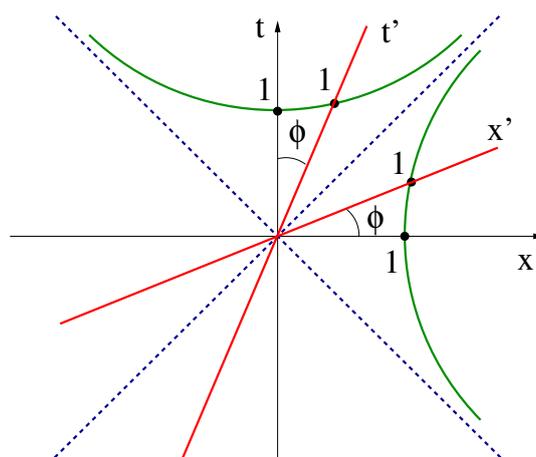


Figura 2.7: Calibrado de los ejes del observador \mathcal{O}' .

2.5.4 Orden temporal: pasado, presente, futuro y causalidad

Haciendo uso de los diagramas espacio-tiempo, es fácil ver que sucesos simultáneos para un observador no lo son para otro. Por ejemplo los sucesos O y C de la Fig. 2.8. Ésta es la relatividad de la simultaneidad de la que ya hemos hablado.

Ahora hay algo que nos preocupa. Hay sucesos que siguen el mismo orden temporal para dos observadores inerciales mientras que otros cambian de orden (Fig. 2.8). Sin embargo, esperamos que *algunos sucesos deben guardar el orden temporal para cualquier observador inercial*. Nos referimos a los que están relacionados de forma causal: de lo contrario viviríamos en un mundo en el que los efectos podrían preceder a sus causas dependiendo de la velocidad relativa con la que los observáramos. La región de sucesos en el espaciotiempo conectados causalmente con un suceso O en el origen se muestra en

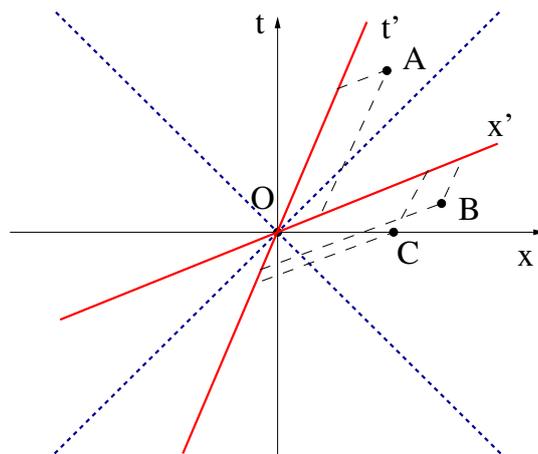


Figura 2.8: Los sucesos O y C son simultáneos para \mathcal{O} pero no para \mathcal{O}' . El suceso A ocurre después que el O, tanto para \mathcal{O} como para \mathcal{O}' . El suceso B ocurre después que el O para \mathcal{O} pero antes que el O para \mathcal{O}' .

la Fig. 2.9. Para demostrarlo basta con dibujar los ejes de un observador inercial que se mueve con velocidad arbitraria, pero *nunca superior a la de la luz*. Entonces es claro que sucesos situados por encima de líneas a 45° guardan siempre el mismo orden temporal: se trata del *cono de luz* de un observador situado en el origen de coordenadas. Nótese que:

- Los sucesos conectados causalmente están separados por un *intervalo positivo* (según nuestra definición (2.4)), que llamamos *tipo temporal*. No hay ningún observador inercial que pueda medir sucesos separados temporalmente como sucesos simultáneos. El orden temporal de dos sucesos es el mismo para cualquier observador inercial.
- Los sucesos no conectados causalmente están separados por un *intervalo negativo*, que llamamos *tipo espacial*. Siempre es posible encontrar un observador inercial que pueda medir sucesos separados espacialmente como sucesos simultáneos. El orden temporal de dos sucesos depende del observador.
- Los sucesos conectados por un rayo de luz están separados por un *intervalo nulo* o *tipo luz*.

Digamos finalmente que Einstein cambió radicalmente nuestro concepto de pasado, presente y futuro absolutos, introduciendo una nueva subdivisión: para un suceso O existe el *pasado* (parte inferior del cono de luz), el *presente* (vértice del cono de luz), el *futuro* (parte superior del cono de luz) y el *todo lo demás* (exterior al cono de luz). Ésta última subdivisión contiene a los sucesos que jamás pueden influir en O y también aquéllos en los que O tampoco influirá.

Ejercicios

- 2.1 Utilizando los diagramas de Minkowski, ilustra la dilatación de los intervalos de tiempo y la contracción de las longitudes.

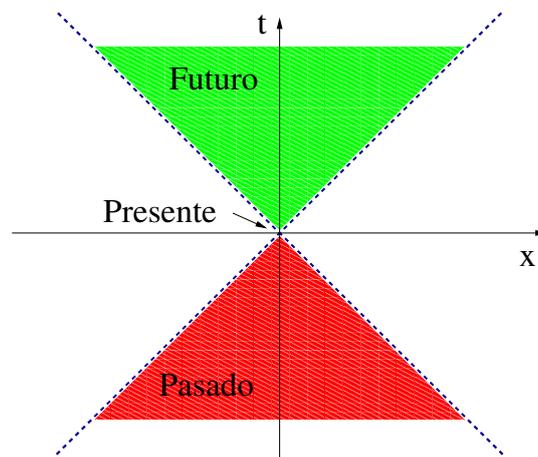


Figura 2.9: Región de sucesos conectados causalmente con el origen.

Tema 3

Relatividad: la misma historia según distintos protagonistas

3.1 La historia

Un tren que mide 100 m circula a la increíble velocidad de $\sqrt{3}/2$ veces la velocidad de la luz. El tren pasa por una estación cuyo andén mide 50 m y posee pasos a nivel con barreras a ambos extremos. El jefe de estación, que se encuentra en el extremo del andén por el que entra el tren, hace subir la barrera que hay a su lado y hace bajar la barrera del otro extremo en el mismo instante en que la cola del tren pasa frente a él.

¿Corren algún peligro las personas que intenten cruzar la vía por los pasos a nivel mientras la barreras estén subidas? Obviamente, la conclusión no puede depender del observador ¿Cómo es la película de los acontecimientos según el jefe de estación? ¿Y según el maquinista del tren?

3.2 Análisis de los hechos: diagrama espacio-tiempo

3.2.1 Protagonistas: dos observadores inerciales

Sea \mathcal{O} el jefe de estación, un observador fijo al extremo del andén, junto a la primera barrera.

Sea \mathcal{O}' un viajero situado en la cola del tren. Sus medidas de longitudes e intervalos de tiempo serán las mismas que las de cualquier otro observador en el tren, por ejemplo el maquinista. Hemos elegido al viajero de cola porque tomaremos el origen de tiempos y distancias coincidente con el momento en que la cola del tren pasa frente al jefe de estación.

3.2.2 Los puntos de vista: sistemas de referencia espacio-tiempo

En la Fig. 3.1 hemos dibujado los ejes espaciotemporales de ambos observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' . Ya conocemos su significado. El eje t forma un ángulo $\phi \approx 41^\circ$ con el eje t' , el

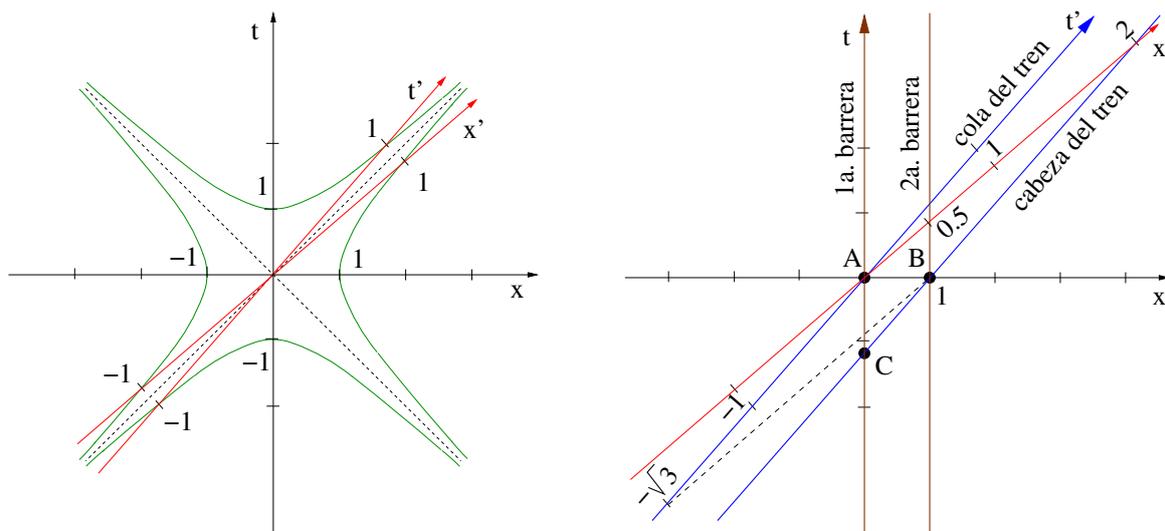


Figura 3.1: Diagrama espacio-tiempo dibujado por el jefe de estación. Escala 1:50 m.

mismo que forman los ejes x' y x , pues $\tan \phi = v = \sqrt{3}/2$. Recordemos que tomamos siempre $c = 1$. Los dos sistemas de referencia nos proporcionan visiones distintas, la de cada observador, de los mismos hechos. Las coordenadas de los mismos sucesos serán diferentes para cada observador, estando relacionadas mediante las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = 2, \end{aligned}$$

que no necesitaremos utilizar, pues las leeremos directamente en el diagrama espacio-tiempo.

3.2.3 Distintas varas de medir: calibrado de los ejes

A continuación hemos de calibrar los ejes. Recordemos que la separación entre dos marcas consecutivas de los ejes (distancia o tiempo unidad) no miden lo mismo para cada observador (aunque para ambos expresen una *unidad*).

Como ya sabemos, hay que trazar las hipérbolas $t^2 - x^2 = \pm 1$. Los puntos de corte con los respectivos ejes determinan las distancias y tiempos unidad. Esto se hace gráficamente, sin necesidad de realizar ningún cálculo. Se obtiene fácilmente que las unidades que usa \mathcal{O}' son, en este caso, $\sqrt{7}$ veces las de \mathcal{O} .

3.2.4 Los hechos: líneas de universo

Dibujamos también las líneas de universo de los objetos más relevantes que intervienen en nuestra historia.

Las barreras se representan mediante líneas verticales paralelas al eje t , que cortan al eje x en $x = 0$ (primera barrera) y en $x = 50$ m (segunda barrera).

La cola del tren es una línea recta que coincide con el eje t' (recta de ecuación $t = \frac{1}{v}x$) y la cabeza del tren es una paralela a la anterior que pasa por el punto $(x = 50 \text{ m}, t = 0)$.

3.2.5 Momentos clave: sucesos relevantes

| | Para \mathcal{O} : (x, t) | Para \mathcal{O}' : (x', t') |
|---|--------------------------------|--|
| Suceso A: La cola llega a la primera barrera | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |
| Suceso B: La cabeza llega a la segunda barrera | $(50 \text{ m}, 0)$ | $(100 \text{ m}, -50\sqrt{3} \text{ m})$ |
| Suceso C: La cabeza llega a la primera barrera | $(0, -100/\sqrt{3} \text{ m})$ | $(100 \text{ m}, -200/\sqrt{3} \text{ m})$ |

Tabla 3.1: Sucesos más relevantes.

Señalemos ahora tres sucesos importantes en nuestra historia (Tabla 3.1).

Suceso A: Se eleva la primera barrera y la cola del tren pasa frente al jefe de estación. Lo hemos tomado como origen de distancias y tiempos tanto para \mathcal{O} como para \mathcal{O}' . Sus coordenadas son $(x_A = 0, t_A = 0)$ o bien $(x'_A = 0, t'_A = 0)$.

Suceso B: Se baja la segunda barrera. Esto ocurre, para \mathcal{O} en el mismo instante en que se eleva la primera y en el otro extremo del andén. Por tanto, sus coordenadas son $(x_B = 50 \text{ m}, t_B = 0)$. Es inmediato determinar gráficamente que las coordenadas de este suceso para el observador \mathcal{O}' son $(x'_B = 100 \text{ m}, t'_B = -50\sqrt{3} \text{ m})$.

Suceso C: La cabeza del tren alcanza la primera barrera. Este suceso ocurre antes que los otros dos para cualquier observador.

3.2.6 Longitudes

Cada observador mide sus longitudes comparando las coordenadas espaciales de dos sucesos simultáneos: los extremos del objeto a medir *en el mismo instante de tiempo*. Veamos entonces cuál es la longitud del tren y del andén según cada uno.

Para un observador \mathcal{O} en la estación, el andén siempre mide 50 m (diferencia entre las coordenadas espaciales x de las líneas de universo de las dos barreras en cualquier instante común de tiempos t) y el tren siempre mide 50 m (diferencia entre la coordenada espacial x de la línea de universo de la cabeza del tren menos la x de la línea de universo de cola, en cualquier instante común de tiempos t).

Para un observador \mathcal{O}' en el tren, el andén siempre mide 25 m (diferencia entre las coordenadas espaciales x' de las líneas de universo de las dos barreras en cualquier instante común de tiempos t') y el tren siempre mide 100 m (diferencia entre la coordenada espacial x' de la línea de universo de la cabeza del tren menos la x' de la línea de universo de cola, en cualquier instante común de tiempos t').

3.2.7 Secuencia temporal

Para un observador \mathcal{O} en la estación, los sucesos A y B son simultáneos: la primera barrera sube cuando la segunda barrera baja. La cola del tren está en $x = 0$ y la cabeza

en $x = 50$ m en ese instante.

Para un observador \mathcal{O}' en el tren, el suceso B es anterior al suceso A: la segunda barrera baja $50\sqrt{3}$ m antes de que suba la primera barrera. Nótese que en ese instante en que baja la segunda barrera, la primera barrera está en $x' = 75$ m (un cuarto del tren ha penetrado ya en la estación) y la segunda en $x' = 100$ m (justo a la altura de la cabeza del tren).

3.2.8 Tiempo que el tren tarda en cruzar la estación

Para un observador \mathcal{O} en la estación, el tren tarda $\Delta t = t_B - t_C = 100/\sqrt{3}$ m en cruzar la estación. Esto es lógico porque para él el andén mide $l = 50$ m y el tren pasa a $v = \sqrt{3}/2$ y por tanto $\Delta t = l/v$.

Para un observador \mathcal{O}' en el tren, el tren tarda $\Delta t' = t'_B - t'_C = 50/\sqrt{3}$ m en cruzar la estación. Esto también es lógico porque para él el andén mide $l' = 25$ m y por tanto $\Delta t' = l'/v$. Nótese que debido a la contracción de Lorentz, $l' = l/\gamma \Rightarrow \Delta t' = \Delta t/\gamma$.

3.3 Versiones de lo ocurrido

Véase la Figura 3.2.

3.3.1 La película según el jefe de estación

Para el jefe de estación, o cualquier persona situada en reposo respecto al andén, el tren que se acerca mide 50 m, lo mismo que mide el andén.

Para cualquier observador fijo respecto a la estación, la subida de la barrera del extremo por el que entra el tren, la bajada de la barrera opuesta y el paso de la cola del tren frente al jefe de estación son sucesos simultáneos.^a

Por tanto, la barrera opuesta es bajada justo en el momento en que la cabeza del tren pasa frente a ella, con lo que *no habrá ningún peligro para los transeúntes*.

3.3.2 La película según el maquinista del tren

Para el maquinista del tren, o cualquier viajero en el mismo, el tren mide 100 m, mientras que el andén mide sólo 25 m.

Para cualquier observador en el tren, la subida de una barrera y la bajada de la otra no son sucesos simultáneos, sino que la barrera de cabeza se baja $50\sqrt{3}$ m (esto es 2.89×10^{-7} s) antes de que se suba la barrera de cola al pasar ésta frente al jefe estación.

Por tanto, según cualquier viajero, el tren se aproxima a una estación con un andén mucho más corto que el mismo tren. Antes de que la cola del tren llegue a la primera

^aTodos saben descontar el tiempo que la luz tarda en recorrer la distancia desde las barreras hasta donde se encuentran y estarán de acuerdo en que son sucesos que han ocurrido a la vez en su sistema común de tiempos.

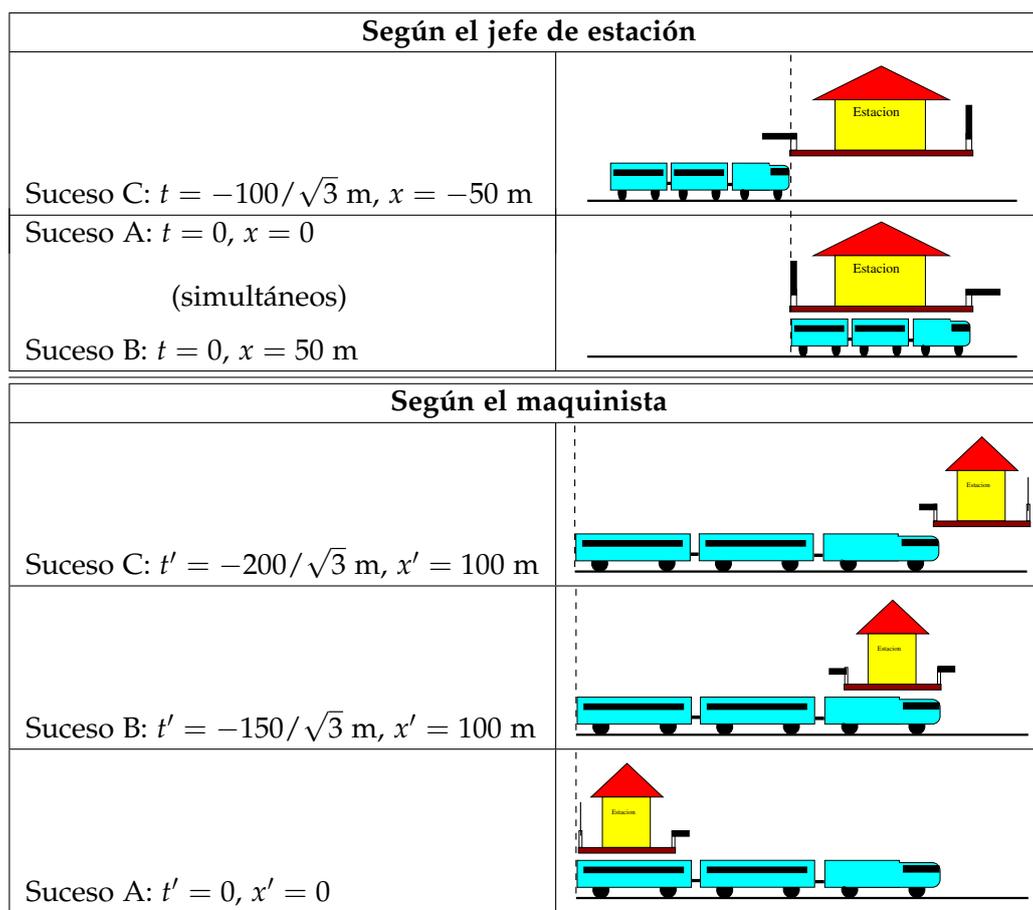


Figura 3.2: Varios “fotogramas” de la película de los hechos según cada observador.

barrera, la segunda barrera se baja. ¡Menos mal! debe pensar el viajero, porque como el tren es más largo que el andén, la cabeza ya debe estar a la altura de la segunda barrera, y así es. Cuando la cola del tren llega a la altura de la primera barrera, ésta se sube. La otra ya llevaba un tiempo bajada, con lo que *no habrá ningún peligro para los transeúntes*.

3.4 Conclusiones

La longitud propia del tren es 100 m y la del andén es 50 m (éstos son los valores que mediría cualquier observador en reposo respecto a ellos).

Resulta que para el jefe de estación el tren mide la mitad de su longitud propia y el maquinista mide también la mitad de la longitud propia del andén. Éste es el efecto de la *contracción de Lorentz*. En este caso el factor de contracción es $\gamma = 2$.

Diferentes observadores inerciales *discrepan sobre la película de lo sucedido y sobre las medidas que hacen, pero están de acuerdo en lo fundamental*: la primera barrera sube cuando la cola del tren pasa frente al jefe de estación que hay junto a ella y la segunda barrera se baja cuando la cabeza del tren llega a su altura, y por tanto no hay peligro para los que vayan a cruzar los pasos a nivel.

Todo esto no nos extrañaría en absoluto si nuestra *intuición relativista* estuviera desarrollada. No lo está porque la velocidad de la luz es muy grande y no hay trenes circulando a velocidades comparables a la de la luz. En un mundo donde c fuese más pequeña estaríamos acostumbrados a estas situaciones.

Ejercicios

3.1 Un pistolero dispara simultáneamente sus dos revólveres, con las manos separadas 80 cm, contra un tren que pasa frente a él a una velocidad de $0.6c$.

- a) ¿Cuál es la distancia entre los revólveres según los viajeros del tren?
- b) ¿Cuál es la separación entre los agujeros de bala en los laterales del vagón?

Haz un diagrama espacio-tiempo y discute los resultados.

Tema 4

La paradoja de los gemelos

4.1 La aventura de los gemelos

En el día de Año Nuevo de 2050, Diana parte de la Tierra en dirección a α Centauro, a una distancia de 4 años-luz, viajando a una velocidad de $0.8c$. Inmediatamente después de llegar a su destino, Diana regresa a la Tierra a la misma velocidad, aterrizando en el punto de partida el día de Año Nuevo de 2060.

Diana tiene un hermano gemelo, Apolo, que permanece en la Tierra. Ambos habían acordado felicitarse mutuamente por teléfono-radar cada día de Año Nuevo, hasta que se volvieran a ver en casa.

Veamos lo que ocurre en todo este tiempo según cada uno de los gemelos. El intercambio de felicitaciones a principios de cada año nos ayudará a entender mejor la solución de la *aparente* paradoja que se plantea.

4.2 La paradoja

Apolo aguarda a su hermana durante $t = 10$ años, pues se tarda 5 años en llegar a α Centauro viajando a $0.8c$. Él observa que su hermana se aleja a una enorme velocidad durante 5 años y luego se acerca a la misma velocidad otros 5 años. Apolo conoce la teoría de la relatividad, así que espera que el tiempo para Diana haya transcurrido más lentamente, $t' = t/\gamma = 6$ años, pues el factor de Lorentz es $\gamma = 5/3$ en ambos recorridos. Por tanto, Apolo espera encontrarse a su hermana gemela *Diana 4 años más joven*.

Por otro lado, podríamos intentar resolver el problema desde el punto de vista de Diana. Para ella, es Apolo el que se aleja a velocidad $0.8c$. Cuando para ella transcurren $t' = 6$ años para Apolo pasan $t = t'/\gamma = 3.6$ años. Por tanto, Diana espera encontrarse a su hermano gemelo *Apolo 2.4 años más joven*.

Llegamos pues a una contradicción: parece que *ambos* deberían ser más jóvenes que su hermano gemelo. ¡Ésta es la paradoja!

Algunos detractores de la teoría de Einstein utilizaron esta inconsistencia para argumentar que era por consiguiente absurdo que uno de los gemelos fuera más joven que el otro tras el viaje. La cuestión en realidad es *¿qué está mal en el razonamiento anterior?*

4.3 Solución

Veremos que el cálculo que hace Apolo es el correcto pues la simetría aparente del problema no es tal: no es lo mismo que Apolo vea alejarse y luego acercarse a su hermana que Diana vea alejarse y luego acercarse a Apolo. La *asimetría* entre ambas situaciones se manifiesta en que mientras Apolo envía 10 felicitaciones a Diana por Año Nuevo, Diana envía sólo 6, incluyendo las que se envían en el último día de viaje.

Concluimos que es cierto que uno de los gemelos es más joven que el otro tras el viaje: Diana será 4 años más joven.

4.3.1 Diagrama espacio-tiempo

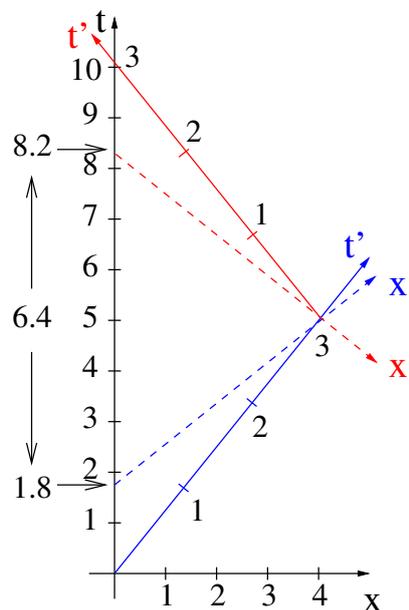


Figura 4.1: Diagrama espacio-tiempo realizado por Apolo.

En la Fig. 4.1 se muestra el diagrama espacio-tiempo del viaje de Diana trazado por Apolo, en el sistema de referencia de la Tierra. Hemos dibujado también los *ejes espaciotemporales del sistema de referencia de Diana* notando que son diferentes para el viaje de ida y el de vuelta. Expresamos las escalas de todos los ejes en años-luz.

Es fácil leer en el diagrama que el tiempo total transcurrido para Apolo es de 10 años mientras que para Diana transcurren $3+3=6$ años. El tiempo de Diana parece correr más despacio que el de Apolo. *Diana es 4 años más joven que Apolo.*

Sobre el diagrama se han trazado también las líneas de simultaneidad de Diana justo antes y justo después de llegar a α Centauro (sus ejes espaciales). Es muy llamativo lo que el diagrama espacio-tiempo nos muestra:

- Un instante antes de que Diana dé la vuelta, para ella han transcurrido 3 años mientras que para Apolo sólo han pasado 1.8 años: el tiempo de Apolo parece correr más despacio que el de Diana (para ella, y hasta ese momento, Apolo le parece más joven). Hasta aquí la situación es simétrica.

