

## **7. Introducción a las correcciones radiativas**

## Correcciones cuánticas: *Loops*

- En esta sección veremos que el desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento, que hemos introducido en el tema anterior, es también un desarrollo en potencias de  $\hbar$ , es decir, en efectos cuánticos.<sup>a</sup>
- ▷ Para comprobarlo, reinsertaremos las constantes  $\hbar$ , manteniendo aún un sistema de unidades en el que  $c = 1$ . En este sistema longitudes y tiempos tienen las mismas dimensiones y lo mismo ocurre con energías y momentos. Sin embargo, longitudes y energías no tienen dimensiones inversas, lo que sí ocurre en el sistema de unidades en el que  $\hbar = 1$ . Recordemos que

$$\hbar \approx 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \quad (1