- Un instante después, Diana da la vuelta y entonces su línea de simultaneidad cambia drásticamente: de repente observa que su hermano (que hace un momento le parecía más joven que ella) *envejece 6.4 años repentinamente*. A partir de ese momento para ella transcurren otros 3 años, en los que Apolo parece envejecer sólo 1.8 años. Sin embargo, el salto brusco de edad que experimentó Apolo mientras ella daba la vuelta determina que en el momento del reencuentro *Diana es efectivamente 4 años más joven que Apolo*.

4.3.2 El número de felicitaciones por Año Nuevo

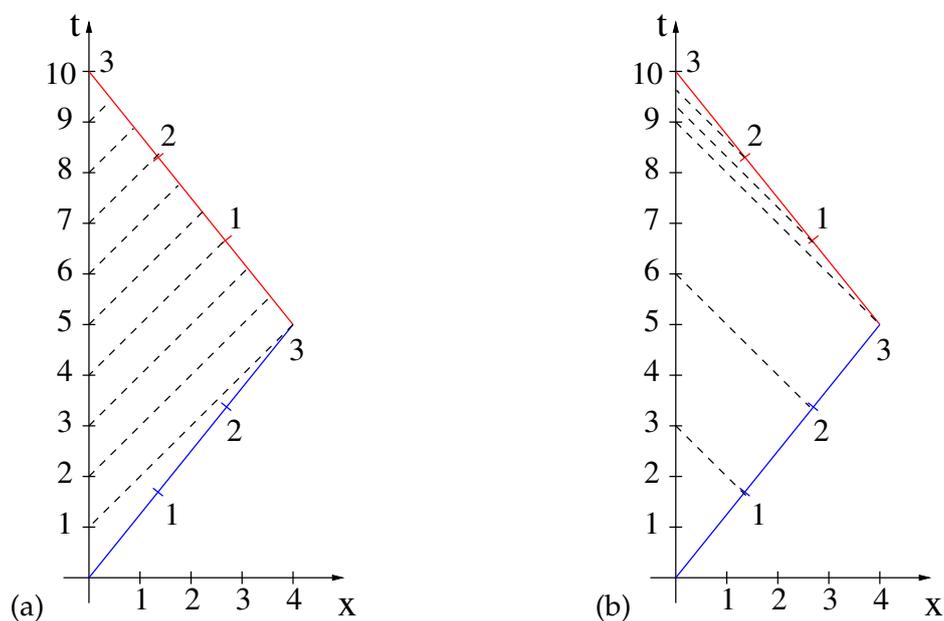


Figura 4.2: Líneas de universo de las felicitaciones de Apolo a Diana (a) y de Diana a Apolo (b).

Veamos que en efecto hay una asimetría en el movimiento relativo entre Apolo y Diana que determina que sólo uno de los dos sea más joven que el otro, de modo que no hay paradoja.

En la Fig. 4.2a se muestran las líneas de universo de todas las señales de radar que Apolo envía a Diana cada Año Nuevo. Vemos que *Diana recibe 10 felicitaciones*. Diana recibe sólo una antes de llegar a α Centauro, cuando habían pasado 3 años, justo antes de dar la vuelta. Las 9 restantes le llegan durante su viaje de vuelta a razón de una cada $1/3$ año (4 meses).

En la Fig. 4.2b se muestran las líneas de universo de todas las señales de radar que Diana envía a Apolo cada Año Nuevo. Vemos que *Apolo recibe 6 felicitaciones*. Las 3 primeras a razón de una cada 3 años y las otras 3 en el último año.

Este resultado está relacionado con el efecto Doppler, que estudiaremos en el Tema 6.

4.3.3 Interpretación de lo sucedido

En el momento de dar la vuelta, Diana pasa de un sistema de referencia inercial a otro distinto, mientras que Apolo está todo el tiempo en un mismo sistema inercial. Éste es el origen de la asimetría y la razón por la que sólo el cálculo de Apolo es correcto.

El argumento del párrafo anterior es suficiente para entender lo sucedido, pero podemos ir más lejos. Mientras manobra para dar la vuelta (deceleración y aceleración posterior en sentido contrario) *Diana siente fuerzas de inercia que no siente Apolo*.^a Durante esos instantes (tal vez días), *Diana deja de ser un observador inercial y, por tanto, la Relatividad Especial no nos dice cómo cambian sus coordenadas espaciotemporales*, es decir no nos permite averiguar qué es lo que ella observaría.^b Lo que sí sabemos es que *mientras dura la maniobra su reloj parece ir muy despacio*, pues desde su punto de vista cuando la maniobra acaba Apolo ha envejecido 6.4 años muy rápidamente: *cuando Diana deja de acercarse uniformemente a α Centauro Apolo es 1.2 años más joven que ella y cuando empieza a abandonar uniformemente la estrella Apolo es 5.2 años mayor que ella*. Mientras mantenga rumbo uniforme hacia la Tierra Diana vuelve a ser un observador inercial y los cálculos de dilatación vuelven a ser correctos: Apolo envejece más lentamente que ella, de modo que en los siguientes 3 años Apolo envejece sólo 1.8 años. Así, cuando se encuentran Apolo es 6.4 años mayor que ella.

Podríamos argumentar que, en su partida y a su regreso a la Tierra, Diana experimenta fuerzas de inercia que no hemos tenido en cuenta y que la harían parecer aún más joven de lo que hemos calculado, pues, según hemos visto, el efecto de la aceleración parece ser el retraso de los relojes. Sin embargo, tal efecto es despreciable ya que suponemos que las aceleraciones tienen lugar relativamente cerca de su hermano (en poco tiempo) y por tanto el giro de sus líneas de simultaneidad se traduce en un pequeño desplazamiento sobre el eje temporal de Apolo.

4.3.4 Algunos comentarios

En el razonamiento anterior hemos supuesto explícitamente que el reloj (biológico) de Diana medido por Apolo (observador inercial) corre al mismo ritmo antes y después de sufrir las aceleraciones cuando las velocidades relativas son las mismas. Ésta es la *hipótesis del reloj* que establece que el ritmo de un reloj medido por un observador inercial depende sólo de su velocidad relativa a ese observador y es independiente de su aceleración (o derivadas más altas). Los experimentos de Bailey y colaboradores^c en los años 70 han comprobado esta hipótesis para aceleraciones de hasta $10^{18}g$.

Cuando estudiemos la Relatividad General (RG) veremos que se establece una equivalencia entre observadores acelerados y observadores sometidos a un campo gravitatorio. En RG no hay observadores privilegiados, el movimiento es relativo incluso para

^aDe hecho deber ser una dura experiencia para Diana. La deceleración y la posterior aceleración debe hacerlas gradualmente o de lo contrario quedará aplastada por fuerzas de muchísimos gs.

^bPodemos imaginar lo que ocurriría si Diana pudiera ver a su hermano a través de un monitor en su nave (con el lógico retraso): Apolo envejecería 6.4 años en un instante, mientras dure la maniobra de frenada y reaceleración rumbo a la Tierra. En cambio para Apolo los relojes de la nave de Diana siguen marchando de forma constante y siempre más lentamente que los suyos en Tierra.

^cSe compararon las vidas medias de muones de gran energía moviéndose en línea recta con las de muones de la misma energía dando vueltas en un anillo de almacenamiento.

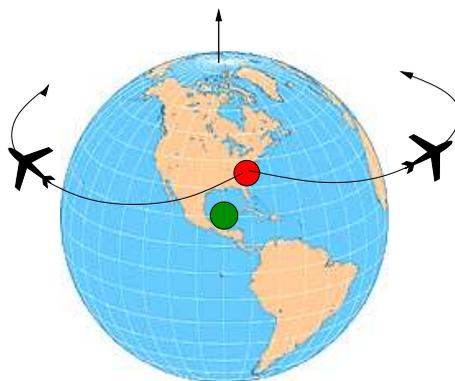


Figura 4.3: Experimento de Hafele y Keating.

observadores acelerados, de modo que Diana puede interpretar que el universo entero frena y da la vuelta respecto a su nave y Apolo puede interpretar que la nave de Diana frena y da la vuelta respecto a la Tierra y el resto del universo. Parece que la situación vuelve a ser simétrica pero no es así: en el primer caso Diana sufre el retraso de su reloj (biológico o cualquier otro) pues se ve sometida a un intenso campo gravitatorio originado por todo el Cosmos, cuya inercia es enorme, mientras que en el segundo caso el reloj de Apolo no se ve afectado por la pequeña perturbación que supone el minúsculo campo gravitatorio equivalente al cambio de dirección de la nave de Diana, cuya inercia es comparativamente despreciable. Por tanto, a diferencia de Diana, decir que *Apolo es un observador inercial es una muy buena aproximación*.

4.4 Comprobación experimental: relojes voladores

Todavía no es factible que alguien haga un viaje de ida y vuelta a enormes velocidades por el espacio para comprobar que realmente para él el tiempo ha pasado más despacio. Sin embargo, en octubre de 1971 Hafele y Keating realizaron un conclusivo experimento que proporciona sin ninguna ambigüedad la solución empírica a la paradoja de los gemelos (Fig. 4.3).^d

Cuatro relojes atómicos de cesio viajaron en línea aérea regular a bordo de varios aviones alrededor del mundo, primero en dirección este y luego en dirección oeste.^e Otro reloj de cesio se dejó como referencia en Washington. Respecto a un hipotético reloj situado en el centro de la Tierra (sistema de referencia que se puede considerar localmente inercial, como ya veremos) todos los relojes se dilatan en un factor de Lorentz que viene dado por la velocidad lineal de rotación de la Tierra v_T (reloj de Washington), la suma de v_T y la velocidad de los aviones v_A (relojes que vuelan en dirección este) y la diferencia entre v_T y v_A (relojes que vuelan en dirección oeste). El efecto final es que, respecto al reloj que se queda en Washington, cabe esperar que los relojes que viajan hacia el este se retrasen y los que viajen hacia el oeste se adelanten. Se observó que efectivamente así fue. Las predicciones deben tener en cuenta, además del efecto de dilatación cinemática que hemos mencionado (véase Ejercicio 4.1), el efecto de dilatación gravita-

^dJ. C. Hafele y R. E. Keating, *Science* **177** (1972) 166.

^eEl experimento costó 8000 dólares de los cuales 7600 se invirtieron en billetes de avión.

toria del que hablaremos más adelante (Tema 10). Allí compararemos la predicción total con el efecto observado (Ejercicio 10.1).

Ejercicios

4.1 Suponiendo que los vuelos del experimento de Hafele y Keating fueron ecuatoriales, a unas velocidades medias respecto al suelo de 713 km/h hacia el este y 440 km/h hacia el oeste, y durante un tiempo de 41.2 y 48.6 horas respectivamente, comprueba que la relatividad especial predice que:

- a) Los relojes que viajan hacia el este se retrasan 184 ns.
- b) Los relojes que viajan hacia el oeste se adelantan 96 ns.

Ayuda: Es conveniente usar la aproximación $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$ si $x \ll 1$. $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$.

Tema 5

Apariencia de los objetos que se mueven a altas velocidades

5.1 Introducción

Ya hemos visto que cuando los objetos se mueven a muy altas velocidades con respecto a un observador, éste *mide* que se contraen en la dirección del movimiento. No se produce contracción en las otras direcciones. No olvidemos que **las medidas nos dicen cómo son realmente los objetos** y que por tanto son *realmente diferentes para cada observador*.

Nos ocuparemos ahora de estudiar qué aspecto tendrían estos objetos si pudiéramos *verlos* o *fotografiarlos*. Curiosamente, esta cuestión no se empezó a considerar hasta 1959.

Ver un objeto significa recibir luz procedente de ese objeto. En un diagrama espacio-tiempo es fácil encontrar la posición en que *se encontraba* cada parte de un objeto en el momento de emitir los rayos de luz que forman su *imagen*. Para ello basta trazar líneas a 45° respecto a los ejes. La *distancia del observador a cada punto del objeto es importante*.

Existen varios mecanismos que alteran la imagen que tenemos de un objeto en reposo cuando lo vemos en movimiento. El primero, la contracción de Lorentz, no altera sólo la imagen, sino que constituye un cambio real de las dimensiones del objeto. En la excelente web *Through Einstein's Eyes* [14] pueden verse vídeos de simulaciones por ordenador con explicaciones de los distintos efectos (incluyendo distorsiones de color debidos al efecto Doppler, que discutiremos en el Tema 6).

5.2 Mecanismos de distorsión de las imágenes

5.2.1 Contracción de Lorentz

De ella ya hemos hablado. De hecho no es resultado de la distorsión de la imagen. Si nos situamos frente al punto medio del túnel por el que pasaba el vagón de Gertrudis y hacemos una foto cuando veamos desaparecer simultáneamente los dos extremos del mismo en su interior, *veremos* que es tan largo como el túnel. En cambio si hacemos una foto del mismo vagón en reposo *veremos* que es más largo que el túnel. En particular,

la longitud del vagón se contrae un factor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, el factor de Lorentz, en la dirección del movimiento (efecto monodimensional). Pero eso no es todo.

5.2.2 Rotación aparente

Miremos ahora el vagón de Gertrudis con más detenimiento cuando su punto medio pasa frente a nuestro objetivo a gran velocidad. No sólo vemos que su longitud es menor, también *vemos partes del vagón que no veríamos si éste estuviera en reposo* respecto a nosotros (Fig. 5.1). Durante el tiempo que emplea la luz en recorrer una distancia igual a la anchura del vagón, la parte del vagón que nos impediría ver la esquina posterior trasera del vagón se aparta de la trayectoria que sigue la luz y podemos verla. Este efecto tridimensional, llamado *rotación de Terrell* se magnifica cuando el vagón va más rápido y tiene lugar *cuando la distancia al observador es suficientemente grande*.

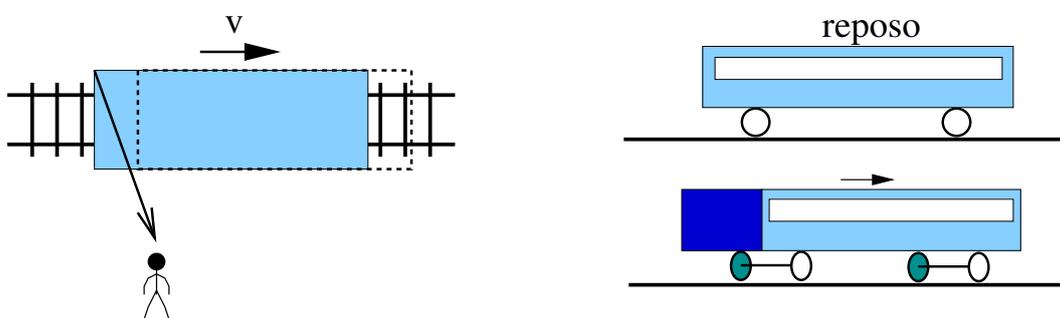


Figura 5.1: Vagón a gran velocidad visto desde el andén.

5.2.3 Retrasos de la luz

Supongamos ahora que en el centro del vagón de Gertrudis hay una barra delgada situada verticalmente (Fig. 5.2). Supongamos que el objetivo de nuestra cámara está a la altura del punto medio de la barra. Entonces *la luz de los puntos más alejados del centro de la barra llegan a la cámara con retraso*. El efecto neto es una *imagen combada*. Este efecto bidimensional es *más acusado cuando la distancia al observador es pequeña*.

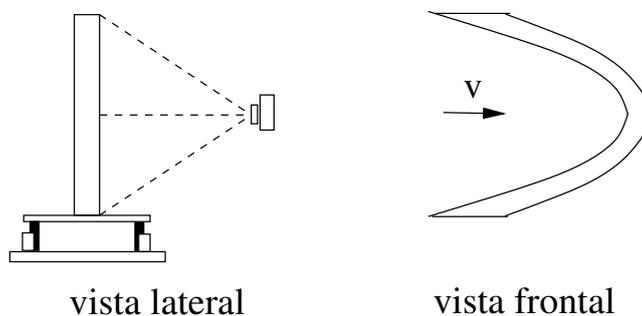


Figura 5.2: Barra vertical situada sobre el vagón vista desde el andén.

5.2.4 Ejemplos

En las siguientes figuras se muestran fotografías de objetos que se mueven a diferentes velocidades frente a una cámara situada a distintas distancias.^a En ellas se combinan los tres efectos descritos anteriormente. Las dos primeras muestran objetos bidimensionales y las otras tres objetos tridimensionales.

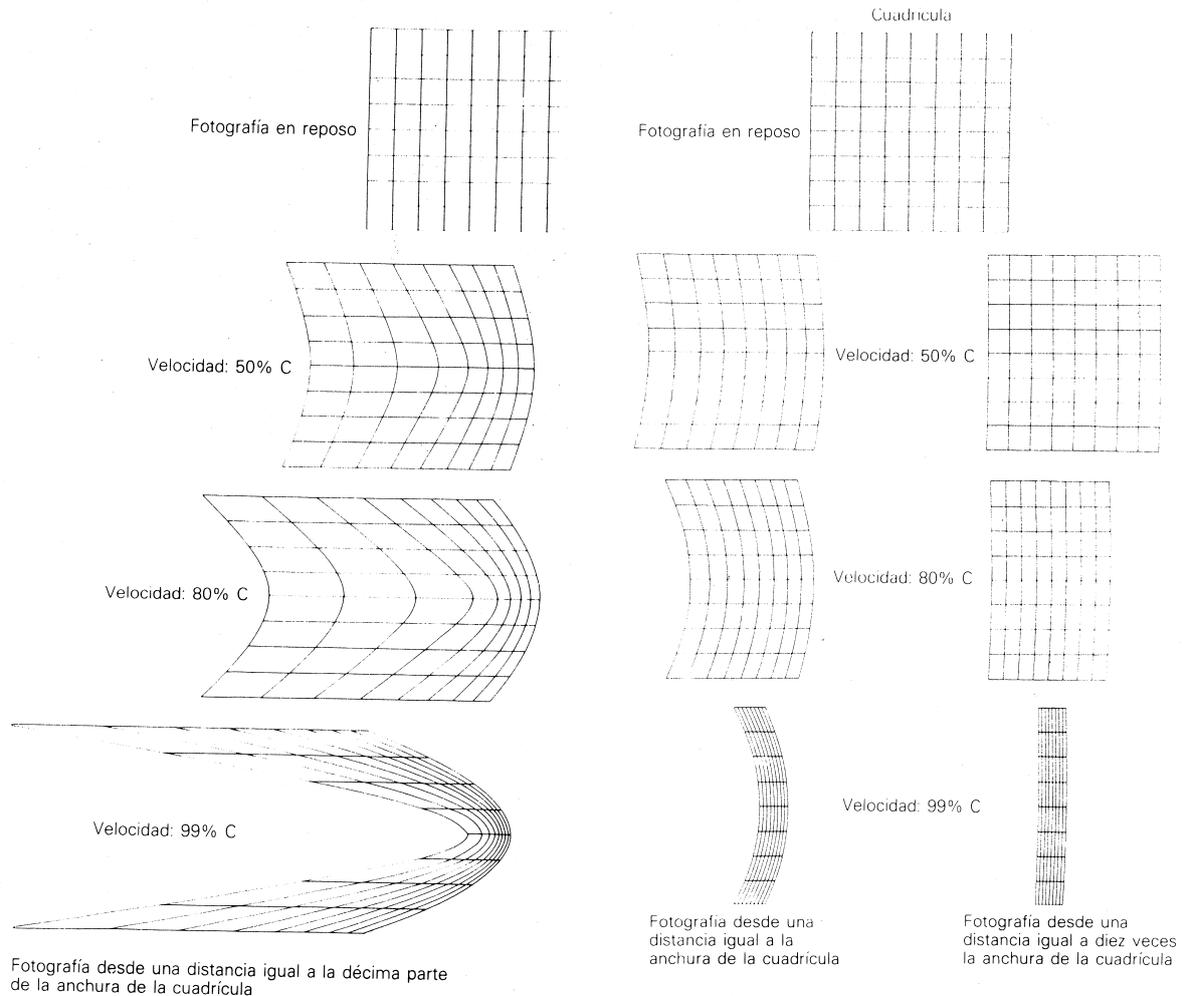


Figura 5.3: Cuadrícula.

^aFiguras dibujadas por ordenador extraídas de [4].

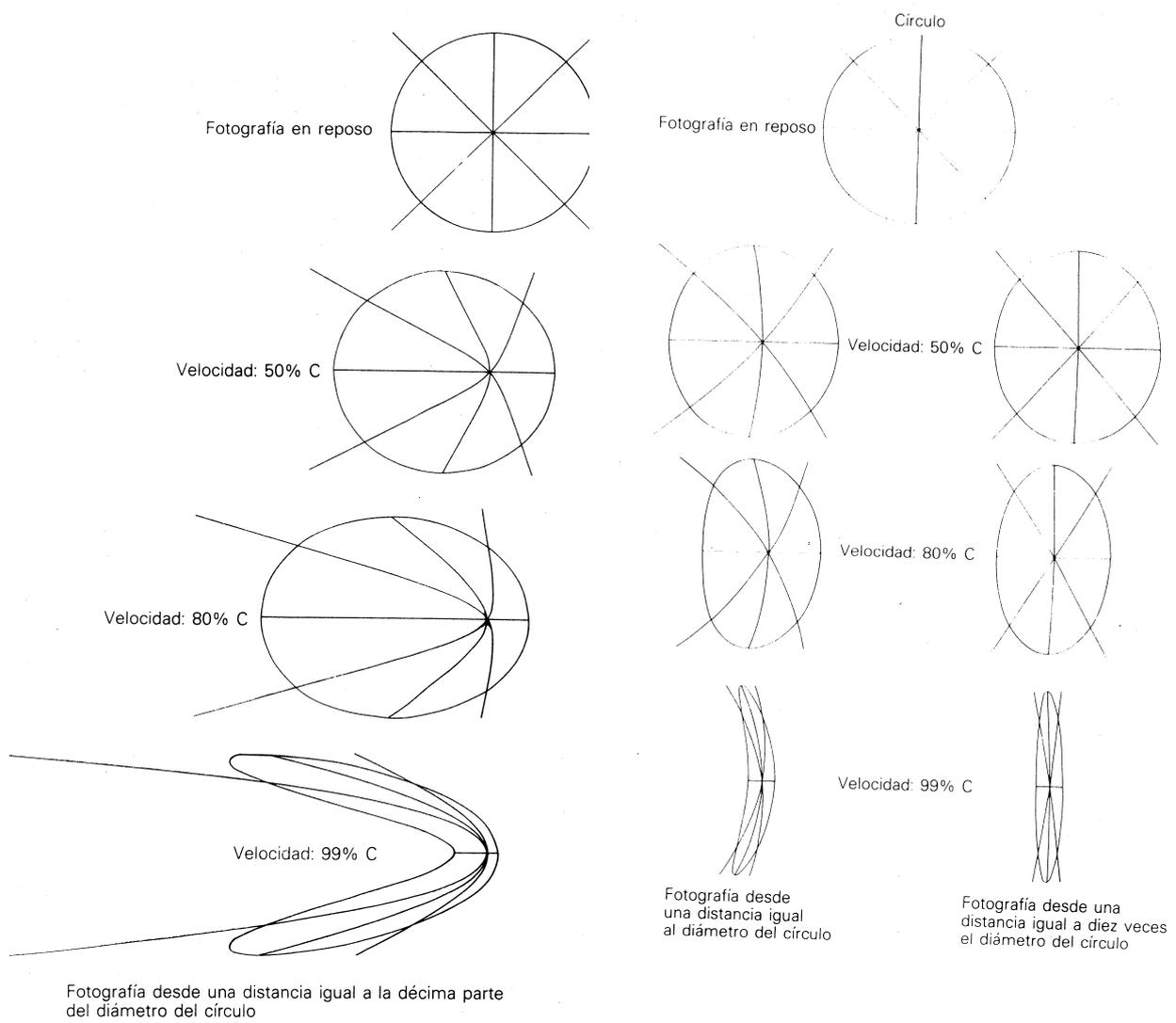


Figura 5.4: Círculo.

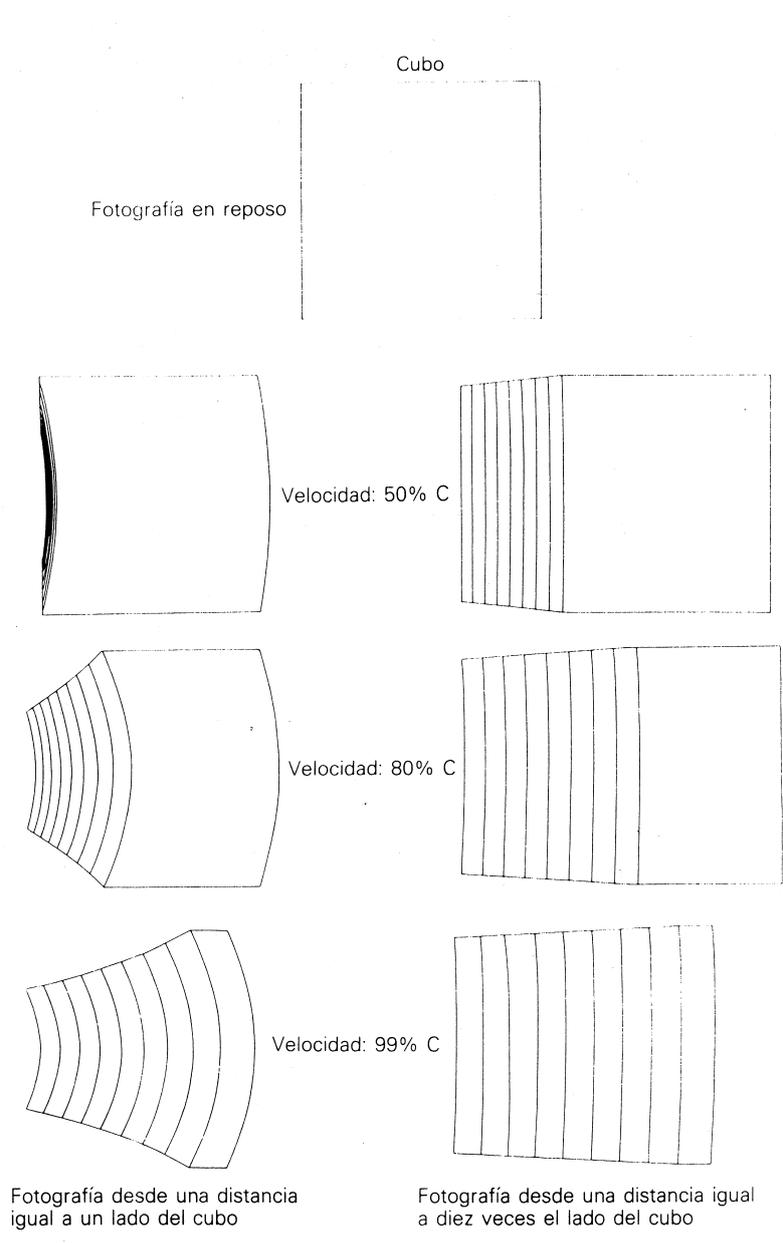


Figura 5.5: Cubo.

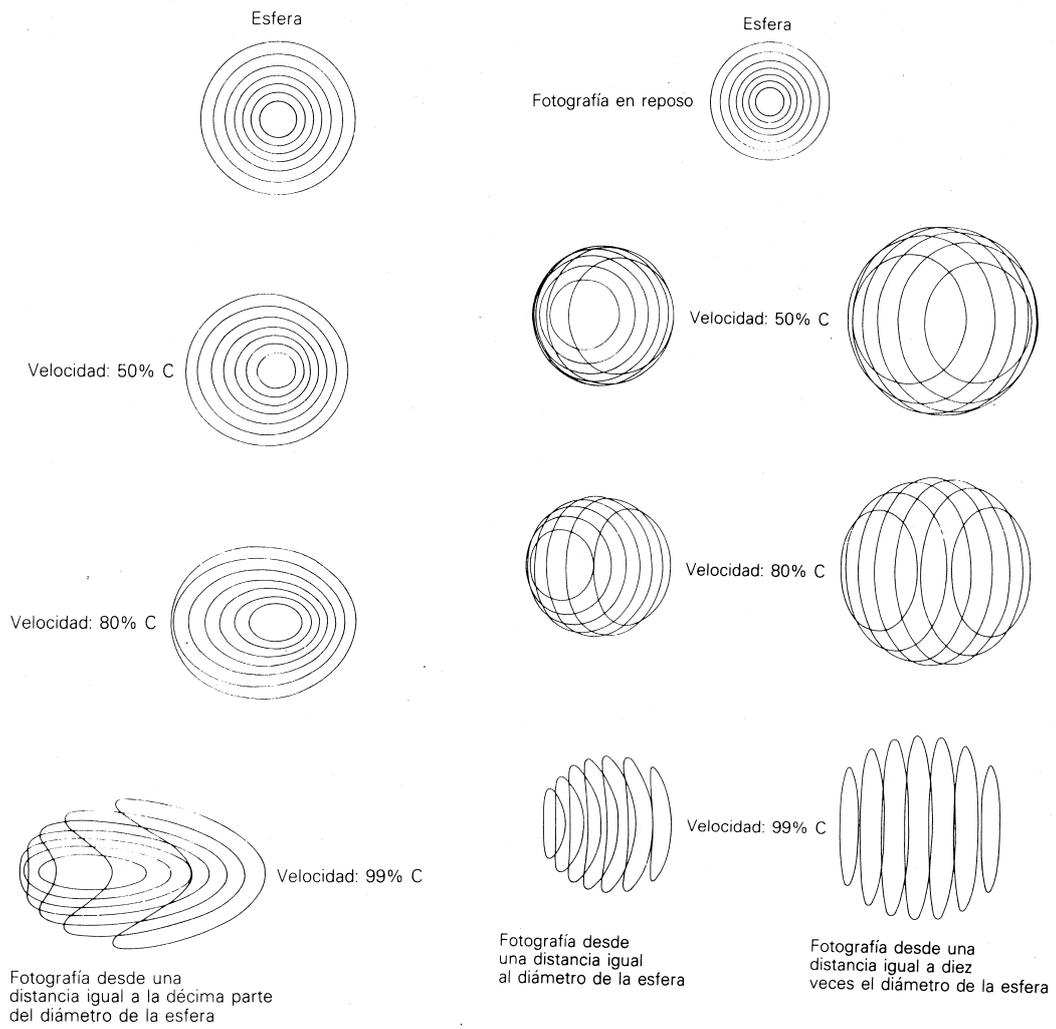


Figura 5.6: Esfera.

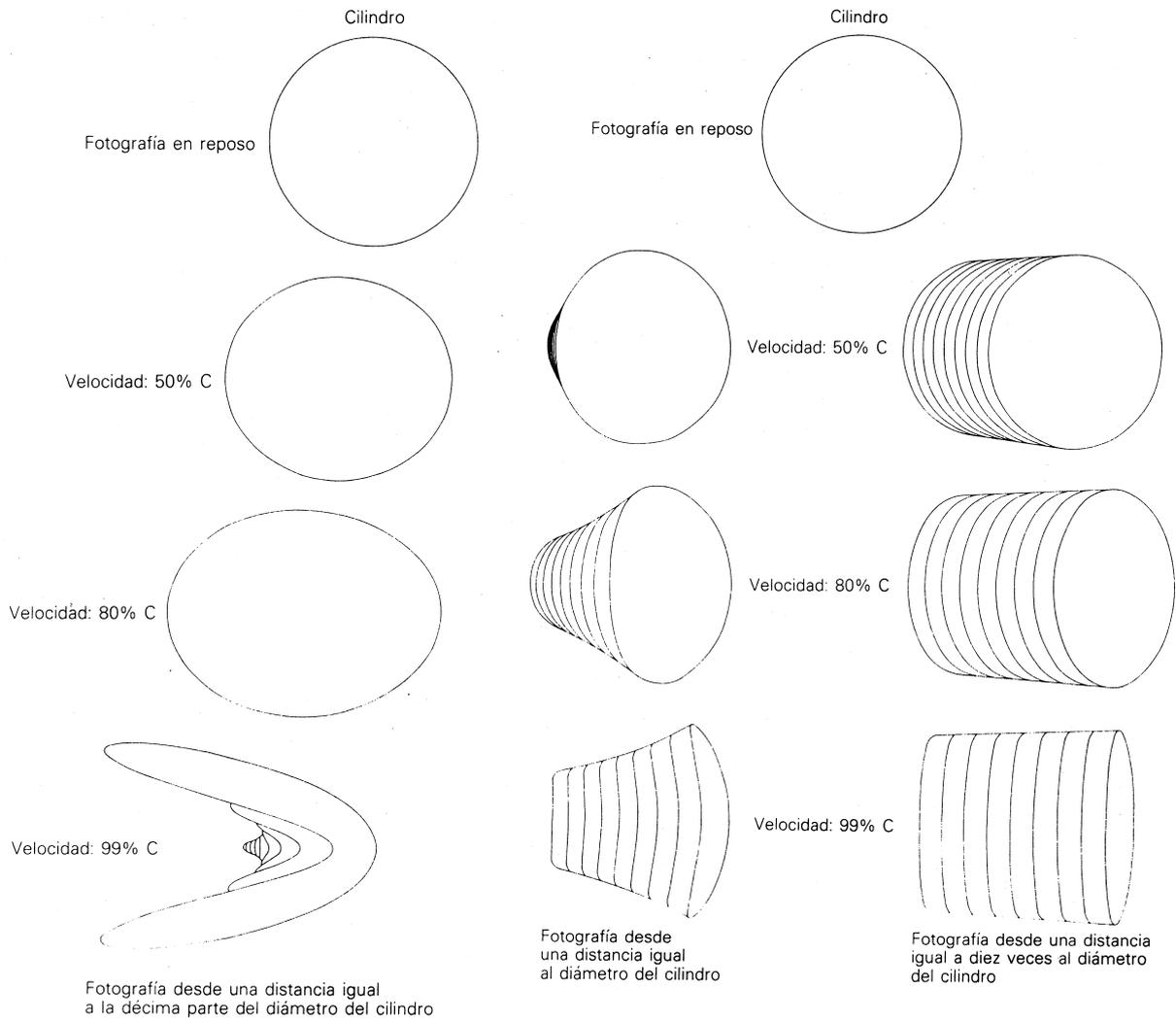


Figura 5.7: Cilindro.

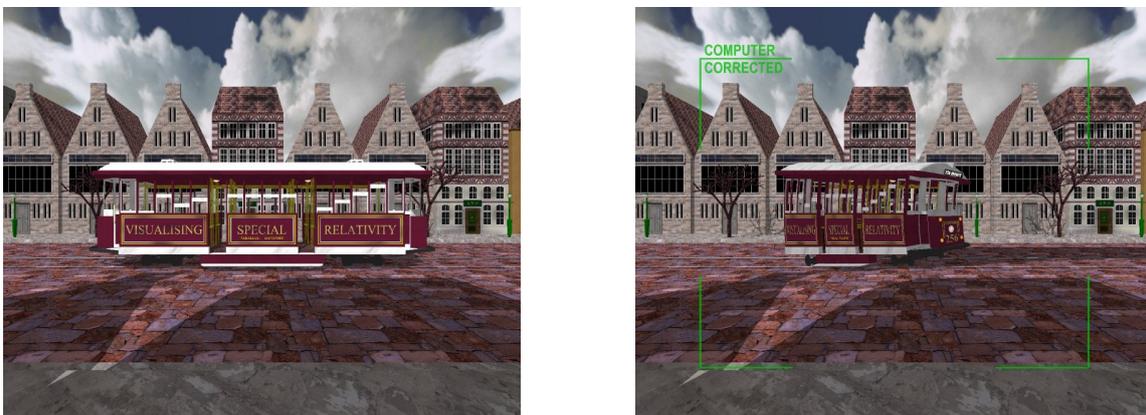


Figura 5.8: Simulación de la contracción de Lorentz y la rotación de Terrell [14].

5.3 San Jorge y el dragón

5.3.1 Historia

San Jorge, portando una lanza de 2 m, cabalga a la increíble velocidad de $(\sqrt{3}/2)c$ hacia un dragón frente al que hay un foso de 3 m de anchura. Según cuenta la conocida leyenda, *San Jorge mata al dragón*. ¿Cómo es posible?

Estudiemus el correspondiente diagrama espacio-tiempo (Fig. 5.9).

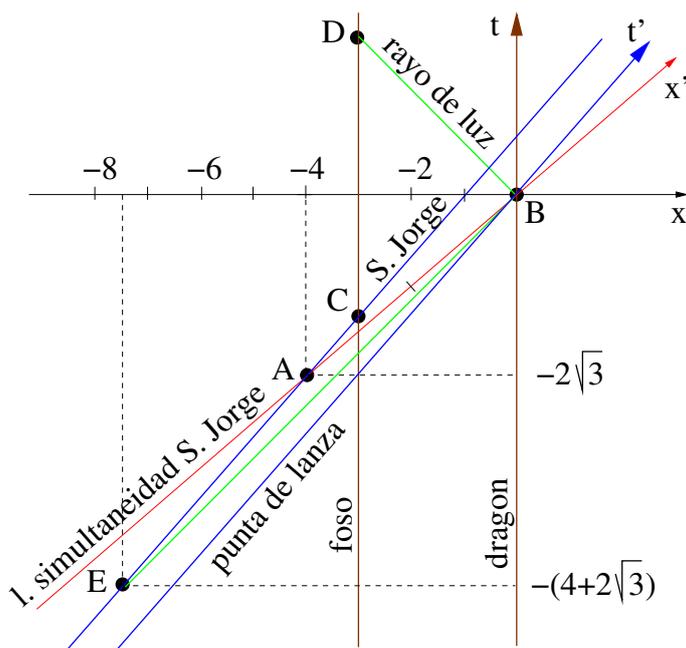


Figura 5.9: Diagrama espacio-tiempo con origen común en el instante en que muere el dragón.

5.3.2 Sucesos importantes

- Suceso A: Posición de San Jorge cuando *para él* la punta de su lanza hiere al dragón. Él no sabe todavía que ha matado al dragón pero ésta es la *posición fatídica*: 0.5 m antes del foso para San Jorge y 1 m detrás del foso para el dragón. San Jorge no se ha caído al foso, de eso no hay duda.
- Suceso B: La punta de la lanza hiere de muerte al dragón. Este suceso es simultáneo al suceso A para San Jorge (lo que no quiere decir que él se entere en ese instante) pero ocurre $2\sqrt{3}$ m-luz, es decir 11.5 ns, después que el primero para el dragón.
- Suceso C: San Jorge se cae al foso si sigue en línea recta a la misma velocidad. La punta de su lanza ya había matado al dragón pero él aún no lo ha visto: morirá sin saber que ha logrado su objetivo.
- Suceso D: San Jorge *vería* que ha matado al dragón si él mismo sobrevive en su caída al foso y se queda justo allí, o bien *vería* muerto al dragón si frena a tiempo desde la posición fatídica y se queda junto al muro a esperar la imagen de la muerte del dragón, que llega en ese instante. Para frenar justo después de la posición

fatídica San Jorge tiene que haber hecho previamente los cálculos de dónde está esa posición, pues él no ve que ha matado al dragón hasta este instante en que le llega la imagen. Además el caballo de San Jorge debe ser capaz de pararse en un tiempo record ... pero no importa, todo es fantástico en esta historia.

- Suceso E: Sale el último rayo de luz que, procedente de San Jorge, llega al dragón antes de morir.

| Suceso [m] | Para San Jorge (x', t') | Para el dragón (x, t) |
|---------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| A | $(-2, 0)$ | $(-4, -2\sqrt{3})$ |
| B | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |
| C | $(-2, 1/\sqrt{3})$ | $(-3, -4/\sqrt{3})$ |
| D | $(-6 - 3\sqrt{3}, 6 + 3\sqrt{3})$ | $(-3, 3)$ |
| E | $(-2, -2)$ | $(-4 - 2\sqrt{3}, -4 - 2\sqrt{3})$ |

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma(vx' + t')$$

$$v = \sqrt{3}/2$$

$$\gamma = 2$$

5.3.3 Versión de San Jorge

Para San Jorge su lanza mide 2 m y hay un foso de 1.5 m delante del dragón. Por tanto, 0.5 m antes de llegar al foso la punta de su lanza toca al dragón y éste muere. *Realmente* la lanza que él lleva es lo bastante larga como para alcanzar al dragón por encima del foso, gracias a la contracción de Lorentz.

Lo que ve San Jorge: Como ya hemos dicho, San Jorge no ve que ha matado al dragón hasta un rato después de haberlo atravesado con su lanza, haber frenado y haber esperado junto al foso. Suponemos que San Jorge había hecho los cálculos y sabía dónde tenía que empezar a frenar, de modo que ha evitado caerse al foso. Debe tener cuidado porque la luz que le informa de su distancia al borde del foso le llega con retraso, así que visualmente le parece que está más lejos de lo que en realidad está. Recordemos una vez más que las imágenes distorsionan la realidad. De hecho, a él le parece que el foso tiene una longitud (aparente) de $6 + 3\sqrt{3} \approx 11.2$ m y su lanza es de sólo 2 m (véase el Ejercicio 5.1), así que, si se fía de sus sentidos, le parecerá imposible alcanzar al dragón.

5.3.4 Versión del dragón ... si pudiera contarle

Para el dragón, San Jorge se acerca con una lanza de 1 m, así que se cree a salvo porque le protege un foso de 3 m. Éstas son *sus medidas*. Así que se echa a dormir y se olvida de San Jorge. Cuando San Jorge está a 4 m de él (1 m detrás del foso) se firma su sentencia de muerte. Eso ocurre $2\sqrt{3}$ m-luz, es decir 11.5 ns, antes de sentir una punzada en el corazón.

Lo que ve el dragón: Al igual que San Jorge, el dragón *ve con retraso* la posición de los objetos más alejados. Así que si, en vez de dormir, mirara lo que va ocurriendo vería que éste *aparenta* tener una lanza de $4 + 2\sqrt{3} \approx 7.46$ m (véase el Ejercicio 5.1).

¿Cómo es que una lanza que, para el dragón, *mide realmente* 1 m puede cruzar un foso que *mide realmente* 3 m, sin que San Jorge la suelte? *La punta de la lanza no está conectada causalmente con la empuñadura* (está fuera de su cono de luz), es decir, no puede “saber” que San Jorge frena antes de caer al foso hasta un momento posterior y por tanto la punta avanza alcanzando al dragón. La lanza se romperá o se deformará (recordemos que no existen sólidos rígidos en Relatividad), pues San Jorge se queda al otro lado del foso.

Moraleja

¡¡Desconfía de objetos peligrosos que se acerquen a tí a velocidades relativistas!!

Ejercicios

- 5.1 Demuestra que la longitud aparente de un objeto al que nos aproximamos (longitudinalmente) con velocidad $\beta = v/c$ es

$$L_{\text{aparente}} = \gamma(1 + \beta)L_0$$

donde L_0 es la longitud propia del objeto y γ es el correspondiente factor de Lorentz. ¿Y si nos alejamos del objeto? ¿Y si es el objeto el que se acerca o aleja?

Aplicando este resultado al ejemplo de San Jorge y el dragón:

- a) ¿Cuáles son las longitudes real y aparente de la lanza y el foso para San Jorge?
- b) ¿Cuáles son las longitudes real y aparente de la lanza y el foso para el dragón?

Tema 6

El efecto Doppler y el desplazamiento cosmológico al rojo

6.1 Introducción

El término *efecto Doppler* se refiere a todos los fenómenos relacionados con el cambio de frecuencia observada para una perturbación periódica dada. Se denomina así en honor al físico austriaco C. Doppler quien enunció los principios esenciales del mismo en 1842, en conexión con la espectroscopía atómica.

Para comprender mejor las diferencias con el caso de la luz, que es el que nos interesa en Relatividad, discutiremos primero el efecto Doppler acústico. Veremos que en el caso del sonido, o cualquier vibración que se propague por un medio, lo importante es la velocidad de fuente y receptor respecto al medio de propagación. En cambio, para la luz en el vacío lo importante es la velocidad relativa entre la fuente y el receptor. El efecto Doppler relativista, que aplica a la luz, tiene en cuenta además que el ritmo del tiempo para emisor y fuente en movimiento relativo son diferentes.

Al final del tema interpretaremos el desplazamiento al rojo del espectro de las galaxias y otros objetos lejanos en términos del efecto Doppler debido a su alejamiento a gran velocidad, si bien hoy día lo consideramos una manifestación de la expansión del universo, que produce efectos parecidos (véase Tema 12).

6.2 Efecto Doppler acústico

Todos estamos familiarizados con el efecto Doppler acústico: cambio de tono que experimenta un sonido cuando el observador (receptor), la fuente del sonido o ambos se mueven respecto al medio de propagación del mismo (habitualmente el aire). Consideraremos, por simplicidad, que emisor y receptor se mueven a lo largo de la misma línea recta.



Figura 6.1: Fuente (F) y receptor (R) de un sonido en movimiento respecto al aire.

6.2.1 Fuente y receptor en movimiento respecto al aire

Pensaremos en la señal acústica como una sucesión de pulsos separados por un intervalo de tiempo constante τ (el periodo de la fuente).^a Sea w la velocidad del sonido respecto al aire y sean u_1 y u_2 respectivamente las velocidades de la fuente (F) y del receptor (R) respecto al aire (Fig. 6.1). Supondremos que ni F ni R superan la barrera del sonido ($|u_1| < w$, $|u_2| < w$).

Nótese que el sonido no viaja a distinta velocidad respecto al medio de propagación aunque la fuente de emisión se mueva a través del mismo. Entonces, $v' = w - u_2$ es la velocidad del sonido según R y $\lambda' = (w - u_1)\tau$ es la longitud de onda de la señal respecto al aire, de modo que la separación temporal entre dos pulsos según R (el periodo τ' que mide el receptor) será

$$\tau' = \frac{w - u_1}{w - u_2} \tau \quad \Rightarrow \quad \nu' = \frac{w - u_2}{w - u_1} \nu, \quad (6.1)$$

donde ν' es, por tanto, la frecuencia recibida por R, siendo ν la frecuencia emitida por F.

Veamos ahora unos cuantos casos particulares de interés. Especificamos entre paréntesis el cambio de tono que sufre el sonido: se hace más grave (menor frecuencia) o más agudo (mayor frecuencia). Introducimos el cociente $\beta = v/w$ donde v es la velocidad relativa entre receptor y fuente.

6.2.2 Fuente en reposo

Receptor se aleja

$$(u_1 = 0, u_2 = v)$$

$$\nu' = \nu(1 - \beta) \quad (\text{más grave}) \quad (6.2)$$

Receptor se acerca

$$(u_1 = 0, u_2 = -v)$$

$$\nu' = \nu(1 + \beta) \quad (\text{más agudo}) \quad (6.3)$$

^aSe trata entonces de un sonido puro. En general en una onda sonora se superponen diferentes frecuencias. Siempre podemos tratar cada una de ellas por separado.

6.2.3 Receptor en reposo

Fuente se aleja

$$(u_1 = -v, u_2 = 0)$$

$$v' = \frac{v}{1 + \beta} \quad (\text{más grave}) \quad (6.4)$$

Fuente se acerca

$$(u_1 = v, u_2 = 0)$$

$$v' = \frac{v}{1 - \beta} \quad (\text{más agudo}) \quad (6.5)$$

Nótese que para $\beta \ll 1$ (velocidades pequeñas comparadas con las del sonido) da igual que la fuente se acerque (o aleje) al receptor o que el receptor se acerque (o aleje) a la fuente, pues en este caso $1/(1 \pm \beta) \approx (1 \mp \beta)$.

6.3 Efecto Doppler para la luz

En el caso de la luz en el vacío sólo importa la velocidad relativa entre la fuente y el observador. Consideraremos en primer lugar los casos en los que fuente y observador se mueven sobre la línea recta que los separa, alejándose o acercándose. Después trataremos el caso general, que incluye a estos dos como casos particulares así como el denominado efecto Doppler transversal.

6.3.1 Fuente y observador se alejan

De nuevo podemos imaginarnos la señal como una sucesión de pulsos separados por un intervalo de tiempo constante τ , según la fuente.^b Supongamos que el observador (receptor) se aleja con velocidad v respecto a la fuente. En la Fig. 6.2 hemos dibujado el diagrama espacio-tiempo correspondiente.

Es entonces directo deducir a partir de las líneas de universo de dos pulsos consecutivos que

$$t_1 = \frac{1}{c}x_1, \quad t_2 = \frac{1}{c}x_2 + \tau \quad (6.6)$$

y a partir de la línea de universo del receptor que

$$t_1 = \frac{1}{v}(x_1 - x_0), \quad t_2 = \frac{1}{v}(x_2 - x_0). \quad (6.7)$$

^bSe trata entonces de una luz monocromática. En general una onda electromagnética es superposición de ondas monocromáticas que podemos tratar por separado. Serán ondas *luminosas* si su espectro corresponde al de la luz visible.

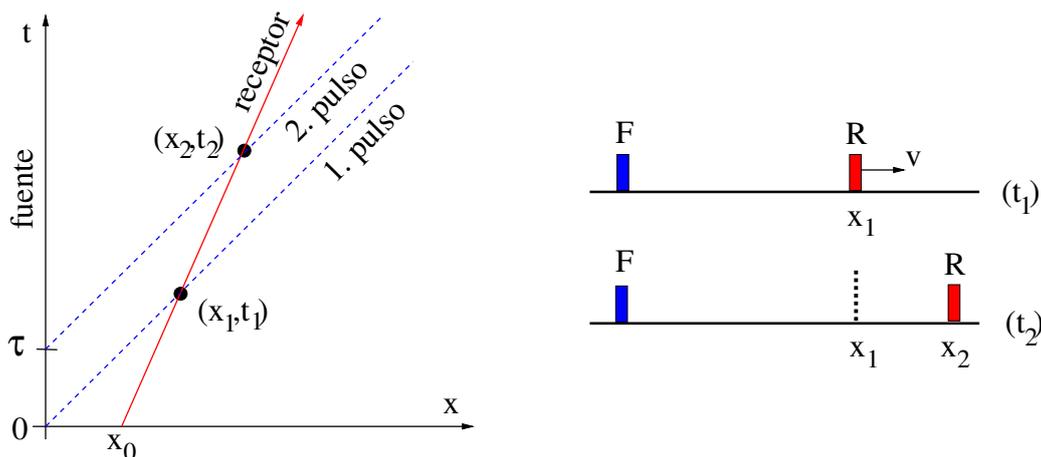


Figura 6.2: Diagrama espacio-tiempo y esquema para el alejamiento del receptor de la fuente.

Por tanto, podemos despejar $\Delta t = t_2 - t_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$,

$$\Delta t = \frac{c\tau}{c-v}, \quad \Delta x = \frac{cv\tau}{c-v}. \quad (6.8)$$

Finalmente, aplicando las transformaciones de Lorentz obtenemos ($\beta = v/c$):

$$\tau' = \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \frac{\tau}{\gamma(1-\beta)} = \gamma(1+\beta)\tau, \quad (6.9)$$

y por tanto,

$$v' = \gamma(1-\beta)v \quad \text{es decir} \quad v' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}v \quad (\text{desplazamiento al rojo}) \quad (6.10)$$

6.3.2 Fuente y observador se acercan

Cambiando el signo de β se obtiene:

$$v' = \gamma(1+\beta)v \quad \text{es decir} \quad v' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}v \quad (\text{desplazamiento al azul}) \quad (6.11)$$

Nótese que para $\beta \ll 1$ ($v \ll c$) obtenemos expresiones idénticas a las del efecto Doppler acústico cuando $v \ll w$.

6.3.3 Caso general y efecto Doppler transversal

Supongamos ahora que la fuente y el receptor no se mueven en la dirección de la línea que los separa sino según indica la Fig. 6.3. Dos pulsos consecutivos emitidos por F tardan respectivamente r'_1/c y r'_2/c en llegar a R. Si la fuente está suficientemente lejos o los pulsos son suficientemente cortos entonces es una buena aproximación escribir

$$\Delta r' = r'_1 - r'_2 = \Delta x' \cos \theta. \quad (6.12)$$

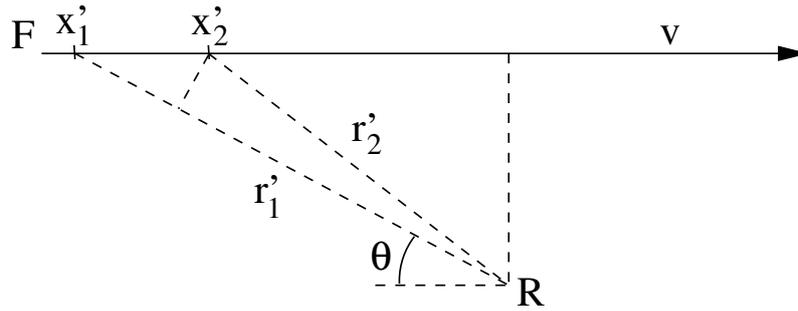


Figura 6.3: Fuente y receptor no se mueven colinealmente.

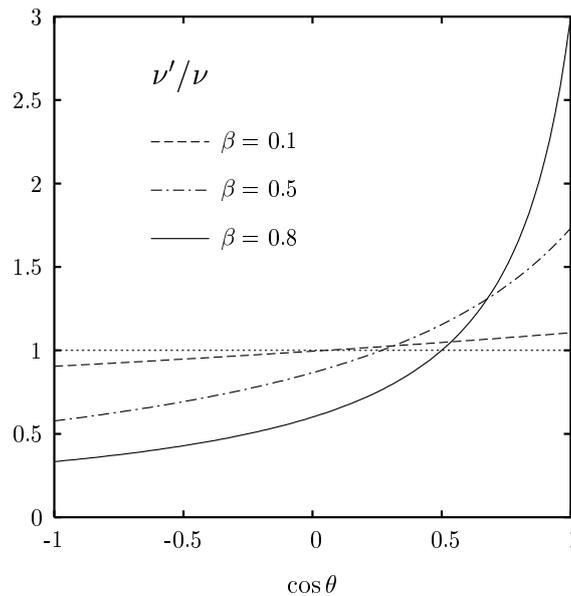
Estos dos pulsos fueron emitidos en dos instantes de tiempo t'_1 y t'_2 . Todo ello según las coordenadas del receptor R. El tiempo entre los dos pulsos que mide R es τ' ,

$$\tau' = (t'_2 + r'_2/c) - (t'_1 + r'_1/c) = \Delta t' - \frac{\Delta r'}{c} = \Delta t' - \frac{\Delta x'}{c} \cos \theta. \quad (6.13)$$

Para la fuente, ambos pulsos fueron emitidos en instantes t_1 y t_2 , separados entre sí por el periodo $\tau = t_2 - t_1$. Por otro lado, sabemos que $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\tau$ (dilatación temporal) y que $\Delta x' = v\Delta t' = v\gamma\tau$. Por tanto,

$$\tau' = \gamma(1 - \beta \cos \theta)\tau \quad \text{es decir} \quad \nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (6.14)$$

Para $\cos \theta = \mp 1$ (fuente y receptor colineales) recuperamos los resultados (6.10) y (6.11). Nótese que cuando no son colineales puede haber desplazamientos al rojo aunque fuente y receptor se acerquen, o al azul aunque se alejen (véase la Fig. 6.4). Para $\cos \theta = 0$ obtenemos el *efecto Doppler transverso*, debido exclusivamente al factor de Lorentz.

Figura 6.4: Efecto Doppler para la luz en función del ángulo para diferentes velocidades relativas entre fuente y observador $\beta = v/c$.

6.4 Desplazamiento cosmológico al rojo como efecto Doppler

6.4.1 El parámetro de desplazamiento al rojo

Es un hecho observacional que los espectros de la luz procedente de galaxias y otros objetos lejanos se encuentran desplazados al rojo. Se suele definir el *parámetro de desplazamiento al rojo*

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} > 0 \quad (6.15)$$

donde ν_0 es la frecuencia de la línea espectral emitida por la fuente y ν la medida en la Tierra. Análogamente para las longitudes de onda λ_0 y λ .

La interpretación más obvia de este hecho es que todas las estrellas y galaxias lejanas se alejan de la Tierra y por tanto sus espectros se desplazan por efecto Doppler.^c Sustituyendo

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 + \beta)} \quad (6.16)$$

se obtiene

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \quad (6.17)$$

donde $v = \beta c$ es la velocidad de alejamiento. Nótese que para $v \ll c$, es decir $\beta \ll 1$, tenemos que $z \approx \beta$.

6.4.2 La ley de Hubble-Humanson

Fue el norteamericano E. Hubble quien en 1919, tras establecer la existencia de galaxias exteriores a nuestra Vía Láctea, descubrió que los espectros de tales galaxias se encontraban desplazados al rojo. En años posteriores Humanson realizó muchas más observaciones que no sólo constataban este hecho sino que además mostraban un patrón bien definido, que en 1929 fue formulado como la ley de Hubble-Humanson: el desplazamiento al rojo es proporcional a la distancia,

$$cz = H_0 d, \quad (6.18)$$

lo cual se interpretó como el efecto Doppler debido al alejamiento de las galaxias a una velocidad proporcional a la distancia

$$v = H_0 d. \quad (6.19)$$

Por tanto, el parámetro de desplazamiento al rojo es una medida de la distancia a la que se encuentra la galaxia. La medida de la constante de Hubble H_0 , que interviene en varias magnitudes cosmológicas, se conoce cada vez con mayor precisión:

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad h = 0.7 \pm 0.1. \quad (6.20)$$

^c¿Significa esto que la Tierra es el centro del Universo? Responderemos a esta pregunta en el Tema 12.

Así por ejemplo $z = 0.1$ corresponde a una distancia de unos 40 Mpc, donde 1 pc (parsec) equivale a 3.26 años luz.^d

Obtener espectros de galaxias u objetos muy lejanos y además averiguar su distancia por otro método para comprobar si se verifica la ley de Hubble conlleva una gran dificultad. Hoy día se sabe que la ley de Hubble (6.18) se cumple muy bien hasta distancias de $z \approx 0.1$. Esto no nos extrañará cuando conozcamos los modelos de universo en Relatividad General. Entonces veremos que este alejamiento se interpreta en términos de una expansión regulada por la gravedad cósmica y cuya fórmula es en realidad

$$H_0 d_L = c \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right] \quad (6.21)$$

donde q_0 es el llamado parámetro de deceleración y d_L la distancia de luminosidad. Por tanto la ley de Hubble lineal (6.18) es válida sólo para $z \ll 1$. También veremos que la observación de cierto tipo de supernovas lejanas (que se consideran candelas estándar) ha permitido medir el parámetro de deceleración y desvelado que $q_0 < 0$, es decir, el universo está en expansión acelerada! (Fig. 12.2) Esto parece indicar que existe una componente, llamada energía oscura, que produce un efecto contrario al que produce la materia, ya sea la ordinaria o la materia oscura.

Ejercicios

- 6.1 ¿A qué velocidad hay que conducir hacia un semáforo para que la luz roja ($\lambda = 650$ nm) se vea verde ($\lambda = 525$ nm)?
- 6.2 Utilizando el efecto Doppler, encuentra la frecuencia con que llegan a los gemelos Apolo y Diana las felicitaciones de Navidad (número de felicitaciones al año) y comprueba que coincide con el resultado que encontramos en el Tema 6.

^dPara hacerse una idea, nuestra galaxia tiene un diámetro de unos 100.000 años luz y la galaxia más cercana, Andrómeda, se encuentra aproximadamente a 1 Mpc, es decir $z \approx 0.0025$.

Tema 7

Dinámica relativista: $E = mc^2$ y movimiento acelerado

7.1 Introducción

Hemos visto que conviene considerar el espaciotiempo como un espacio cuatridimensional en el que podemos localizar sucesos (dónde y cuándo ocurre algo) y líneas de universo (trayectorias en el espaciotiempo). Las coordenadas de un suceso se representan mediante un vector de cuatro componentes (*cuadrivector espacio-tiempo*),

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Como ya hemos visto, si \mathcal{O}' es un observador que se desplaza a velocidad v respecto a \mathcal{O} , las coordenadas espaciotemporales de un mismo suceso medidas por ambos observadores están relacionadas mediante la transformación de Lorentz pura (*boost*):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7.2)$$

donde hemos orientado los ejes y y z de ambos observadores perpendicularmente a la dirección del *boost*, por conveniencia. Un *boost* en una dirección arbitraria tiene la forma:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & \delta_{ij} + (\gamma-1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} \\ \gamma\beta_2 & & & \\ \gamma\beta_3 & & & \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2. \quad (7.3)$$

7.2 La equivalencia entre masa y energía

Existen otros cuadrivectores, cuyas componentes se transforman por definición de la misma manera que las coordenadas espaciotemporales bajo transformaciones de Lorentz. En

particular, el *cuadrivector energía-momento*:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x c \\ p_y c \\ p_z c \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Del mismo modo que el módulo de un (tri)vector $a \doteq (a_x, a_y, a_z)$ en el espacio euclídeo tridimensional, definido por

$$(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2, \quad (7.5)$$

permanece invariante bajo una rotación arbitraria R , el módulo de un cuadrivector $a \doteq (a^0, a^1, a^2, a^3)$ en el espacio cuadridimensional de Minkowski, definido por

$$(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2, \quad (7.6)$$

permanece invariante bajo una transformación de Lorentz arbitraria Λ . Las rotaciones espaciales \mathcal{R} son un caso particular de transformación de Lorentz, que deja invariante el módulo de los cuadrivectores sin afectar a la componente temporal,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R_{ij} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

En general, toda transformación de Lorentz Λ puede escribirse como el producto de una rotación espacial \mathcal{R} por una transformación de Lorentz pura L ,

$$\Lambda = \mathcal{R}L. \quad (7.8)$$

El módulo del cuadrivector espacio-tiempo es una cantidad invariante llamada *intervalo*, que hemos introducido en (2.4),

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (7.9)$$

Del mismo modo, el módulo del cuadrivector energía-momento es una cantidad invariante, también lo es la *masa*, definida como

$$(m_0 c^2)^2 = E^2 - (pc)^2, \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (7.10)$$

Podemos distinguir dos casos:

- Un cuerpo de masa $m_0 \neq 0$ tiene (tri)momento $p' = 0$ y energía:

$$E' = m_0 c^2, \quad p' = 0 \quad \text{en reposo}, \quad (7.11)$$

pero en un sistema de referencia en el que se mueva con velocidad v ,

$$\begin{pmatrix} E \\ pc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \gamma m_0 c^2, \quad p = \gamma\beta m_0 c. \quad (7.12)$$

Nótese que (7.10) implica

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \quad (7.13)$$

y aplicando la definición de velocidad a esta expresión,

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{pc^2}{E} = \beta c, \quad (7.14)$$

obtenemos un resultado consistente con (7.12),

$$\beta = \frac{pc}{E}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m_0c^2}. \quad (7.15)$$

La energía mínima de un cuerpo de masa m_0 es su energía en reposo, $E_0 = m_0c^2$. Si lo observamos en movimiento, su energía cinética y su momento son:

$$K = E - E_0 = m_0c^2(\gamma - 1) \xrightarrow{v \ll c} m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1 \right) \approx \frac{1}{2}m_0v^2, \quad (7.16)$$

$$p = \gamma\beta m_0c \xrightarrow{v \ll c} m_0v, \quad (7.17)$$

que coinciden con las expresiones newtonianas para velocidades mucho menores que la de luz (*límite no relativista*).

Sin embargo, si incrementamos progresivamente la energía (en un acelerador de partículas, por ejemplo) la velocidad no aumentará indefinidamente, pues la expresión relativista nos dice que cuando $v \rightarrow c$ el factor de Lorentz $\gamma \rightarrow \infty$. Es decir, haría falta una energía infinita para que un objeto de masa m_0 alcance $v = c$. Por tanto, *c es una velocidad límite, que no puede rebasarse*.

- En cambio, para una partícula de masa $m_0 = 0$ (por ejemplo un fotón, un cuanto de luz) no existe el sistema de referencia en reposo, pues a partir de (7.10),

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc \quad \Rightarrow \quad v = c, \quad (7.18)$$

es decir, su velocidad es siempre c .

Nota: Con (demasiada) frecuencia se llama “masa en reposo” m_0 a la masa que hemos usado en las expresiones anteriores y se usa el término “masa relativista” m para referirse a la energía de un cuerpo de masa m_0 cuando está en movimiento,

$$E = mc^2, \quad m = \gamma m_0 \quad (7.19)$$

que conduce al mismo resultado para la energía que (7.12). Ésta es de hecho la forma habitual de la archifamosa ecuación de Einstein. Aquí se ha preferido usar la terminología más actual, en la que nos referimos a la “masa” como un invariante relativista m_0 y a la energía como la componente temporal del cuadrivector energía-momento. Como componentes que son de un cuadrivector, la energía y el momento dependen del observador y pueden determinarse a partir de sus valores para un observador dado mediante una transformación de Lorentz. Además la expresión (7.19), a diferencia de (7.10) o (7.13), no es útil en el caso de una partícula como el fotón, que tiene energía y momento pero masa $m_0 = 0$ y $\beta = 1$, es decir $\gamma = \infty$. En adelante, llamaremos *masa* a la masa invariante m_0 y la denotaremos m , sin subíndice, pues no habrá confusión con la masa relativista de (7.19), que nunca usaremos.

7.3 Transformaciones de Lorentz de velocidades y aceleraciones

Existe el prejuicio de que los movimientos acelerados sólo pueden estudiarse en el marco de la Relatividad General. Sin embargo esto es un error de concepto. Cualquier observador inercial puede medir un movimiento acelerado y relacionar sus observaciones con las de otro observador inercial haciendo uso de las transformaciones de Lorentz.

Ya conocemos las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espaciotemporales de cualquier suceso para dos observadores inerciales cualesquiera. Supongamos que \mathcal{O}' se desplaza a *velocidad constante* $v = \beta c$ respecto a \mathcal{O} en la dirección del eje x . Entonces están relacionadas por (7.2).

Si las coordenadas del suceso anterior corresponden a la posición en la que se encuentra un móvil en un instante de tiempo dado, podemos deducir la relación entre las variaciones de la posición con el tiempo (velocidad) y las variaciones de la velocidad con el tiempo (aceleración) según las mide el observador inercial \mathcal{O} o el \mathcal{O}' . En efecto:

Sean $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ y $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt'$ las velocidades medidas por \mathcal{O} y \mathcal{O}' respectivamente, donde (\mathbf{r}, t) y (\mathbf{r}', t') son las respectivas coordenadas espaciotemporales en un instante dado. Entonces las ecuaciones anteriores conducen a:

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + vu'_x/c^2} \quad (7.20)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \quad (7.21)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}. \quad (7.22)$$

Del mismo modo, si $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ y $\mathbf{a}' = d\mathbf{u}'/dt'$ son las aceleraciones medidas por cada observador, de las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + vu'_x/c^2)^3} \quad (7.23)$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_y a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \quad (7.24)$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_z a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3}. \quad (7.25)$$

7.4 El sistema de referencia de reposo instantáneo

En particular, si el observador \mathcal{O}' se encuentra *instantáneamente en reposo* respecto al móvil, la velocidad de éste será $\mathbf{u}' = (u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0)$, se tiene que

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3} \quad (7.26)$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2} \quad (7.27)$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2}. \quad (7.28)$$

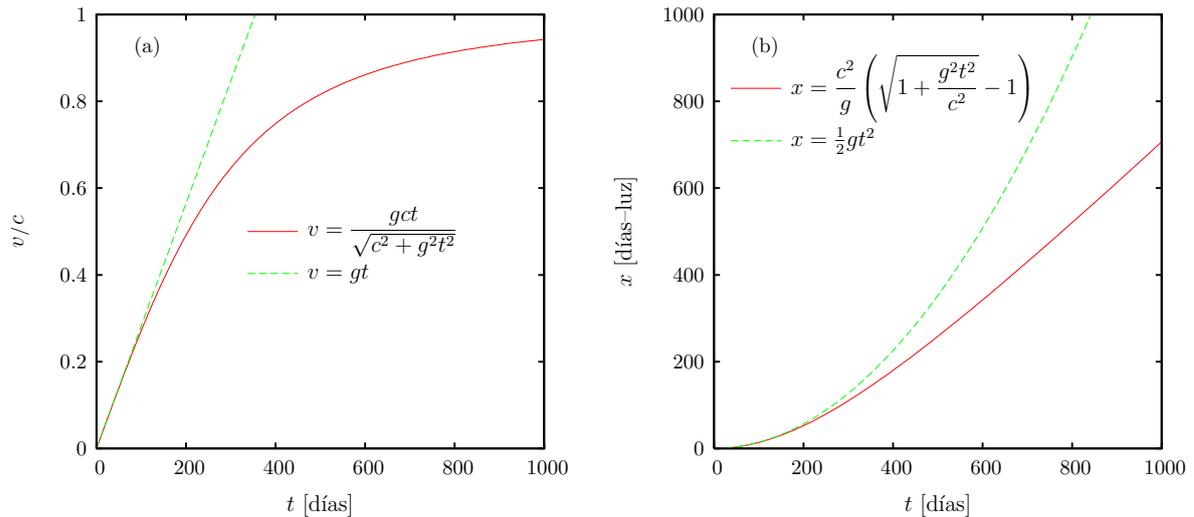


Figura 7.1: Velocidad y distancia recorridas en función del tiempo terrestre.

Nótese que un observador en reposo instantáneo *no es* el que va montado en el móvil.

7.5 Ejemplo práctico

Supongamos que un astronauta experimenta una aceleración continua $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ en su sistema de reposo instantáneo. Si parte del reposo desde la Tierra,

- ¿Cuánto tiempo terrestre tarda en alcanzar una velocidad $v = \beta c$, siendo $\beta = 0.5$? ¿Y en alcanzar $\beta = 0.9$? ¿Y en alcanzar la velocidad de la luz? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.
- ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de un tiempo terrestre t ? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.

Solución:

El astronauta no es un observador inercial, pero en el sistema de referencia inercial que se mueve a la misma velocidad que él en un instante dado ($u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0$), su *sistema de reposo instantáneo*, sabemos que $\mathbf{a}' = (a'_x = g, a'_y = 0, a'_z = 0)$ donde el eje x es perpendicular a la superficie terrestre, dirección de aceleración de la nave espacial.

- Podemos aplicar entonces las ecuaciones (7.26-7.28) que nos dicen que $a_y = a_z = 0$,

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^3(v)} \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \gamma^3(v) dv = \int_0^t g dt, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (7.29)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt; \quad (7.30)$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}}. \quad (7.31)$$

Por tanto, en alcanzar la velocidad $v = \beta c$ tarda

$$t = \frac{\beta c}{g\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7.32)$$

Así que en alcanzar $\beta = 0.5$ tarda $t = c/(g\sqrt{3}) \approx 1.8 \times 10^7$ s ≈ 208 días ≈ 7 meses. Y en alcanzar $\beta = 0.9$ tarda $t \approx 2.06c/g \approx 6.3 \times 10^7$ s ≈ 730 días ≈ 2 años.

Vemos que cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\beta \rightarrow 1$, es decir, se va aproximando a la velocidad de la luz pero no la alcanza nunca.

Nótese que para velocidades no relativistas ($\beta \ll 1$) se recupera el resultado $v = gt$. Si utilizáramos esta ecuación no relativista para calcular $t = v/g$ obtendríamos resultados tanto más erróneos cuanto mayor es v . Así, $t \approx 180$ días para $v = c/2$ y $t \approx 318$ días para $v = 0.9c$. Véase Fig. 7.1a.

(b) Para hallar la distancia recorrida, utilizamos la ecuación (7.32)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} dt; \quad (7.33)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (7.34)$$

Vemos que cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $x \sim ct$.

Nótese que para velocidades no relativistas ($\beta \ll 1$) se recupera el resultado $x = \frac{1}{2}gt^2$. Véase Fig. 7.1b.

Ejercicios

7.1 Deduce las expresiones que relacionan las velocidades y las aceleraciones que miden dos observadores inerciales cualesquiera (7.20) – (7.25).

Tema 8

Electromagnetismo y relatividad especial

8.1 Introducción

Al principio del Curso, cuando hablábamos de la visión que se ha tenido a lo largo de la Historia acerca de la naturaleza de la luz, indicábamos los trabajos de Maxwell sobre el electromagnetismo, a mediados del siglo XIX, como un hito importante. También lo fue para el desarrollo de la teoría de la relatividad especial.

Los *fenómenos eléctricos* se conocían desde la Antigua Grecia: tras frotar una varilla de ámbar, en griego *elektrum*, con un trozo de piel se observaba que la piel se erizaba y que el ámbar podía atraer pequeños objetos, cabellos por ejemplo. Ya en el siglo XVIII se sabía que hay cargas de dos tipos (positivas y negativas, según la terminología de B. Franklin) y que cargas de distinto signo se atraen mientras que las de igual signo se repelen.

Los *fenómenos magnéticos* se conocen desde mucho antes que los eléctricos: trozos de un mineral llamado *magnetita* (imán natural) pueden atraerse o repelerse entre sí, dependiendo de su orientación relativa, y además, suspendidos libremente, tienen la propiedad de orientarse en dirección norte-sur lo que dio origen al invento de la brújula.

Pero hasta el siglo XIX la electricidad y el magnetismo eran meras curiosidades. En 1820 Ampère y Oersted mostraron que cargas en movimiento (corrientes eléctricas) podían producir efectos magnéticos (ley de Ampère) y poco después Faraday mostró que imanes en movimiento podían producir corrientes eléctricas (ley de inducción de Faraday). Este trabajo condujo al invento del motor eléctrico y preparó el camino hacia la tecnología moderna.

En 1864 Maxwell reunió todos los resultados conocidos sobre electricidad y magnetismo y los formuló matemáticamente en una teoría basada en cuatro ecuaciones. Las ecuaciones de Maxwell no sólo *sintetizan las propiedades e interrelaciones entre electricidad y magnetismo*, sino que además *predijeron la existencia de las ondas electromagnéticas así como su velocidad* en términos de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio (incluido el vacío). Para el vacío la velocidad es independiente de la longitud de onda (la misma para todo el espectro) y perfectamente *coincidente con la velocidad de la luz*, que ya se había me-

dido bastante bien por entonces. No había duda de que *la luz es una onda electromagnética* en el rango de longitudes de onda que llamamos “visible”.

Un aspecto sorprendente que despertó mucho interés es que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de Lorentz que, como ya vimos, se propusieron por Lorentz antes de que Einstein las incorporara en su teoría de la relatividad con un significado totalmente distinto. Esta *invariancia Lorentz no se comprendía* y hasta hubo intentos de modificar las ecuaciones para incorporar los movimientos respecto al éter luminífero, del que también hemos hablado.

Aunque Einstein sin duda conocía los intentos fallidos de detectar el éter, parece que lo que más le inspiró fue que las ecuaciones de Maxwell indicaban que había que *aceptar que las leyes de la electricidad y el magnetismo son las mismas para todos los observadores inerciales*. Además Einstein sospechaba que la *electricidad y el magnetismo debían ser manifestaciones de un mismo fenómeno* debido a la simetría entre los siguientes experimentos: si se mueve un imán en el interior de una espira se genera una corriente eléctrica (ley de inducción de Faraday) y si se deja el imán quieto y se mueve la espira ocurre lo mismo (esta vez se interpreta que las cargas en movimiento sufren fuerzas magnéticas perpendiculares a su velocidad lo que origina la corriente en la espira). Para Einstein la física implicada en ambos experimentos debía ser la misma pues estaba convencido de que *lo importante es el movimiento relativo*.

A parte de inspirar el principio de relatividad (primer postulado de Einstein), la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell conduce a la constancia de la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío (segundo postulado).

Queda claro que la electricidad, el magnetismo y la teoría de la relatividad especial están muy relacionados entre sí. No en vano el famoso artículo de Einstein de 1905 en el que proponía la teoría de la relatividad especial se titula “Sobre la electrodinámica de cuerpos móviles”. Nos proponemos ahora clarificar esta relación.

8.2 Las ecuaciones de Maxwell y el concepto de campo

8.2.1 Las ecuaciones

Las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal e isótropo^a son [sistema MKSA]:

$$\text{(divergencia de } \mathbf{E}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.1)$$

$$\text{(divergencia de } \mathbf{B}) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{(rotacional de } \mathbf{E}) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\text{(rotacional de } \mathbf{B}) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.4)$$

^aLas ecuaciones de Maxwell se pueden definir para cualquier medio en términos del desplazamiento eléctrico $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ y del campo magnético $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, donde \mathbf{P} es la polarización del medio, \mathbf{M} es su magnetización, y ϵ_0 y μ_0 son respectivamente la permitividad y la permeabilidad del vacío. Sólo para un medio lineal e isótropo es posible definir $\mathbf{D} \equiv \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu$. Nos concentraremos en este caso para no complicar la discusión.

donde $\rho \equiv$ densidad de carga $[C m^{-3}]$ (1 C \equiv Coulombio = 1 A s)
 $j \equiv$ densidad de corriente $[A m^{-2}]$
 $E \equiv$ campo eléctrico $[V m^{-1}]$
 $B \equiv$ inducción magnética $[T]$ (1 T \equiv Tesla = 1 N A⁻¹ m⁻¹)
 $\epsilon \equiv$ permitividad eléctrica $[F m^{-1}]$ (1 F \equiv Faradio = 1 C V⁻¹)
 $\mu \equiv$ permeabilidad magnética $[N A^{-2}]$

y $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Estas ecuaciones no expresan directamente la relación entre cargas y fuerzas sino que están escritas en términos de *campos* (E y B).

La idea de *campo* viene a sustituir el concepto de *acción a distancia*, según el cual una carga ejerce una fuerza sobre otra a través del espacio. En la nueva concepción, la carga modifica las propiedades de la región del espacio que la rodea de modo tal que otra carga experimentará una fuerza mientras esté en esa región del espacio, donde se dice que “hay un campo”. Parece una complicación innecesaria pero gracias al concepto de campo el tratamiento matemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos (y también de los gravitacionales y los debidos a todas las demás interacciones) se simplifica enormemente. De hecho, la introducción del concepto de campo fue descrita por el mismo Einstein como “el cambio en la concepción de la realidad más profundo y fructífero que ha acontecido desde los tiempos de Newton”.

Veremos a continuación cómo describen las ecuaciones (de campo) de Maxwell la riqueza de fenómenos electromagnéticos y las consecuencias que llevan aparejadas.

8.2.2 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

Ecuación (8.1): *ley de Gauss*

La ecuación (8.1) expresa la geometría del campo eléctrico, es decir cómo modifica el campo eléctrico las propiedades del espacio cuando existe una densidad carga (fuente del campo eléctrico). Supongamos que la carga fuente es una carga puntual Q . Entonces las líneas de campo, que señalan en cada punto del espacio la dirección de la fuerza que experimentaría una carga de prueba situada en ese punto son radiales y centradas en la carga fuente (Fig. 8.1). Mayor concentración de líneas de campo en una región del espacio expresa mayor intensidad del campo, la cual es mayor cuanto menor es la distancia a la carga fuente. Las líneas de campo eléctrico son divergentes.

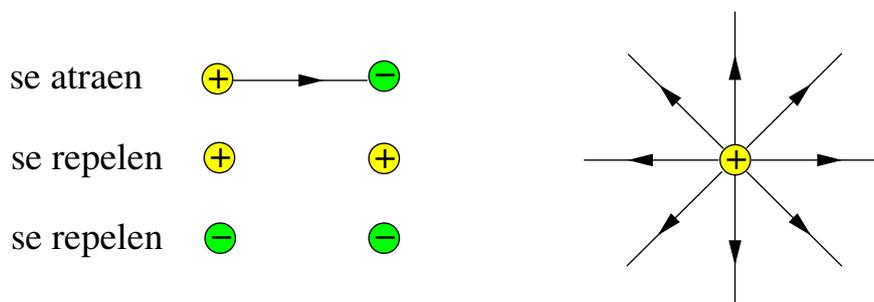


Figura 8.1: Esquema de interacción entre cargas y líneas de campo eléctrico creado por una carga.

En efecto, integrando (8.1) y utilizando el teorema de la divergencia^b obtenemos:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV \quad (\text{ley de Gauss}). \quad (8.5)$$

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada

Ley de Coulomb: fuerza eléctrica

La relación entre la fuerza y el campo eléctrico es sencillamente

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (8.6)$$

lo que conduce correctamente a la conocida ley de Coulomb que describe la fuerza entre dos cargas. En efecto, el campo eléctrico \mathbf{E} creado por una carga puntual Q estática en el vacío es radial, como anticipábamos, y a una distancia r de la misma vale:

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \Rightarrow \quad F = qE = k_C \frac{Qq}{r^2} \quad (\text{ley de Coulomb}), \quad (8.7)$$

donde $k_C \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$ es la constante y F la fuerza de Coulomb.

8.2.3 El campo magnético y las fuerzas magnéticas

Ecuación (8.2): ley de Gauss para el campo magnético

Integrando (8.2) y utilizando de nuevo el teorema de la divergencia² obtenemos:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{ley de Gauss para el campo magnético}). \quad (8.8)$$

El flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero

Es decir, *no existen los monopolos magnéticos* (cargas fuente del campo magnético análogas a las cargas del campo eléctrico). Esta es una diferencia fundamental respecto al campo eléctrico que nos indica que *las líneas de campo magnético no son divergentes*, sino que van de un polo al otro del imán que crea el campo (Fig. 8.2).

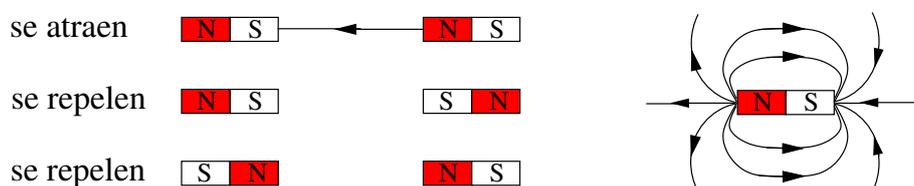


Figura 8.2: Esquema de interacción entre imanes y líneas de campo magnético creado por un imán.

Ley de Lorentz: fuerzas magnéticas

La relación entre el campo magnético y las fuerzas magnéticas es más complicada. Es un hecho observacional que las fuerzas magnéticas no son experimentadas por cargas

^bEl teorema de la divergencia: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.

estáticas sino por cargas en movimiento respecto al campo magnético (dependiendo de la dirección de las líneas de campo, Fig. 8.3). Este hecho se recoge en la ley de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_m, \quad \mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{ley de Lorentz}) \quad (8.9)$$

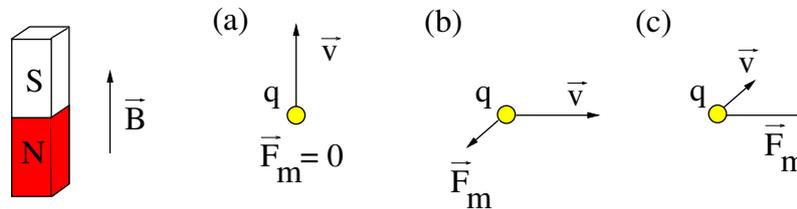


Figura 8.3: Fuerza magnética experimentada por una carga positiva con velocidad v respecto a B .

8.2.4 La relación entre campos eléctricos y magnéticos

El resto de las ecuaciones expresan que no sólo un objeto cargado es capaz de crear un campo eléctrico y no sólo un imán es capaz de crear un campo magnético: un campo magnético variable produce un campo eléctrico y un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Los fenómenos que estas ecuaciones describen serían demasiado complejos de explicar sin la ayuda del concepto de campo.

Ecuación (8.3): *ley de inducción de Faraday*

Integrando (8.3) y utilizando el teorema del rotacional^c (teorema de Stokes) obtenemos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{ley de inducción de Faraday}). \quad (8.10)$$

La variación del flujo del campo magnético a través de una espira induce una corriente

El campo eléctrico generado mueve las cargas a lo largo de la espira produciendo una corriente eléctrica. Éste es el principio del *generador eléctrico*.

Ecuación (8.4): *ley de Ampère*

Integrando (8.4) y utilizando el teorema del rotacional³ obtenemos:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{ley de Ampère}). \quad (8.11)$$

Las corrientes eléctricas (y las variaciones del flujo del campo eléctrico) generan campos magnéticos

Éste es el principio del *electroimán*.

^cEl teorema del rotacional: $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

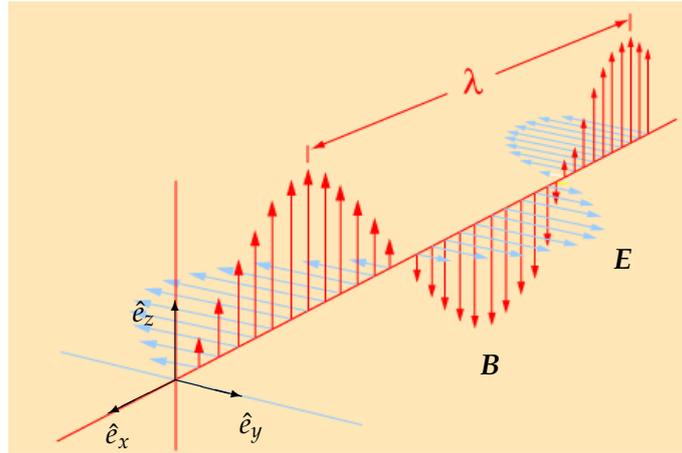


Figura 8.4: Onda electromagnética viajando en la dirección del eje x .

Hemos obtenido que las ondas electromagnéticas son capaces de automantenerse, pero ¿cómo se crean? Basta con producir un campo eléctrico variable haciendo que las cargas eléctricas de un hilo conductor se muevan muy rápidamente hacia delante y hacia atrás. Esto genera automáticamente un campo magnético variable que inicia la propagación de la onda a través del espacio. Este dispositivo no es ni más ni menos que una antena. Los átomos son también capaces de crear ondas electromagnéticas al desexcitarse tras ser sometidos a un calentamiento, por ejemplo.

8.4 La velocidad de la luz y el segundo postulado de Einstein

Las ecuaciones (8.16) y (8.17), que describen las ondas electromagnéticas, son las mismas para cualquier observador inercial. Por tanto su velocidad de propagación c es la misma para todos ellos. Esto es así porque el d'Alembertiano \square es invariante Lorentz:

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (8.20)$$

En efecto: Apliquemos una transformación de Lorentz

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (8.21)$$

$$x = \gamma (vt' + x') \quad (8.22)$$

$$y = y' \quad (8.23)$$

$$z = z', \quad (8.24)$$

de donde introduciendo $\beta = v/c$ y usando la regla de la cadena,^e obtenemos:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (8.26)$$

^eRegla de la cadena: $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z}$.

de lo que se deduce inmediatamente (8.20).

Una curiosidad: El producto de las constantes ϵ_0 y μ_0 viene dado por c , pero su valor individual depende del sistema de unidades utilizado. En el sistema MKSA se definen:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} = 12.566\,370\,614 \dots \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (8.27)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (8.28)$$

que son valores exactos, pues $c \equiv 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ es exacto, ya que 1 m se define como la distancia recorrida por la luz en $1/299\,792\,458$ segundos.^f La constante de Coulomb vale:

$$k_C \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} = 8.987\,551\,787 \dots \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (8.29)$$

8.5 La unificación de la electricidad y el magnetismo

Ya hemos comentado en la introducción que Einstein estaba intrigado con que fenómenos tales como el movimiento de una espira respecto a un imán fijo y el movimiento de un imán dejando la espira fija fueran tratados como debidos a fuerzas diferentes: en el primer caso se utilizaba la ley de Lorentz (8.9) para hallar la fuerza *magnética* que experimentan las cargas en movimiento respecto al imán; y en el segundo caso se utilizaba la ecuación (8.3) de Maxwell (ley de inducción de Faraday) que supone la creación de una corriente *eléctrica* en la espira. Él pensaba que sólo la velocidad relativa entre imán y espira debía ser importante y ésta es la misma en ambos casos, de modo que la *aparición magnética o eléctrica* debían ser dos aspectos de una misma fuerza, dependientes del observador.

En su trabajo de 1905 Einstein no sólo pone las bases de la relatividad especial sino que también unifica electricidad y magnetismo, mostrando que la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell permite relacionar cómo miden dos observadores inerciales distintos una *misma* fuerza. Un observador montado en una carga eléctrica en reposo con respecto a un campo eléctrico experimenta sólo una fuerza eléctrica en la dirección del campo. Pero un segundo observador montado en una carga en movimiento con respecto al mismo campo eléctrico experimenta dos fuerzas: una similar a la fuerza eléctrica que experimentaba el primero y otra adicional que es idéntica a lo que se denominaba fuerza “magnética”. Puede demostrarse que si para el primero

$$\mathbf{E}' \neq 0, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad (8.30)$$

para el segundo

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}' \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{B} = \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}). \quad (8.31)$$

Einstein probó de este modo que las ecuaciones de Maxwell eran consistentes con el principio de relatividad y con la constancia de la velocidad de la luz para todos los

^fY un segundo se define como $9.192\,631\,770 \times 10^9$ ciclos de la radiación producida por la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio ^{133}Cs .

Parte II

Relatividad General

Tema 9

El principio de equivalencia de inercia y gravedad

9.1 Introducción

Ya hemos estudiado la relatividad especial, que se aplica a observadores no acelerados (inerciales). La generalización a cualquier observador fue un proceso difícil que Einstein llevó a cabo gradualmente entre 1907 y 1915. La relatividad general es más compleja que la especial y requiere un mayor esfuerzo para su comprensión por dos razones fundamentalmente: las matemáticas necesarias involucran el cálculo tensorial y la geometría diferencial^a y además no sólo hemos de enfrentarnos a los efectos contrarios a la intuición que hemos mencionado en capítulos anteriores sino que además éstos tienen lugar en un escenario extraño: un espacio curvo (geometría no euclídea) que contrasta con las ideas sobre el espacio que tenemos desde la escuela.

9.2 El principio de equivalencia

Einstein buscaba la forma de generalizar su principio de relatividad, *las leyes de la física son las mismas para cualquier observador inercial*, incluyendo en particular la imposibilidad de distinguir estados de reposo o de movimiento absoluto uniforme, de modo que no existieran observadores privilegiados de ningún tipo, ni siquiera los acelerados. Esto parece ir en contra de la experiencia pues, si bien sabemos que un viajero en un tren que se desplaza uniformemente por una vía no distingue si está parado o se mueve (a no ser que mire por la ventanilla), un viajero en un tren que acelera nota una fuerza que le empuja contra su asiento. Parece que las aceleraciones sí son absolutas, es decir, podrían determinarse sin referencia a nada externo.

Este problema quedó resuelto cuando Einstein tuvo en 1907 lo que él mismo llamó 'la idea más feliz de mi vida'. Según cita su biógrafo A. Pais: "Estaba sentado en la oficina de patentes de Berna cuando de repente pensé: 'Si una persona sufre una caída libre, no siente su propio peso'. Estaba paralizado. Esta reflexión tan simple me condujo a una

^aEl mismo Einstein tuvo que aprender sobre la marcha las herramientas matemáticas que iba necesitando al desarrollar la teoría.

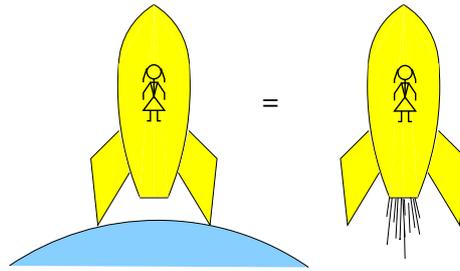


Figura 9.1: Ilustración del principio de equivalencia.

teoría de la gravitación". Esta idea feliz cristalizó en el **principio de equivalencia**:

En una pequeña región del espacio cualesquiera efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración.

Nótese que Einstein postula que el movimiento de objetos no es el único efecto que es equivalente al producido por la gravitación sino *cualquier* efecto producido por una aceleración. Éste es un principio que, como el de la relatividad especial, no ha podido ser rebatido experimentalmente. Además tiene importantísimas consecuencias:

1. El principio de equivalencia permitió a Einstein dar validez general a su principio de relatividad: la *relatividad general*.
2. El principio de equivalencia resuelve un viejo enigma: la *igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria*, es decir, el hecho de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitatorio.
3. La relatividad general *es una teoría de la gravitación*.

Analizaremos estas tres cuestiones a continuación.

9.2.1 La relatividad general

Supongamos que nos encontramos en una nave en el espacio alejados de cualquier objeto del universo, de modo que la gravedad sea despreciable. Si se enciende el cohete propulsor y éste aplica una fuerza constante, la nave experimentará una aceleración uniforme y sentiremos una fuerza que nos empujará hacia al suelo, la misma que si estuviéramos sobre la superficie de un planeta, sin activar el cohete, debido a la acción de la gravedad. De hecho, *si no miramos por la ventanilla de la nave no sabremos si estamos sintiendo la fuerza de aceleración del cohete o si estamos sintiendo la fuerza de la gravedad* (Fig. 9.1).

¿Por qué en una pequeña región del espacio? Si la nave espacial fuera muy grande la trayectoria en caída libre de varios objetos separados entre sí una gran distancia (caen hacia el centro del planeta por la acción de la gravedad) correspondería a líneas verticales que se van acercando.^b En cambio, éstas siempre serían paralelas cuando el movimiento se debe a la aceleración del cohete. De este modo podríamos distinguir entre fuerzas

^bEste efecto produce las *fuerzas de marea* que son responsables, por ejemplo, de los anillos de Saturno.

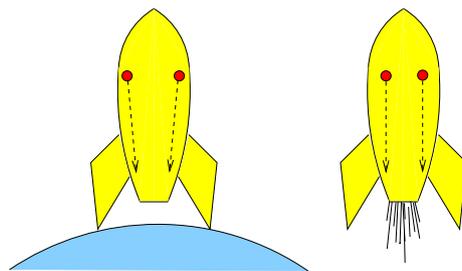


Figura 9.2: Ilustración del carácter local del sistema de referencia inercial en caída libre.

inerciales y gravitatorias. Sin embargo, este efecto se minimiza hasta desaparecer cuando la nave (región del espacio considerada) es suficientemente pequeña. Este *carácter local del sistema de referencia inercial* es una característica esencial del principio de equivalencia (Fig. 9.2).

9.2.2 La igualdad de masa inercial y masa gravitatoria

Si dejamos caer desde la misma altura dos objetos llegarán al suelo a la vez, siempre que eliminemos (o sea despreciable) el rozamiento con el aire. Éste último detalle confundió a *Aristóteles*, que creía que los objetos más pesados caían más rápido. Pero hay registros de *Philiponos* ya en el siglo V afirmando que, incluso cuando la diferencia de pesos es muy grande, la diferencia en los tiempos de caída es muy pequeña.

No fue hasta el siglo XVI cuando se empezaron a realizar experimentos para verificar la igualdad de los tiempos de caída. Los más importantes, aunque no los primeros, los llevó a cabo *Galileo*, del que se dice (¿falsamente?) que lanzaba objetos desde la torre de Pisa. Sus experimentos más precisos consistían, sin embargo, en hacer oscilar péndulos de la misma longitud con bolitas de diferentes materiales y comprobar que tras “miles de oscilaciones” seguían sincronizados, es decir sus periodos eran los mismos. Probablemente exageraba, pues los efectos de rozamiento con el aire debían ser significativos.

Un siglo más tarde *Newton* refinó los experimentos con péndulos, rodeando las bolitas de diferentes materiales con cajitas idénticas de madera para que el rozamiento con el aire fuese casi el mismo en todos los casos. La física newtoniana dio una explicación a la remarcable igualdad de los periodos de los péndulos. Por un lado, Newton había desarrollado un modelo para explicar el fenómeno de la gravedad, que permitía predecir la fuerza gravitatoria que actúa entre dos cuerpos de masas (gravitatorias) m_{G_1} y m_{G_2} separados una distancia r :

$$F = G_N \frac{m_{G_1} m_{G_2}}{r^2}, \quad G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad [\text{constante de Newton}].$$

En particular, la Tierra atrae a una masa m_G situada en su superficie con una fuerza

$$F = m_G g, \quad g = G_N M_{\oplus} / R_{\oplus}^2 = 9.8 \text{ m s}^{-2} \quad [\text{aceleración de la gravedad}].$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton predice el movimiento de un objeto de masa (inercial) m_I sometido a una fuerza cualquiera:

$$F = m_I a.$$

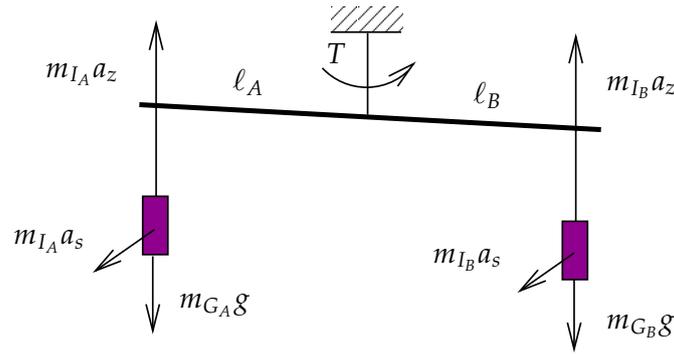


Figura 9.3: Esquema de la balanza de torsión del barón Eötvös.

En principio, la *masa gravitatoria* y la *masa inercial* son dos atributos de la materia muy diferentes. El primero es una medida de la intensidad con que un cuerpo atrae a otro por la acción de la gravedad y el segundo es una medida de la resistencia a cambiar su estado de movimiento. Si ambas coinciden, $m_G = m_I$, el movimiento de un cuerpo en caída libre es independiente de la masa, pues entonces $a = g$. Aplicando el mismo razonamiento al problema del péndulo, para oscilaciones de ángulo θ pequeño:

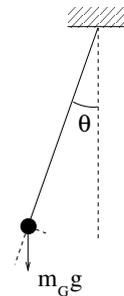
$$-m_G g \sin \theta = m_I \ell \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad -m_G g \theta = m_I \ell \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

es fácil demostrar que, si su longitud es ℓ , el periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I \ell}{m_G g}}.$$

Los experimentos de Newton mostraban que

$$\frac{|m_I - m_G|}{m_I} < 10^{-3}.$$



Pero ¿por qué dos propiedades de un cuerpo tan distintas habían de ser iguales? Esta cuestión la resolvió *Einstein* con su principio de equivalencia. Hasta ese momento, y también con posterioridad, los experimentos no hicieron sino confirmar la igualdad de masa gravitatoria y masa inercial. El principio de equivalencia pone fin al enigma: un observador en la nave espacial, alejada de cualquier campo gravitatorio externo, ve caer dos objetos cualesquiera con la misma aceleración cuando el cohete se enciende, lo que implica que ambos caerán libremente con la misma aceleración en un campo gravitatorio.

Entre 1889 y 1908 el barón húngaro *Eötvös* y colaboradores usaron la famosa balanza de torsión para mejorar el límite anterior a menos de 3×10^{-9} . La balanza (Fig. 9.3) consiste en una varilla suspendida horizontalmente de un hilo de cuyos extremos cuelgan dos masas, *A* y *B*, a distancias ℓ_A y ℓ_B , respectivamente, del punto de suspensión de la varilla. Sobre ellas actúan la fuerza de la gravedad (verticalmente) y la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra, que es suficientemente grande en la latitud de Hungría. La aceleración centrífuga tiene dos componentes, una vertical (a_z) de sentido contrario a la aceleración de la gravedad (g), y otra horizontal paralela a la superficie (a_s). No es

difícil ver que la balanza experimentaría un giro de momento

$$T = \ell_A a_s m_{G_A} \left(\frac{m_{I_A}}{m_{G_A}} - \frac{m_{I_B}}{m_{G_B}} \right)$$

siempre que las masas inerciales y gravitatorias no coincidan. No se detectó ningún giro, con lo que se obtuvo el límite antes mencionado.

Deduzcamos la expresión anterior: La condición de equilibrio

$$\ell_A (m_{G_A} g - m_{I_A} a_z) = \ell_B (m_{G_B} g - m_{I_B} a_z)$$

nos permite determinar ℓ_B y sustituirla en la expresión del momento de giro:

$$\begin{aligned} T &= \ell_A m_{I_A} a_s - \ell_B m_{I_B} a_s \\ &= \ell_A m_{I_A} a_s \left[1 - \frac{\frac{m_{G_A}}{m_{I_A}} g - a_z}{\frac{m_{G_B}}{m_{I_B}} g - a_z} \right] \\ &\approx \ell_A m_{I_A} a_s \left[1 - \frac{m_{G_A}}{m_{G_B}} \frac{m_{I_B}}{m_{I_A}} \right] \end{aligned}$$

donde hemos despreciado $a_z \ll g$, lo que conduce trivialmente a la expresión deseada.

En 1964 *Dicke* y colaboradores mejoraron el método de Eötvös utilizando la gravedad del Sol y de la Tierra y la aceleración centrífuga respecto al Sol. La ventaja es que ésta última va cambiando cada 24 horas lo que permite eliminar errores sistemáticos. De este modo el límite se redujo a menos de 10^{-11} . El experimento más preciso hasta la fecha se llevó a cabo en 1999 por *Baessler* y colaboradores, alcanzando un límite de menos de 10^{-13} . Se espera llegar a 10^{-18} usando un experimento en órbita llamado STEP.^c

9.2.3 La teoría de la gravitación

Según la física newtoniana un objeto se mueve a través del espacio en línea recta, con velocidad uniforme, a menos que sobre él actúe una fuerza. Así por ejemplo, un planeta se movería en línea recta si no fuera por la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre él.

En física relativista un objeto también se mueve en línea recta, con velocidad uniforme, a menos que actúe una fuerza, pero ahora se trata de una 'línea recta', entendida como *el camino más corto*, en el espaciotiempo y no en el espacio tridimensional. Esto es incluso cierto en presencia de gravedad. La razón es que para Einstein *la gravedad no es una fuerza* sino una distorsión del espaciotiempo debida a la presencia de masa. El *campo gravitatorio* se manifiesta en la *geometría del espaciotiempo*. Así, el Sol no ejerce una fuerza sobre el planeta sino que curva el espaciotiempo a su alrededor, de modo que el planeta, que sigue el camino más corto (*geodésica*) describe una trayectoria curva en el espacio tridimensional.

^cSu lanzamiento está previsto para junio de 2013. Véase <http://einstein.stanford.edu/STEP/>.

Es imposible visualizar la curvatura del espaciotiempo (cuatro dimensiones) pero podemos representar un mundo bidimensional análogo, una superficie, en la que estuvieran confinados objetos que siguen el camino más corto posible. Un ejemplo con curvatura fija: las rutas de los aviones sobre la superficie terrestre (círculos máximos). Otro ejemplo con curvatura variable (más parecida a un campo gravitatorio): el camino más corto entre dos puntos en una sábana elástica deformada por una bola pesada (Fig. 9.4). Las ecuaciones de campo de Einstein expresan la curvatura en función de la distribución de masa y energía en cada punto del espaciotiempo. Esta visión geométrica de la gravitación será discutida con más calma en el siguiente tema.

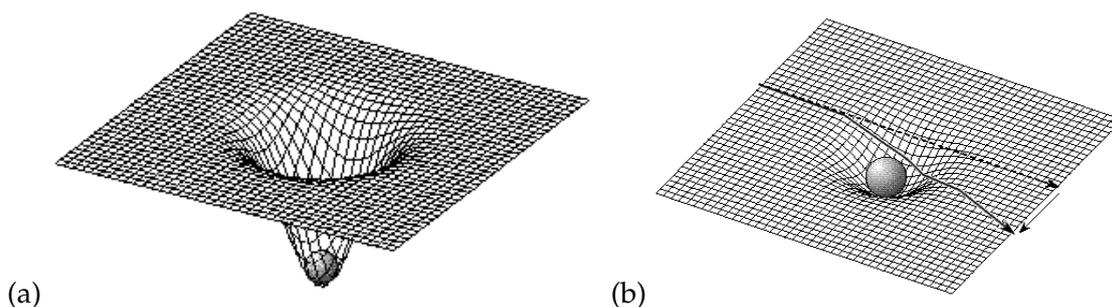


Figura 9.4: Ilustración bidimensional de la curvatura del espaciotiempo en presencia de una masa.

Una de las grandes predicciones de la teoría de Einstein es que no sólo los objetos masivos sufren la acción de la gravedad sino también los rayos de luz, que siguen el camino más corto en un espacio curvo (Fig. 9.4b). En los siguientes temas trataremos ésta y otras predicciones de la relatividad general (algunas espectaculares) así como algunos de los tests que de ella se han ido realizando desde que la teoría fue formulada.

Para finalizar esta sección conviene añadir que la teoría de Einstein *describe* las interacciones gravitatorias *más* (una mayor cantidad de fenómenos) y *mejor* (con mayor precisión) que la de Newton, aportando además una *nueva visión del mundo*. La teoría de Newton es de todas formas una excelente aproximación para objetos que no se muevan muy rápido y estén sometidos a campos gravitatorios débiles (es incluso suficiente para gobernar una nave espacial a través de nuestro sistema solar).

9.3 Relatividad general y el principio de Mach

Newton y Mach discrepaban sobre el origen de la inercia. Newton creía que las fuerzas de inercia (la fuerza centrífuga por ejemplo) aparecen cuando la aceleración tiene lugar respecto al “espacio absoluto”, mientras que para Mach estaban causadas por la aceleración respecto a la masa de todos los cuerpos celestes. No se trata de una distinción metafísica sino de algo que se puede intentar discernir experimentalmente: si Mach tuviera razón la presencia de grandes masas podría producir pequeños cambios en las fuerzas de inercia observadas en sus cercanías, mientras que si Newton tuviera razón no se observaría ningún efecto.

Einstein se consideraba a sí mismo machiano. Sin embargo el principio de equivalencia propone una tesis intermedia entre la de Newton y la de Mach: los observadores

inerciales (sistemas de coordenadas localmente en caída libre) vienen determinados por el campo gravitatorio local que a su vez depende de toda la materia del universo, cercana o lejana, a través de las ecuaciones de campo; sin embargo, una vez que nos encontramos en un sistema inercial las leyes de movimiento no están afectadas por la presencia de masas. Por ejemplo, un observador en la Tierra (sistema en caída libre hacia el Sol) no puede detectar ninguna fuerza inercial en la dirección del Sol.^d Dicho de otra manera: si no hay masas cerca, las coordenadas de un observador inercial vienen dadas por la distribución de masas de todo el universo (de acuerdo con Mach) por lo que no es de extrañar que se encuentre en reposo o en movimiento uniforme respecto a las estrellas fijas; y si hay una gran masa cerca (como nos ocurre con el Sol) entonces ésta modificará las coordenadas del observador inercial de modo tal que en su caída libre hacia la masa cercana tampoco puede sentir ningún efecto gravitatorio (lo cual es contrario al principio de Mach).

La cuestión es por tanto si la presencia de masas cercanas altera las leyes de movimiento o si no produce más efecto que determinar las coordenadas de los sistemas inerciales. En 1961 dos grupos independientes llevaron a cabo sendos experimentos para intentar determinar si se observaba algún cambio en la masa inercial de una partícula cuando era acelerada hacia el centro galáctico o en dirección contraria. Los resultados fueron negativos, lo que favorece al principio de equivalencia frente al principio de Mach.

^dSólo porque la Tierra no es puntual se puede detectar el efecto gravitatorio del Sol a través de las mareas.

Tema 10

Gravedad y espaciotiempo

10.1 Relatividad de las medidas del tiempo

Por la relatividad especial sabemos que cuando un reloj se mueve rápidamente respecto a un observador, el intervalo entre cada "tic" es distinto (más largo) al medido cuando el reloj estaba en reposo. Ésta es la *dilatación temporal cinemática*. Es de esperar que ocurra algo parecido cuando el reloj se mueva a velocidad variable.

Por otro lado, según el principio de equivalencia, los efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración. Por tanto, la simple *presencia de materia en las proximidades de un reloj hará también que éste marche más despacio*, aunque el observador no se mueva respecto a él. Ésta es la *dilatación temporal gravitatoria*.

Einstein sugirió un experimento imaginario con el que puede calcularse, para un campo gravitatorio débil como el de la Tierra, el valor de la dilatación temporal gravitatoria (Fig. 10.1). Se deja caer una masa m desde lo alto de una torre de altura h sobre la superficie de la Tierra. Al llegar al suelo su velocidad será $v = \sqrt{2gh}$ y por tanto su energía inicial, $E_1 = mc^2$, habrá aumentado en una cantidad igual a la energía cinética adquirida, de modo que en el suelo vale $E_2 = E_1 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + mgh$ (expresión aproximada, no relativista). Supongamos que toda esa energía se convierte en un fotón de energía $E_2 = h\nu_2$ que es emitido hacia arriba, donde h es la constante de Planck. Por

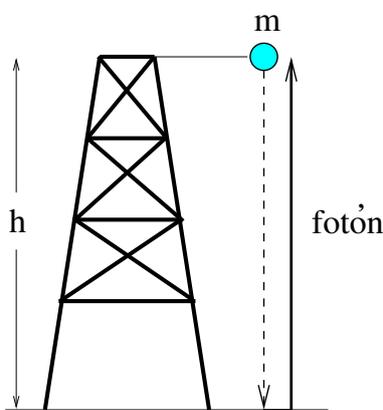


Figura 10.1: Experimento que muestra la dilatación temporal gravitatoria.

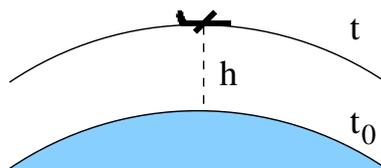


Figura 10.2: Dilatación temporal gravitatoria en el experimento de Hafele y Keating.

conservación de la energía, la energía del fotón cuando alcanza la cima de la torre deberá ser $E_1 = h\nu_1 < E_2$, es decir, su frecuencia ν habrá disminuido: *un fotón que escapa de un campo gravitatorio se desplaza al rojo*. Por tanto,^a

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{mc^2}{mc^2 + mgh} = \frac{1}{1 + gh/c^2} \approx 1 - \frac{gh}{c^2} \\ \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} &= 1 - \frac{gh}{c^2} \quad \text{o bien} \quad \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2} = \frac{gh}{c^2}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Éste es un experimento ideal, pero una versión práctica del mismo pudo llevarse a cabo por *Pound y Rebka* en 1960: la emisión γ de una transición atómica se debe desplazar al rojo una fracción 2.46×10^{-15} cuando se mide tras ascender los 22.6 m de altura de la torre del Jefferson Physical Laboratory en Harvard. Esta pequeñísima diferencia se pudo apreciar gracias al efecto Mossbauer, y la predicción fue verificada con una precisión del 1%.

Este cambio en las frecuencias debe ser el mismo que experimentan los tics de un reloj. Recordemos que el tiempo entre dos tics (periodo) es el inverso de la frecuencia. Por tanto, deducimos que el tiempo transcurre más lentamente cuanto más intenso es el campo gravitatorio. Así, si t es el intervalo de tiempo entre dos sucesos medido a una altura h sobre la superficie de la Tierra y t_0 es el medido a nivel del suelo tenemos que:^b

$$t = t_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right). \quad (10.2)$$

En el experimento de *Hafele y Keating* (1971), que hemos mencionado en un capítulo precedente, con el que se midieron los comportamientos de relojes abordo de aviones comerciales, se combinan la dilatación temporal cinemática y la gravitatoria (Fig. 10.2). La primera es debida al movimiento relativo entre los relojes en vuelo y el reloj de referencia en Washington, que a su vez se mueve respecto al centro de la Tierra (sistema localmente inercial por ser un sistema en caída libre hacia el Sol). Su efecto es el retraso de los relojes que vuelan hacia el este y el adelanto de los que vuelan hacia el oeste. La segunda se debe a que la intensidad del campo gravitatorio para los relojes abordo es menor que para el que se queda en tierra, lo que se traduce en un adelanto adicional, que podemos deducir explícitamente usando (10.2). Véase Ejercicio 10.1. El resultado confirma las predicciones con una precisión del 10%.

^aEstamos asumiendo que $h \ll R_\oplus$, el radio de la Tierra. Podemos sin embargo conseguir un resultado más general cambiando gh por $\frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus} - \frac{G_N M_\oplus}{R_\oplus + h}$. Recordemos que $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2$, donde M_\oplus es la masa de la Tierra.

^bLa expresión exacta, válida también cuando el campo gravitatorio es intenso, se puede deducir de las ecuaciones de campo de Einstein: $t = t_0 \left[1 - \frac{2G_N M}{(R+h)c^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{2G_N M}{Rc^2} \right]^{-1/2}$.

En 1976 el *Smithsonian Astrophysical Observatory* lanzó un cohete Scout hasta una altura de 10000 km. A esa altura un reloj debe marchar 4.25 partes en 10^{10} más rápido que a nivel del suelo.^c Durante dos horas de caída libre, el cohete estuvo transmitiendo pulsos de un oscilador maser que actuaba como reloj, los cuales se comparaban con los pulsos de otro reloj similar situado en tierra. El resultado confirmó la dilatación temporal gravitatoria al 0.02% [Vessot *et al*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 2081], su mejor determinación hasta la fecha.

10.2 Relatividad de las medidas espaciales

Ya sabemos que el movimiento relativo entre dos observadores hace que no estén de acuerdo en las medidas de longitudes que realizan. Por tanto, según el principio de equivalencia hemos de esperar que las medidas de longitudes también deban alterarse cuando exista una masa en las proximidades, aunque el observador se encuentre en reposo. Este hecho implica un *cambio en las reglas de la geometría*, que no son otra cosa que las reglas para definir distancias. Para comprender este cambio hemos de hacer un inciso con el fin de introducir el concepto de métrica. Hemos podido hablar de relatividad especial sin mencionar la métrica, pero en relatividad general este concepto es ineludible.

10.3 Métrica, curvatura y geodésicas

10.3.1 El concepto de métrica

Los objetos físicos tienen significado independientemente del sistema de coordenadas que usemos. En cambio, las coordenadas cambian de un sistema de referencia a otro. Pues bien, el *tensor métrico* g_{ij} es la herramienta que nos permite determinar longitudes a partir de las coordenadas de los puntos del espacio (matemáticamente, convierte vectores en escalares).^d Así, el cuadrado de la longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es

$$|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i,j=1,n} g_{ij} a_i a_j, \quad (10.3)$$

donde n es el número de dimensiones del espacio. La métrica es expresable en distintos sistemas de coordenadas, pero la longitud del objeto físico es siempre la misma (invariante). Ahora bien, tal longitud depende de cuál sea la geometría del espacio.

A continuación discutiremos distintas geometrías, es decir distintas métricas, y daremos ejemplos ilustrativos de una misma métrica expresada en sistemas de coordenadas diferentes.

^cCompruébese que $\Delta t/t = G_N M_\oplus h / (c^2 R_\oplus (R_\oplus + h))$.

^dEn general, un tensor de rango n tiene n índices (cada uno de los cuales abarca las d dimensiones del espacio vectorial correspondiente) con propiedades bien definidas bajo un grupo de transformaciones. Así, en el espaciotiempo de 4D (índices $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$), y bajo las transformaciones de Lorentz, un *escalar* es un tensor de rango cero (invariante); un *vector* como $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ o $p^\mu = (E, \mathbf{p}c)$ tiene rango uno; la métrica $g^{\mu\nu}$ y otros tensores de dos índices tienen rango dos; etc.

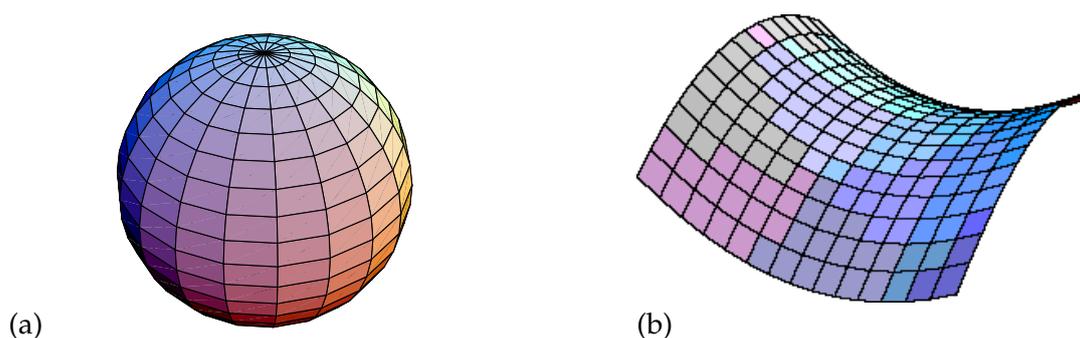


Figura 10.3: Espacios bidimensionales con curvatura constante positiva (a) y negativa (b).

10.3.2 La geometría euclídea

Es la geometría del *espacio plano*. Se caracteriza por cumplir los cinco postulados de Euclides, de los cuales el más representativo es el quinto: en el plano, por un punto exterior a una recta pasa *una y sólo una* recta paralela a la recta dada (nunca llega a cortarla). En general llamaremos *geodésica* a la mínima distancia entre dos puntos, que es estrictamente “recta” en la geometría euclídea. Existen además otras formas de caracterizar el espacio plano:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° .
- El cociente de la longitud de una circunferencia y su diámetro es π .

Veamos a continuación dos ejemplos de geometrías, una euclídea y otra no euclídea, para fijar los conceptos básicos.

Ejemplo A: Espacio euclídeo bidimensional

Se trata de una superficie bidimensional plana.

Coordenadas cartesianas:

Las coordenadas cartesianas de un vector en 2D son $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$. Para determinar la métrica lo más sencillo en general es considerar el vector elemento de línea $d\ell = (dx, dy)$,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad g_{xx} = g_{yy} = 1, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad (10.4)$$

o en forma matricial,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Coordenadas polares:

Las coordenadas polares de un vector en 2D son $\mathbf{a} = (a_r, a_\varphi)$, donde $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Usando de nuevo el vector elemento de línea,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = 0. \quad (10.6)$$

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi r . \quad (10.7)$$

Ejemplo B: Superficie de una esfera en 3D (geometría no euclídea)

Véase Fig. 10.3a. Lo más cómodo es usar coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) . Como la superficie de la esfera tiene dos dimensiones, sólo dos coordenadas serán suficientes para determinar un punto en este espacio (el radio $r \equiv R_c$ es constante y es el inverso de la curvatura).

Coordenadas esféricas:

Recordemos que en 3D, $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$. Por tanto, usando que $r = R_c$ y $dr = 0$, tenemos

$$d\ell^2 = R_c^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad \Rightarrow \quad g_{\vartheta\vartheta} = R_c^2, \quad g_{\varphi\varphi} = R_c^2 \sin^2 \vartheta, \quad g_{\vartheta\varphi} = g_{\varphi\vartheta} = 0 \quad (10.8)$$

Coordenadas polares:

Conviene hacer el cambio de variables:

$$r = R_c \vartheta \quad \Rightarrow \quad d\ell^2 = dr^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R_c} \right) d\varphi^2 \quad (10.9)$$

que podemos comparar con la métrica del espacio euclídeo (10.6): $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Longitud de una circunferencia:

$$dr = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi R_c \sin \left(\frac{r}{R_c} \right) \quad [C \rightarrow 2\pi r \text{ cuando } r \ll R_c]. \quad (10.10)$$

Vemos que el cociente de la longitud de la circunferencia y su diámetro $d = 2r$ es $C/d < \pi$.

10.3.3 La geometría de Minkowski

Es la geometría de la relatividad especial, la geometría del *espaciotiempo plano*. Como sabemos, un punto en el espaciotiempo (suceso) queda determinado por cuatro coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ en un sistema de referencia dado. Las coordenadas de un suceso en distintos sistemas de referencia (es decir, según distintos observadores inerciales) están relacionadas mediante las transformaciones de Lorentz. Ya hemos visto que estas transformaciones dejan invariante el *intervalo* entre dos sucesos:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 . \quad (10.11)$$

Por tanto la métrica de Minkowski, es (en coordenadas cartesianas):

$$g = \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (10.12)$$

La métrica no es definida positiva. En coordenadas esféricas es fácil ver que:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (10.13)$$

Recordemos que la *distancia propia* viene dada por el intervalo (tipo espacial) entre dos sucesos según un observador para el que éstos son simultáneos ($dt = 0$): $dl = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Por otro lado, el *tiempo propio* viene dado por el intervalo (tipo temporal) entre dos sucesos que tienen lugar en el mismo lugar para un observador ($dx = dy = dz = 0$): $cd\tau = \sqrt{ds^2} = cdt$.

10.3.4 Otras geometrías no euclídeas

Son aquellas en las que el postulado de las rectas paralelas (o sus caracterizaciones equivalentes) se sustituye por otro postulado distinto.

Elíptica

En el plano, por un punto exterior a una recta no se puede trazar *ninguna* recta paralela a la recta dada. Un ejemplo de esta geometría es la superficie de una esfera (Fig. 10.3a), siendo las líneas rectas (geodésicas) los círculos máximos. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre menor que π . Se dice que su *curvatura es siempre positiva*.

Hiperbólica

En el plano, por un punto exterior a una recta se pueden trazar *infinitas* rectas paralelas a la recta dada. Se trata de la geometría de la superficie de una silla de montar (Fig. 10.3b). La suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que 180° y el cociente entre la longitud de una circunferencia cualquiera y su diámetro es siempre mayor que π . Se dice que su *curvatura es siempre negativa*.

General: geometría de Riemann

Tanto la geometría elíptica como la hiperbólica tienen curvatura constante. La geometría de Riemann es la más general posible y por tanto, en cuatro dimensiones, es la geometría del espaciotiempo. En ella la *curvatura varía de un punto a otro*. Un ejemplo ilustrativo en 2D aparece en la Fig. 10.4.

En resumen: las geometrías euclídea y de Minkowski son casos particulares de las geometrías riemannianas y pseudoriemannianas.

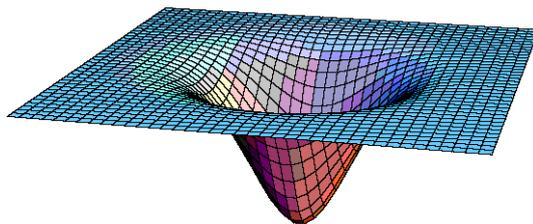


Figura 10.4: Espacio bidimensional con curvatura variable.

| Tipo | Nombre | Curvatura | Métrica def. + | Ejemplos |
|-------|--------------------|-----------|----------------|-----------------------------|
| Plana | Euclídea | cero | sí | espacio plano (tradicional) |
| | Minkowski | cero | no | espaciotiempo plano (RE) |
| Curva | Elíptica* | const > 0 | sí | superficie esfera, universo |
| | Hiperbólica* | const < 0 | sí | superficie silla de montar |
| | Pseudo-riemanniana | variable | no | espaciotiempo de la RG |

* Riemannianas

10.4 Las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein (ECE) *determinan* la métrica del espaciotiempo a partir de la distribución de materia. Se trata de igualdades que involucran los componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ (tensor curvatura que se construye a partir de segundas derivadas del tensor métrico), la curvatura escalar \mathcal{R} (que se obtiene a partir del tensor curvatura) y el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ que describe la configuración de masa y energía en un punto del espaciotiempo:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (10.14)$$

donde los índices μ y ν van de 0 a 3 (las cuatro dimensiones del espaciotiempo) y G_N es la constante de Newton. La constante Λ es la llamada constante cosmológica que introdujo Einstein en un principio para obtener un universo estático y que luego retiró ante la evidencia experimental de un universo en expansión. Curiosamente y desde hace pocos años los datos experimentales parecen favorecer una constante cosmológica no nula.

Atendiendo a la simetría del campo gravitatorio que se pretenda describir puede anticiparse la forma del tensor métrico que lo representa, antes de resolver las ECE. Dos casos son de especial relevancia: el campo estático e isótropo (el creado por un planeta o una estrella, por ejemplo) y el campo homogéneo e isótropo (el universo a gran escala, de acuerdo con el principio cosmológico). La primera se conoce como métrica general estática e isótropa, que conduce a la *métrica de Schwarzschild* cuando se aplican las ECE:^e

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (10.15)$$

(Nótese que se reduce a la métrica de Minkowski lejos de la masa M). La segunda es la *métrica de Robertson-Walker*, que conduce a los diferentes modelos de universo (los

^eNótese que de la métrica de Schwarzschild se deduce la expresión de la dilatación temporal que habíamos adelantado.

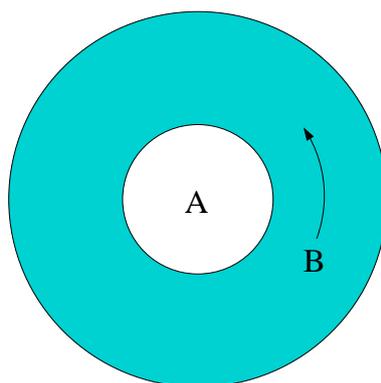


Figura 10.5: Un observador B gira alrededor de un observador inercial A.

estudiaremos en un próximo capítulo) cuando se aplican las ECE:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right). \quad (10.16)$$

Otros ejemplos de configuraciones del espaciotiempo para las que se conoce la solución de las ECE son la métrica de Kerr (campo creado por masas en rotación), las cuerdas cósmicas (campos creados por hilos de materia) y las paredes de dominio (campos creados por planos de materia).

10.5 Volviendo al principio de equivalencia

Consideremos un observador A inercial (en *caída libre*) alrededor del cual *gira* una plataforma sobre la que se encuentra un segundo observador (por tanto, no inercial) B mirando hacia A (Fig. 10.5). Podemos imaginar que ambos se encuentran en el espacio exterior, lejos de cualquier masa.

Ambos discrepan sobre si B está fijo o móvil respecto a A. Según A, B se mueve: está girando a su alrededor. Según B, él no se mueve, pues siempre ve a A en el mismo lugar.

Para averiguar quién tiene razón deciden someterse a una serie de pruebas. Veamos que *ninguna prueba permite distinguir entre reposo o movimiento* (principio de equivalencia) y que las *observaciones de ambos son simplemente interpretadas de modo diferente* por cada uno de ellos: A usa la relatividad especial y B la relatividad general.

1. ¿Siente B 'algo' que le empuja en dirección radial hacia el borde de la plataforma?
 - Deducción/observación: Sí (ambos de acuerdo).
 - Interpretación de cada uno:

A: B sufre una *fuerza centrífuga* en dirección radial y hacia fuera. Se trata de una fuerza ficticia, como todas las fuerzas de inercia, consecuencia de una elección 'poco conveniente' del sistema de coordenadas: en realidad B tiende a seguir una trayectoria rectilínea y uniforme según A, pero como (el sistema de referencia) B gira, aparece una fuerza, que para A no existe.

B: B dice permanecer *estático en un campo gravitatorio*. Tiene derecho a pensar así, pues la aceleración de la gravedad es localmente indistinguible de cualquier otra aceleración. Piénsese en la nave giratoria de la película "2001: una odisea del espacio" que 'genera' gravedad artificialmente.

Para B no existe ninguna fuerza (la gravedad no es una fuerza sino una distorsión del espaciotiempo) pero tiene que pagar un precio: sus medidas tienen lugar en una geometría extraña, un espaciotiempo curvo.

2. Medir el intervalo de tiempo Δt entre dos sucesos.

- Observaciones: $\Delta t_A > \Delta t_B$ (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: Debido a la *dilatación temporal cinemática*, $\Delta t_A = \gamma \Delta t_B > \Delta t_B$, donde el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, siendo $v = \omega r$, ω la velocidad angular de B y r su radio de giro. Nótese, por cierto, que el radio r medido por A y por B coinciden porque el movimiento de B respecto a A es perpendicular a la dirección radial.

B: Debido a la *dilatación temporal gravitatoria*, el reloj de B marcha más lento que el de A y por eso $\Delta t_A > \Delta t_B$.

3. Medir la longitud C de una circunferencia centrada en A y radio r igual a \overline{AB} .

- Observaciones : $C_A < C_B$ (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: $2\pi r = C_A = C_B/\gamma < C_B$ (*contracción de Lorentz* debida a que B se mueve a velocidad $v = \omega r$ respecto a A).

B: B afirma encontrarse en un espaciotiempo curvo, lo que significa que la relación entre la longitud de una circunferencia y su radio no es la misma que en un espaciotiempo plano. En nuestro caso, $C_B/\pi > 2r$ (*curvatura negativa*).

4. ¿Observa B que un rayo de luz emitido por él transversalmente a la dirección AB se defleca?

- Deducción/observación: Sí (ambos de acuerdo).
- Interpretación de cada uno:

A: B gira así que un rayo de luz parece deflectarse como consecuencia de que *sus ejes de coordenadas van rotando*. Piénsese en un rayo de luz transversal a un cohete que acelera rectilíneamente: para el astronauta el rayo también está curvado.

B: B insiste en que él no gira: lo que ocurre es que un rayo de luz se defleca en presencia de un campo gravitatorio, sigue una *geodésica en un espaciotiempo curvo*.

Ejercicios

10.1 Completa^f las predicciones del experimento de Hafele y Keating (tabla siguiente), sabiendo que los aviones en ruta hacia el este volaron durante 41.2 h a una altura media de 8900 m mientras que los que iban en ruta hacia el oeste volaron durante 48.6 h a una altura media de 9400 m. El cálculo real exige conocer las hojas de ruta y las velocidades de los aviones en diferentes tramos en los que se subdividieron los vuelos [Hafele & Keating, Science 177 (1972) 166].

| Diferencia de tiempos | Hacia el este | Hacia el oeste |
|-------------------------|------------------|-----------------|
| Dilatación cinemática | -184 ± 18 ns | 96 ± 10 ns |
| Dilatación gravitatoria | 144 ± 14 ns | 179 ± 18 ns |
| Efecto total | -40 ± 23 ns | 275 ± 21 ns |
| Efecto observado | -59 ± 10 ns | 273 ± 21 ns |

10.2 Los satélites de la red GPS se encuentran orbitando alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,000$ km, y por tanto a $v = 14\,000$ km/h. Compara tu reloj con otro situado en un satélite GPS. (i) ¿Qué efectos influyen en el ritmo de ambos relojes y qué consecuencias tienen? (ii) ¿Cuánto atrasan o adelantan los relojes de los satélites GPS respecto al tuyo cada día debido a esos efectos? (iii) ¿Es relevante el movimiento de rotación de la Tierra? [Datos: $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2 = 9.8$ m/s², $G_N = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻², $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R_\oplus = 6\,370$ km.]

^fLos efectos de dilatación cinemática fueron estimados en el Ejercicio 4.1.

Tema 11

Tests de la relatividad general

11.1 Introducción

Ya hemos hablado de los efectos de dilatación temporal gravitatoria: *desplazamiento gravitatorio al rojo y retraso de los relojes* y de algunos experimentos que la han comprobado, como el de la torre de Harvard por Pound y Rebka y el de los relojes voladores de Hafele y Keating, respectivamente. También es posible detectar el desplazamiento al rojo de las líneas espectrales del Sol y de estrellas muy masivas debido a su propio campo gravitatorio, aunque su movimiento peculiar produce desplazamientos Doppler adicionales (mucho mayores que el efecto gravitatorio) que hacen difícil su detección. En el caso del Sol se ha confirmado el efecto con una precisión del 5%.

Ahora revisaremos otros tests de la relatividad general que comprueban diversos aspectos y predicciones de la teoría.

11.2 La deflexión de la luz y lentes gravitatorias

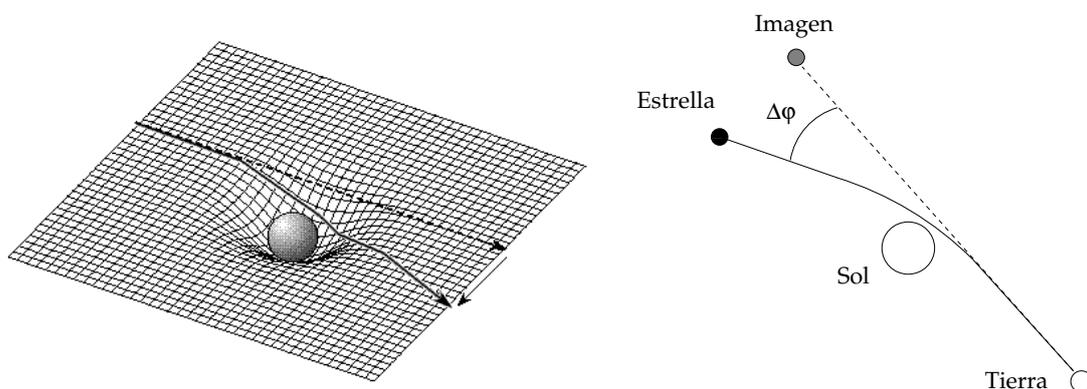


Figura 11.1: Posiciones real y aparente (imagen) de una estrella vista cerca del Sol (muy exagerada).

La luz sigue trayectorias geodésicas en el espaciotiempo, que está curvado en pre-

sencia de una masa. En particular, la luz procedente de una estrella experimentará una *deflexión* (desviación en su trayectoria), que será máxima cuando los rayos pasen muy cerca del borde del disco solar, donde el campo gravitatorio creado por el Sol, es decir la curvatura del espaciotiempo, es mayor (Fig. 11.1). El efecto es muy pequeño y obviamente sólo se puede intentar medir cuando hay un eclipse solar. Es un experimento difícil porque hay que conocer la posición de las estrellas con mucha precisión. La teoría predice una desviación angular en la posición de la estrella:

$$\Delta\varphi = \frac{4G_N M_\odot}{r_0 c^2} \quad (11.1)$$

donde r_0 es la distancia mínima del rayo de luz al centro solar (siempre que ésta no sea muchas veces mayor que el radio solar R_\odot) y M_\odot es la masa del Sol. De este modo Einstein predijo una desviación máxima (para $r_0 = R_\odot$) de $1.75''$ de arco. Compruébese.^a

En 1919 sir Arthur Eddington lideró una expedición al golfo de Guinea (Príncipe) donde observó el efecto esperado en la posición de cinco estrellas, durante el eclipse solar que tuvo lugar el 29 de mayo. Este éxito de la teoría convirtió a Einstein en una celebridad mundial. Desde entonces, se han hecho experimentos similares, en los que la precisión de las medidas no ha mejorado mucho.

Afortunadamente existe un modo alternativo mucho más preciso de medir la desviación por el Sol de la luz procedente de una fuente y que no necesita esperar a un eclipse. Se trata de utilizar una radiofuente, en vez de una fuente luminosa. El mejor ejemplo es el cuasar 3C279, que es ocultado por el Sol cada 8 de octubre. Gracias a la interferometría de larga base, puede medirse la posición de la radiofuente con una precisión de 3×10^{-4} segundos de arco. Usando este método se ha podido confirmar la predicción de Einstein con una precisión de 1 parte en 10000.

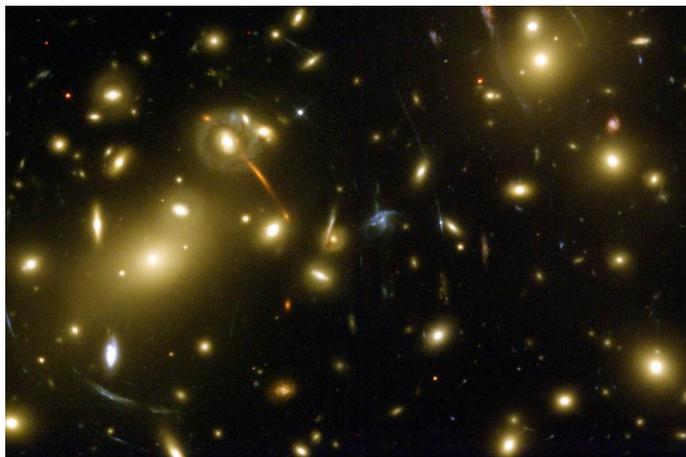


Figura 11.2: Imagen de una lente gravitatoria [<http://hubblesite.org/gallery/album/pr2001032b/>].

Otro interesantísimo fenómeno relacionado con la deflexión de la luz es el de las *lentes gravitatorias*. Ocurre cuando la luz procedente de un objeto muy lejano suficientemente brillante (un cuasar) pasa muy cerca de un objeto muy masivo más cercano que está justo en la línea de visión desde la Tierra. Entonces la luz puede curvarse y llegar hasta la

^aEl resultado de la fórmula (11.1) está en radianes. Recuérdese que 360° son 2π radianes y $1^\circ = 60' = 3600''$. Datos: $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Tierra pasando por ambos lados del objeto masivo, que actúa como una lente, de modo que se obtienen dos imágenes del quasar. A veces también se obtienen arcos e incluso anillos. La Fig. 11.2 es una foto tomada por el telescopio espacial Hubble en la que se muestra un espectacular ejemplo de lente gravitatoria producida por un cúmulo rico en galaxias (Abell 2218), muy masivo y compacto, que distorsiona las imágenes de objetos entre 5 y 10 veces más lejanos. Lo más evidente son los arcos y anillos pero también se han detectado hasta siete imágenes dobles (se sabe porque los espectros de los objetos repetidos son idénticos) y aumento de brillo en algunos de los objetos.

11.3 El avance del perihelio de Mercurio

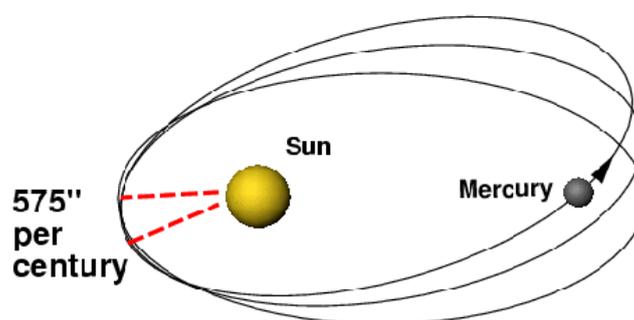


Figura 11.3: Avance del perihelio de Mercurio.

Antes de que la expedición de Eddington comprobara las predicciones de Einstein sobre la deflexión de la luz, su teoría ya había conseguido explicar una anomalía en la órbita de Mercurio que había traído de cabeza a los astrónomos durante mucho tiempo.

La teoría de Newton explicaba con mucha precisión las órbitas de los planetas, hasta el punto de que algunas irregularidades observadas en la órbita de Urano sirvieron a Le Verrier para predecir la existencia y la posición del planeta Neptuno. Las órbitas planetarias newtonianas alrededor del Sol debían ser cerradas (elípticas) y fijas pero la influencia gravitatoria de los otros planetas puede perturbarlas. En particular, se sabía que la posición del perihelio (punto de la órbita planetaria más cercano al Sol) de Mercurio avanza alrededor del Sol a un ritmo de 575'' de arco por siglo (Fig. 11.3). Sin embargo, los cálculos newtonianos sólo eran capaces de dar cuenta de 532'' de arco por siglo, por la influencia de Venus (278''), Júpiter (154''), la Tierra (90'') y el resto de los planetas (10''). La discrepancia de unos 43'' de arco por siglo fue en un principio achacada por el mismo Le Verrier y otros a la existencia de un grupo de pequeños planetas cercanos al Sol, pero enseguida se concluyó que éstos producirían otros efectos adicionales que no se habían observado. Parecía necesario abandonar la hipótesis newtoniana de que la fuerza gravitatoria solar disminuye con el cuadrado de la distancia.

En relatividad general, el perihelio de Mercurio avanzaría aunque no existieran los otros planetas, simplemente porque la órbita tiene lugar en un espaciotiempo curvo para el que la ley de Newton no es una perfecta aproximación, pues Mercurio está muy cerca del Sol. El cálculo de Einstein para Mercurio predijo exactamente los 43'' de arco por siglo que faltaban. También pudo explicar otras discrepancias menores que también se habían detectado para Venus (8.6'') y la Tierra (3.8''). En 1949 se encontró Icarus, un

asteroide con una órbita muy excéntrica y por tanto muy sensible a este efecto ($10''$) que fue calculado y comprobado experimentalmente con gran precisión.

El 2 de julio de 1974 Hulse y Taylor descubrieron el pulsar binario PSR 1913+16 con el famoso radiotelescopio de 300 m de diámetro de Arecibo (Puerto Rico), lo que les valió el premio Nobel en 1993. Se trata de un par de estrellas de neutrones (objetos muy masivos de unos 20 km de diámetro) que orbitan una alrededor de la otra a una distancia pequeñísima (2.3 segundos-luz). Este sistema es muy interesante porque pone a prueba la relatividad general de forma extrema. En particular, el avance del perihelio de la órbita es enorme, ¡ 4.2° por año!, cantidad que está en perfecto acuerdo con la teoría.

11.4 Ondas gravitatorias

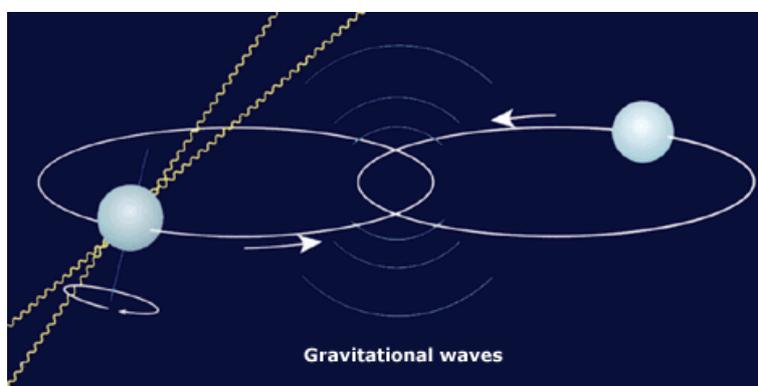


Figura 11.4: Esquema del pulsar binario PSR 1913+16.

El hecho por el que el pulsar binario PSR 1913+16 es más conocido es por confirmar una de las predicciones más esperadas de la relatividad general: la existencia de ondas gravitatorias.

Del mismo modo que cuando una carga eléctrica es acelerada emite ondas electromagnéticas (antena), las ecuaciones de Einstein predicen que cuando una masa es acelerada (equivalentemente, sometida a un campo gravitatorio) ésta emitirá ondas gravitatorias, una deformación del espaciotiempo que se propaga.

Un pulsar es una estrella de neutrones que gira sobre sí misma a gran velocidad y con un gran campo magnético. Las partículas cargadas se mueven a lo largo de las líneas de campo que van del polo norte al polo sur. En los polos estas partículas pueden escapar y dar lugar a una emisión de radio. Como el eje magnético y el eje de rotación del pulsar no coinciden, los dos haces de ondas de radio que emergen de los polos, en un cono bastante estrecho, barren el cielo como si se tratara de la luz de un faro. Esto permite detectar el pulsar (nos llegan pulsos de ondas de radio) y conocer su periodo de rotación (separación entre los pulsos). En el caso del pulsar PSR 1913+16 se detectó que la frecuencia de los pulsos cambiaba y se repetía cada 8 horas, lo que indicaba que se trataba de un sistema binario: el pulsar giraba entorno a otra estrella (invisible) de modo que el efecto Doppler explica los cambios de la frecuencia recibida en virtud del alejamiento o acercamiento de la radiofuente. Los cálculos indicaron que la estrella compañera era otra estrella de neutrones que no se mostraba como pulsar (al menos no

emite en nuestra dirección).

Se ha observado que el periodo de la órbita de este sistema binario va disminuyendo gradualmente. La energía que el sistema va perdiendo debe emitirse en forma de ondas gravitatorias en una cantidad que coincide, con una precisión del 0.5%, con la predicha por la teoría. Este hecho se considera la primera prueba de la existencia de las ondas gravitatorias. Existen multitud de experimentos, en curso o en proyecto, intentando detectar *directamente* las ondas gravitatorias utilizando diversas técnicas, pero aún sin resultados positivos.^b

11.5 Agujeros negros

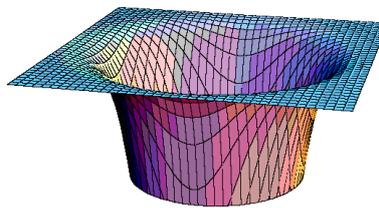


Figura 11.5: Esquema bidimensional del espaciotiempo alrededor de un agujero negro.

Los agujeros negros son una predicción de la teoría de Einstein. Un agujero negro es un objeto tan denso que el espaciotiempo a su alrededor está tan curvado que la luz no puede escapar de él (Fig. 11.5).

En la actualidad existen muchos candidatos a ser un agujero negro. El primero fue Cygnus X-1, descubierto en 1973, compañero de una supergigante azul que orbita alrededor de un objeto invisible, y fuente muy intensa de rayos X. Hoy día está ampliamente aceptado que en el centro de (prácticamente) todas las galaxias (no solamente las más activas) hay un agujero negro supermasivo. La principal pista suele ser la enorme velocidad del gas y el polvo que hay alrededor de objetos invisibles, y en consecuencia una fuerte emisión de radiación, señal de la existencia de un campo gravitatorio muy intenso. En el centro de nuestra propia galaxia se cree que hay un agujero negro de más de 4 millones de masas solares en una región de unos 0.002 años luz, a partir de las órbitas trazadas por cerca de un centenar de estrellas alrededor de un centro aparentemente vacío.

Para entender *cómo se forma* un agujero negro, conviene repasar las etapas de la evolución estelar: (1) Nubes de hidrógeno se condensan en cúmulos cada vez más densos y calientes por acción de la gravedad. (2) Cuando la temperatura es suficientemente alta el hidrógeno se fusiona para dar helio, lo que libera energía, principalmente en forma de radiación electromagnética (nuestro Sol está actualmente en esta fase). La atracción gravitatoria está compensada por la presión debida a la agitación térmica. (3) Tras varios miles de millones de años el combustible (hidrógeno) se acaba y la estrella empieza a fusionar helio para producir elementos más pesados. La temperatura del núcleo sube y el tamaño aumenta (ésta es la fase de gigante roja). (4) Cuando todo el combustible se haya

^bAIGO [<http://www.gravity.pd.uwa.edu.au>], GRAVITY-PROBE-B [<http://einstein.stanford.edu>], IGEN [<http://igec.infn.it>], LIGO [<http://www.ligo.caltech.edu>], LISA [<http://lisa.nasa.gov>], TAMA [<http://tamago.mtk.nao.ac.jp>], VIRGO [<https://www.cascina.virgo.infn.it>].

acabado hay tres posibilidades dependiendo de la masa de la estrella: (a) Si es menor que unas 8 masas solares, se va enfriando gradualmente radiando su energía térmicamente (enana blanca); (b) Si es mayor que 8 pero menor que unas 30 masas solares, la estrella pasa por la fase enana blanca pero la gravedad es tan fuerte que la estrella colapsa en una gran implosión (supernova) y, en el remanente, los protones y los electrones se funden formando neutrones (estrella de neutrones) que con frecuencia rota a gran velocidad (pulsar); (c) Si la masa es mayor que unas 30 masas solares, pasa también por la fase de estrella de neutrones y sigue colapsando. La atracción gravitatoria es tan fuerte que los neutrones quedan literalmente aplastados y la estrella forma un agujero negro.

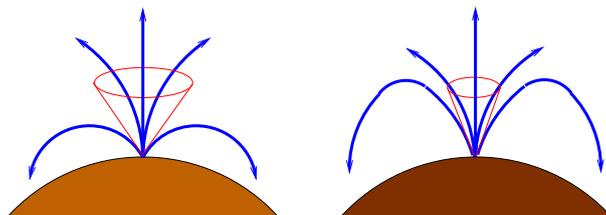


Figura 11.6: Los conos de luz que escapan de la superficie de estrellas más masivas son más estrechos.

Para entender *qué es* un agujero negro imaginemos los rayos de luz que en todas direcciones se emiten desde la superficie de una estrella muy masiva. Ya sabemos que sus trayectorias se curvan, de modo que los que salgan casi paralelos a la superficie acabarán cayendo de nuevo a la estrella y sólo hay un cono de rayos que contiene a los que pueden escapar. Si la estrella es aún más masiva el cono será más estrecho. Si la masa es suficientemente grande el cono se cierra a una determinada distancia del centro (*horizonte de sucesos*). Nada que esté en el interior a esta distancia podrá escapar jamás. El radio del horizonte de sucesos es el *radio de Schwarzschild* y aparece como la distancia a la que la métrica de Schwarzschild presenta una *singularidad*: $r_S = 2G_N M/c^2$. Debe notarse que la métrica de Schwarzschild es la solución de las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío alrededor de un objeto de masa M y radio R . Por tanto, el objeto es un agujero negro, si $r_S > R$, o sea, toda su masa está dentro del horizonte. Por curiosidad, el radio de Schwarzschild de un protón es 10^{-50} cm (mucho menor que su radio, 10^{-13} cm), el de la Tierra es 9 mm y el del Sol es 2.95 km. Ninguno de ellos es obviamente un agujero negro. Para terminar, se estima que la masa total del Universo es 2×10^{53} kg, de donde su radio de Schwarzschild es 32 mil millones de años-luz, que es algo mayor aunque muy parecido al tamaño del Universo (cuya edad es de unos 15 mil millones de años), si es que el Universo es cerrado. En ese caso, se podría decir que vivimos dentro de un agujero negro.

Tema 12

Cosmología

12.1 Introducción

Poco después de llegar a la forma final de las ecuaciones de campo, Einstein se puso a investigar las implicaciones que tenían sobre la estructura del universo. En 1917 publicó un trabajo en el que presentaba un modelo simple de un universo cerrado, esférico y estático, para lo que hubo de introducir la constante cosmológica que ya hemos mencionado.

12.2 Modelos de universo

El punto de partida en general es la métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (12.1)$$

que supone homogeneidad e isotropía del universo a gran escala (*principio cosmológico*): un espaciotiempo 4D que contiene un subespacio 3D máximamente simétrico. Sólo dos cantidades especifican la métrica en estas circunstancias: $R(t)$, que es el *factor cosmológico de escala* (tiene dimensiones de longitud y se relaciona con el tamaño del universo)^a y k , que es el *parámetro de curvatura* (sólo puede tomar tres valores, gracias al rescalamiento de la coordenada radial, $k = +1, -1, \text{ ó } 0$, correspondiendo a una geometría cerrada, abierta o plana, respectivamente). Se suele también definir el factor de escala adimensional $a(t) = R(t)/R_0$, donde $R_0 = R(t_0)$ es el factor de escala en la época actual.

Sustituyendo la métrica de Robertson-Walker en las ecuaciones de Einstein,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (12.2)$$

^aEl parámetro de desplazamiento al rojo z , debido a la expansión de Hubble, está relacionado con el factor de escala ahora, $R_0 = R(t_0)$, y en el momento de la emisión de la luz por parte de la fuente, $R = R(t)$: mediante:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} = H \frac{\delta r}{c} \equiv \frac{\dot{R}}{R} \delta t = \frac{\delta R}{R} = \frac{R_0 - R}{R} \Rightarrow 1 + z = \frac{R_0}{R}, \text{ definiendo } H = \dot{R}/R,$$

que resulta valer más allá de la aproximación no relativista anterior. El punto indica derivada respecto a t .

y asumiendo que la forma del tensor energía-impulso es la correspondiente a un *fluido perfecto* de densidad total ρ y presión p , es decir $T^{\mu\nu} = \text{diag}(p, \rho, \rho, \rho)$, se obtienen las ecuaciones cosmológicas (Friedmann-LeMaître), que dictan la evolución del universo:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (12.3)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p/c^2). \quad (12.4)$$

(Nótese que una presión positiva decelera la expansión, igual que la densidad.)

A partir de estas dos ecuaciones se deduce una tercera:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p/c^2),$$

que nos da ρ en función de a suponiendo que el universo es un fluido perfecto con *una sola componente* con ecuación de estado $p = \omega \rho c^2$, pues entonces

$$\dot{\rho} = -3(1 + \omega)\rho\dot{R}/R \Rightarrow \rho \propto R^{-3(1+\omega)} \propto a^{-3(1+\omega)} \quad \text{si } \omega \neq -1$$

lo que nos permite conocer la evolución del universo en distintas *eras*. Así:

– universo *dominado por la radiación* ($\omega = 1/3$): (despreciando curvatura y Λ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho, \quad \rho \propto a^{-4} \Rightarrow a(t) \propto t^{1/2}; \quad H = \frac{1}{2t}.$$

[así era el universo desde el fin de la etapa inflacionaria ($10^{-35} - 10^{-33}$ s tras el Big Bang) hasta que la densidad de materia y radiación se igualaron, unos 10^4 años después.]

– universo *dominado por la materia* ($\omega = 0$): (despreciando curvatura y Λ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho, \quad \rho \propto a^{-3} \Rightarrow a(t) \propto t^{2/3}; \quad H = \frac{2}{3t}.$$

[así ha sido el universo desde que tenía unos 10^4 años, es decir casi siempre]

– universo *dominado por la energía del vacío* ($\omega = -1$): (despreciando curvatura)

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 > 0, \quad \rho = \text{const} \Rightarrow a(t) \propto e^{Ht}; \quad H = \text{const}.$$

[así era el universo durante la *inflación* y así parece ser que empieza a serlo también ahora: un universo dominado por la constante cosmológica.]

El factor de escala $a(t)$ varía, por tanto, con el tiempo, a no ser que se ajusten los parámetros, como hizo Einstein en un principio, para forzar un *universo estático*: existe una solución a las ecuaciones cosmológicas con ρ , p y Λ positivos correspondiente a un universo con a finito y constante, con curvatura positiva (cerrado y por tanto sin bordes) y densidad constante, fijadas ambas por las constantes universales G_N y Λ . Einstein desechó este modelo de universo ante la evidencia observacional de la expansión de Hubble en los años 1920, eliminando la constante cosmológica ($\Lambda = 0$) que ya no era

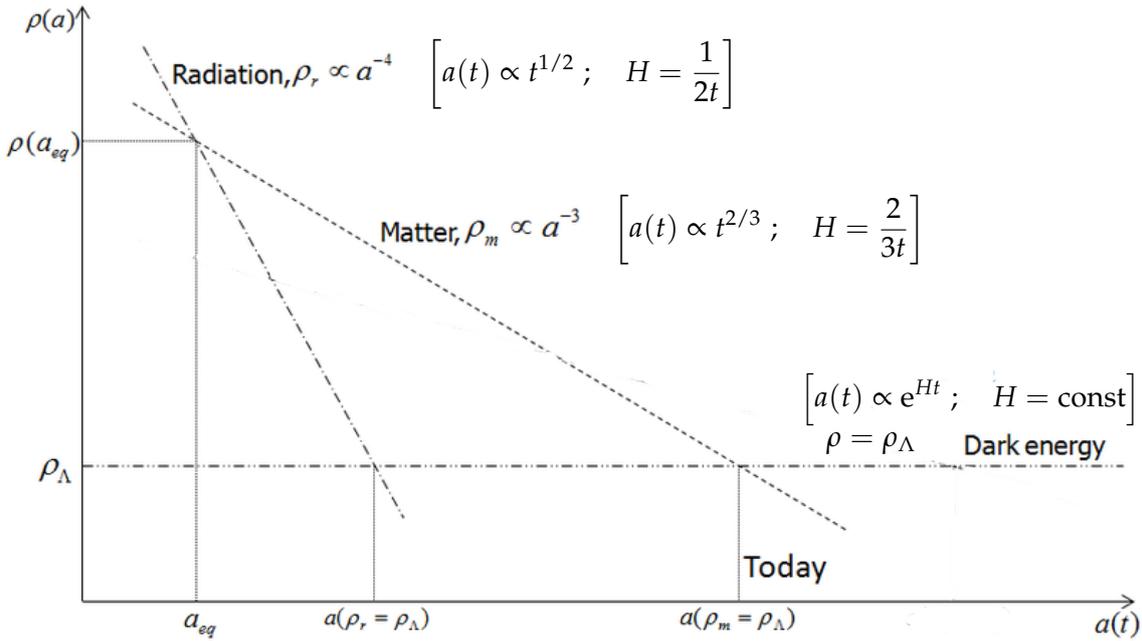


Figura 12.1: Esquema de la evolución de la densidad del universo.

necesaria. Sin embargo este parámetro puede no ser nulo y de hecho parece no serlo a tenor de observaciones recientes, como ahora veremos.

La *expansión* (o la *recesión*) no es más que un rescalamiento del universo. Las coordenadas "comóviles" (r, θ, φ) permanecen invariables para observadores en reposo pero todas las distancias se estiran. No hay un "centro del universo": todos los puntos son equivalentes; desde todos ellos se observa la misma expansión. Es como si todos los objetos del universo estuvieran dibujados sobre la superficie de un globo que se va inflando (el centro del globo no pertenece al espacio 2D del globo, del mismo modo que el centro de expansión del universo no se encuentra en nuestro espacio 3D).

Se definen varios *parámetros cosmológicos* cuya determinación observacional nos permitirá, en principio, determinar cuál es la geometría del universo, es decir el valor de k , usando de las ecuaciones de Friedmann-LeMaître:

- El *parámetro de Hubble* H mide el ritmo de expansión del universo:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{su valor actual es la constante de Hubble } H_0). \quad (12.5)$$

Experimentalmente: $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}$.

- El *parámetro de densidad* Ω , se descompone en una contribución debida a la materia, Ω_m , y otra debida a la constante cosmológica Ω_Λ (densidad de energía del vacío). La contribución de los fotones es muy pequeña: $\Omega_\gamma = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}$. Se define como el cociente entre ρ y la densidad crítica ρ_c (aquella para la que el universo es plano, es decir $k = 0$):

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_m + \Omega_\Lambda; \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}. \quad (12.6)$$

Nótese que ρ_Λ es constante pero $\rho_m \propto a^{-3}$ va disminuyendo con la expansión. Los valores actuales son ρ_M, Ω_M . Las ecuaciones (12.3) y (12.4) pueden generalizarse para un universo con distintas componentes de densidades ρ_i (incluida ρ_Λ) con ecuaciones de estado $p_i = \omega_i \rho_i c^2$:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \sum_i \rho_i - \frac{kc^2}{R^2} \quad (12.7)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G_N}{3} \sum_i \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (12.8)$$

La Ω_M se obtiene a partir de sus diferentes componentes: materia bariónica (Ω_B), partículas relativistas, esencialmente neutrinos (Ω_ν) y *materia oscura* fría (Ω_{CDM}), que es ¡la principal contribución!^b Sus valores son:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \Omega_B + \Omega_\nu + \Omega_{\text{CDM}} \\ \Omega_B &= 0.044 \pm 0.004 \approx \Omega_{\text{vis}} \quad (\approx 0.18 \Omega_M) \\ 0.003 &\lesssim \Omega_{\text{HDM}} \approx \Omega_\nu < 0.015 \\ \Omega_{\text{CDM}} &= 0.22 \pm 0.04 \quad (\approx 0.82 \Omega_M) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Nótese que la ecuación (12.3) nos da una relación entre el parámetro de Hubble H , la curvatura k y el parámetro de densidad $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda$:

$$\frac{kc^2}{R^2} = H^2(\Omega - 1), \quad (12.10)$$

de donde deducimos que si $\Omega > 1$ el universo es cerrado ($k = +1$), si $\Omega = 1$ es plano ($k = 0$) y si $\Omega < 1$ es abierto.

- La *constante cosmológica* Λ interviene en la fórmula que relaciona la distancia de luminosidad d_L con el parámetro de desplazamiento al rojo z de objetos muy lejanos:^c

$$H_0 d_L = c \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right] \quad (12.11)$$

donde el parámetro de deceleración q_0 vale:^d

$$q_0 \equiv - \left. \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \right|_0 \approx \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda. \quad (12.12)$$

^bLa materia oscura es aquella que *no se ve*: sólo se sienten sus efectos gravitatorios (curvas de rotación de las galaxias, velocidades de cúmulos de galaxias, etc.). Se divide en dos categorías: bariónica y no bariónica, con la segunda subdividida en caliente (HDM) y fría (CDM), constituida por partículas poco masivas (relativistas) y muy masivas (lentas), respectivamente. Los candidatos a materia oscura bariónica son genéricamente llamados MACHOs (planetas muy masivos, estrellas enanas, agujeros negros, etc.). Candidatos a HDM son los neutrinos. Candidatos a CDM son las hipotéticas WIMPs (neutralinos, etc.) y axiones. Todas estas formas de materia oscura parecen ser necesarias para explicar los distintos niveles de estructura del universo. La mayoritaria parece ser sin embargo CDM.

^cExisten varias formas de definir distancias en cosmología: distancia propia d_p , distancia angular d_A y distancia de luminosidad d_L . Hemos de especificar a cuál nos referimos. Dependen de los parámetros cosmológicos y del desplazamiento al rojo z del objeto, que es único, medible e independiente de modelo.

^dExactamente: $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 + \frac{3}{2}\sum_i \omega_i \Omega_i$, donde $\Omega_0 = \sum_i \Omega_i$ y $p_i = \omega_i \rho_i c^2$ (ecuación de estado) es la presión de la especie i , siendo $\omega = 0$ para partículas no relativistas, $\omega = +\frac{1}{3}$ para partículas relativistas y $\omega < 0$ para la *energía oscura*, que produce una presión negativa, de sentido contrario a la gravedad (la constante cosmológica es un caso especial que corresponde a $\omega = -1$).

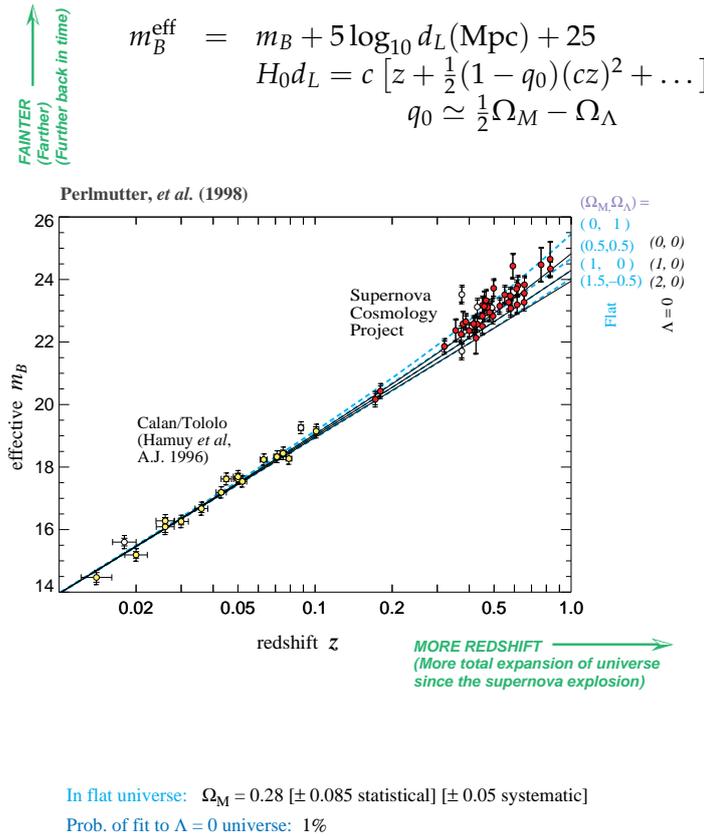


Figura 12.2: Diagrama de Hubble de supernovas tipo Ia [Knop et al, ApJ 598 (2003) 102].

En los últimos años se han realizado medidas de la distancia de varias decenas de supernovas tipo Ia con z muy alto (Fig. 12.2). Las supernovas son objetos efímeros pero extraordinariamente brillantes cuya curva de luminosidad es muy regular. Esto permite conocer su magnitud absoluta y así averiguar su distancia a partir de su magnitud relativa. No son muy frecuentes pero se han podido observar unos centenares de ellas con z muy alto (cercano a la unidad) desde finales de los años 90, por dos colaboraciones de astrónomos en competición, una en el Monte Stromlo (Australia) y otra en Cerro Tololo (Chile). La noticia no es que estas supernovas lejanas se aparten de la ley de Hubble lineal sino que lo hacen de forma tal que el resultado es incompatible con un parámetro de deceleración q_0 positivo, que es lo que cabría esperar si el Universo estuviera formado por materia exclusivamente. La deceleración negativa observada, es decir la reacceleración (premio Nobel de Física 2011 para S. Perlmutter, B.P. Schmidt y A.G. Riess) se interpreta en términos de la existencia de una densidad de energía del vacío que produce una presión de signo contrario a la debida a la atracción gravitatoria. Curiosamente tal efecto parece compatible con la existencia de una constante cosmológica que Einstein había introducido en sus ecuaciones para forzar un universo estático y que después suprimió ante la evidencia experimental de la hipótesis de expansión.^e

Existe un buen número de medidas complementarias de los parámetros cosmológicos

^eEinstein llegó a decir que la introducción de la constante cosmológica fue uno de los mayores errores de su vida.

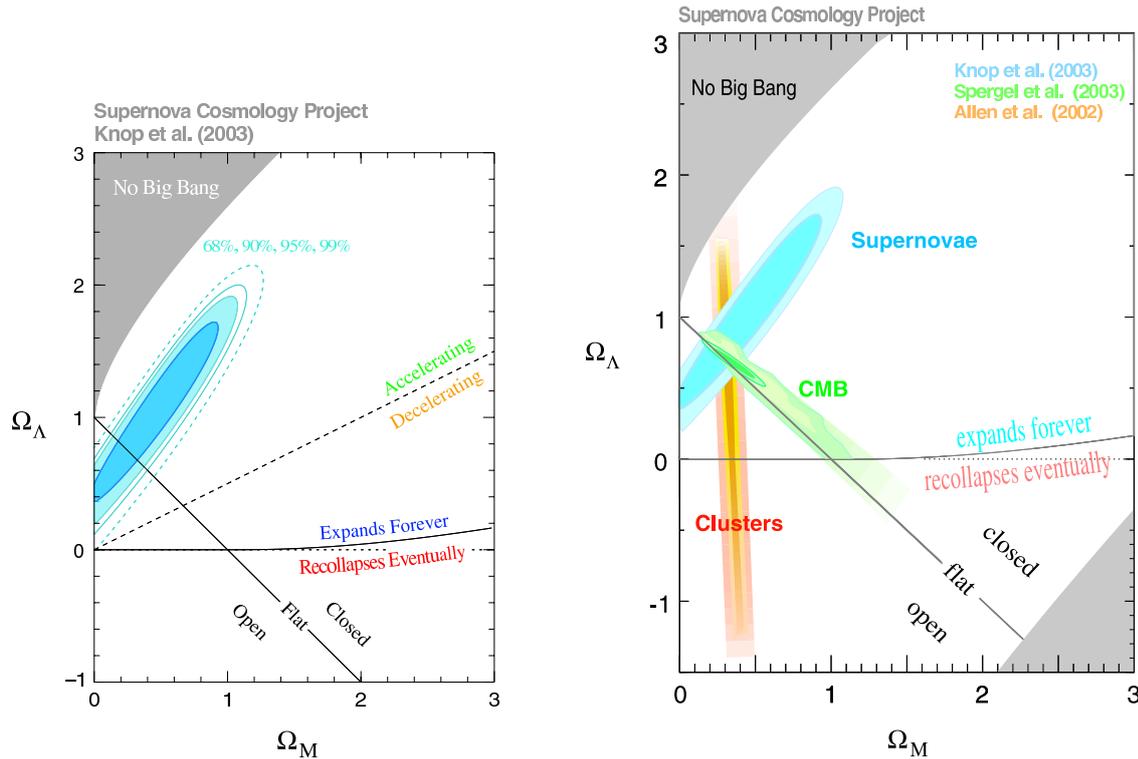


Figura 12.3: Valores más probables de Ω_M y Ω_Λ según los datos de las supernovas lejanas (izquierda) y superponiendo toda la información disponible (derecha) [Knop et al, ApJ 598 (2003) 102].

y todas apuntan a la siguiente conclusión (Fig. 12.3):

$$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04, \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04, \quad (12.13)$$

es decir, un *universo plano dominado por la constante cosmológica*.

Conviene finalmente remarcar que sólo cuando $\Lambda = 0$ se tiene que un universo cerrado ($k = +1$) se expande hasta un cierto momento en que empieza a colapsar, mientras que los universos abiertos ($k = -1$) y planos ($k = 0$) se expanden siempre (el universo plano es un caso límite). Véase Fig. 12.4. En cambio, si $\Lambda \neq 0$ entonces el valor de k no determina el destino del universo. En la Fig. 12.3 se indican las regiones correspondientes en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_M$.

12.3 La paradoja de Olbers

¿Por qué no es el cielo de noche tan uniformemente brillante como la superficie del Sol? Así debería ser si en el universo hubiera infinitas estrellas. En cada elemento de área del cielo habría una estrella. Ésta es la paradoja de Olbers. Se remonta a los tiempos de Kepler, a principios del siglo XVII, fue discutida por Halley y Cheseaux en el siglo XVIII, pero no fue popularizada como paradoja hasta que Olbers retomó la cuestión en el siglo XIX.

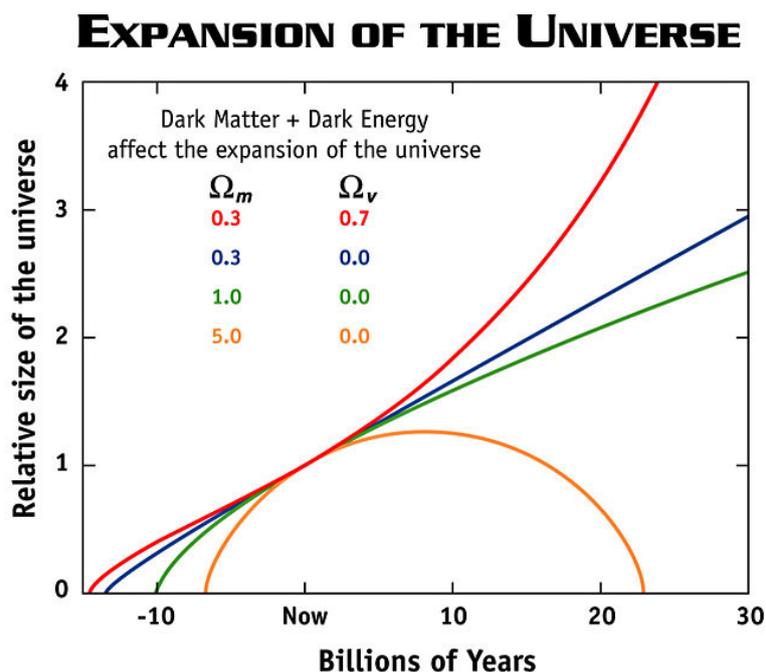


Figura 12.4: Evolución de los distintos tipos de universo, suponiendo $\Lambda = 0$.

En todo este tiempo se han propuesto una serie de posibles explicaciones. Las siguientes son las más relevantes:

1. Hay polvo que nos impide ver las estrellas más lejanas.
2. El universo tiene sólo un número finito de estrellas.
3. La distribución de las estrellas no es uniforme: algunas se esconden detrás de las otras, de modo que existen regiones oscuras, sin ninguna estrella en toda la línea de visión.
4. El universo se expande, de modo que la luz de las estrellas distantes está desplazada al rojo hasta oscurecerse.
5. El universo es joven, de modo que la luz de las estrellas más distantes no ha tenido tiempo de llegar hasta nosotros.

Discutamos estas potenciales soluciones:

1. Está simplemente mal. El polvo se calentaría reemitiendo la radiación. Además se podría atenuar la luz de las estrellas lejanas, pero habría que poner tanto polvo para conseguirlo con todas ellas, que también oscureceríamos la luz de nuestro propio Sol.
2. Puede ser técnicamente correcta. Pero, aunque el número fuera finito, es todavía suficientemente grande para iluminar el cielo, así que tampoco vale.
3. Podría ser correcta, aunque no lo sabemos a ciencia cierta. Si las estrellas se distribuyeran en forma fractal, formando estructuras a gran escala, podría haber regiones

del cielo vacías (oscuras). Esta posibilidad se está investigando actualmente con resultados positivos hasta escalas de unos pocos megaparsecs. Sin embargo, datos recientes de objetos aún más distantes parecen indicar que se recupera la homogeneidad e isotropía (el principio cosmológico).

4. Este efecto es seguro que contribuye en combinación con el siguiente.
5. Este efecto es más importante que el anterior, según cálculos que se han realizado. Vivimos dentro de una región de universo observable de radio igual a la edad del universo: la luz de objetos alejados de nosotros más de 15 mil millones de años no ha tenido tiempo de llegar hasta nosotros.

Nótese que estas dos últimas soluciones de la paradoja de Olbers son incompatibles con un universo estático y eterno.

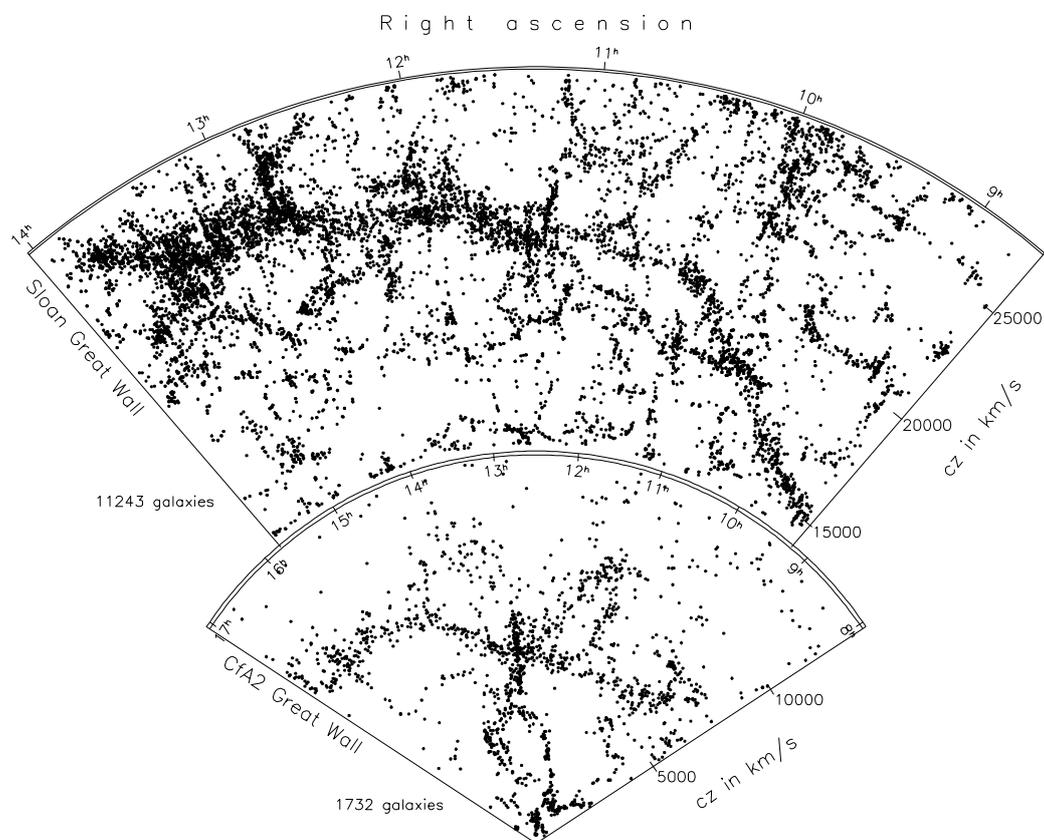


Figura 12.5: Mapa (parcial) del universo que muestra su estructura a gran escala. Se trata de dos porciones del cielo (coordenadas ecuatoriales) a distinta profundidad con un grosor de 12° (CfA2) y 4° (Sloan), respectivamente. Cada punto es una galaxia. Se aprecian enormes estructuras denominadas *dedos de dios* y dos *grandes murallas*. [Extraído de J.R. Gott et al., astro-ph/0310571].

Ejercicios propuestos

1.1 Supongamos que nos desplazamos en una barca remando a velocidad c respecto a un río cuya corriente tiene una velocidad v . Demuestra que nuestra velocidad v' respecto a un observador en tierra firme es:

a) $v' = c + v$, si remamos corriente abajo.

b) $v' = c - v$, si remamos en contra de la corriente.

c) $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, si remamos perpendicularmente a la corriente.

Nótese que, en la teoría del éter, c juega el papel de la velocidad de la luz respecto al éter, v es la velocidad del viento de éter respecto al observador y v' es la velocidad de luz según ese observador.

2.1 Utilizando los diagramas de Minkowski, ilustra la dilatación de los intervalos de tiempo y la contracción de las longitudes.

3.1 Un pistolero dispara simultáneamente sus dos revólveres, con las manos separadas 80 cm, contra un tren que pasa frente a él a una velocidad de $0.6c$.

a) ¿Cuál es la distancia entre los revólveres según los viajeros del tren?

b) ¿Cuál es la separación entre los agujeros de bala en los laterales del vagón?

Haz un diagrama espacio-tiempo y discute los resultados.

4.1 Suponiendo que los vuelos del experimento de Hafele y Keating fueron ecuatoriales, a unas velocidades medias respecto al suelo de 713 km/h hacia el este y 440 km/h hacia el oeste, y durante un tiempo de 41.2 y 48.6 horas respectivamente, comprueba que la relatividad especial predice que:

a) Los relojes que viajan hacia el este se retrasan 184 ns.

b) Los relojes que viajan hacia el oeste se adelantan 96 ns.

Ayuda: Es conveniente usar la aproximación $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$ si $x \ll 1$. $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$.

5.1 Demuestra que la longitud aparente de un objeto al que nos aproximamos (longitudinalmente) con velocidad $\beta = v/c$ es

$$L_{\text{aparente}} = \gamma(1 + \beta)L_0$$

donde L_0 es la longitud propia del objeto y γ es el correspondiente factor de Lorentz. ¿Y si nos alejamos del objeto?

Aplicando este resultado al ejemplo de San Jorge y el dragón:

- a) ¿Cuáles son las longitudes real y aparente de la lanza y el foso para San Jorge?
- b) ¿Cuáles son las longitudes real y aparente de la lanza y el foso para el dragón?

- 6.1 ¿A qué velocidad hay que conducir hacia un semáforo para que la luz roja ($\lambda = 650 \text{ nm}$) se vea verde ($\lambda = 525 \text{ nm}$)?
- 6.2 Utilizando el efecto Doppler, encuentra la frecuencia con que llegan a los gemelos Apolo y Diana las felicitaciones de Navidad (número de felicitaciones al año) y comprueba que coincide con el resultado que encontramos en el Tema 6.
- 7.1 Deduce las expresiones que relacionan las velocidades y las aceleraciones que miden dos observadores inerciales cualesquiera (7.20) – (7.25).
- 10.1 Completa^f las predicciones del experimento de Hafele y Keating (tabla siguiente), sabiendo que los aviones en ruta hacia el este volaron durante 41.2 h a una altura media de 8900 m mientras que los que iban en ruta hacia el oeste volaron durante 48.6 h a una altura media de 9400 m. El cálculo real exige conocer las hojas de ruta y las velocidades de los aviones en diferentes tramos en los que se subdividieron los vuelos [Hafele & Keating, Science 177 (1972) 166].

| Diferencia de tiempos | Hacia el este | Hacia el oeste |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| Dilatación cinemática | $-184 \pm 18 \text{ ns}$ | $96 \pm 10 \text{ ns}$ |
| Dilatación gravitatoria | $144 \pm 14 \text{ ns}$ | $179 \pm 18 \text{ ns}$ |
| Efecto total | $-40 \pm 23 \text{ ns}$ | $275 \pm 21 \text{ ns}$ |
| Efecto observado | $-59 \pm 10 \text{ ns}$ | $273 \pm 21 \text{ ns}$ |

- 10.2 Los satélites de la red GPS se encuentran orbitando alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,000 \text{ km}$, y por tanto a $v = 14\,000 \text{ km/h}$. Compara tu reloj con otro situado en un satélite GPS. (i) ¿Qué efectos influyen en el ritmo de ambos relojes y qué consecuencias tienen? (ii) ¿Cuánto atrasan o adelantan los relojes de los satélites GPS respecto al tuyo cada día debido a esos efectos? (iii) ¿Es relevante el movimiento de rotación de la Tierra? [Datos: $g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$, $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_\oplus = 6\,370 \text{ km}$.]

^fLos efectos de dilatación cinemática fueron estimados en el Ejercicio 4.1.

Bibliografía

Por el padre de la teoría:

- [1] A. Einstein,
[Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, 1917]
Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General,
Alianza Editorial, 1984.
- [2] A. Einstein,
[The Meaning of Relativity, 1922]
El Significado de la Relatividad,
Espasa Calpe, 1971.
- [3] A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski
The principle of relativity
(*A collection of original papers on the special and general theory of relativity*),
Dover, 1952.

Nivel básico, divulgación:

- [4] D.E. Mook y T. Vargish,
[Inside Relativity, 1987]
La Relatividad: espacio, tiempo y movimiento,
Mc Graw-Hill, 1993.
- [5] B. Greene,
[The Fabric of the Cosmos, 2004]
El Tejido del Cosmos,
Editorial Crítica, 2006.
- [6] M. Gardner,
[The Relativity Explosion, 1976]
La explosión de la Relatividad,
Salvat, 1986.
- [7] B. Russell,
[ABC of Relativity, 1925]
El ABC de la Relatividad,
Ariel, 1984.

Nivel medio:

- [8] A.P. French,
[Special Relativity, 1968]
Relatividad Especial,
Editorial Reverté, 1991.
- [9] R. d'Inverno,
Introducing Einstein's Relativity,
Clarendon Press, 1992.

Nivel avanzado:

- [10] B.F. Schutz,
A first course in general relativity,
Cambridge University Press, 1985.
- [11] S. Weinberg,
Gravitation and Cosmology,
Wiley, 1972.
- [12] B. Janssen,
Relatividad General,
Apuntes del [curso](#) de Bert en la Universidad de Granada.

Web:

- [13] Relativity on the World Wide Web,
<http://math.ucr.edu/home/baez/relativity.html>
- [14] Through Einstein's Eyes,
<http://www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE/site/tee/home.html>
Véase también artículo: <http://www.anu.edu.au/Physics/Searle/paper2.pdf>
- [15] Web de este curso,
<http://www.ugr.es/~jillana/relatividad.php>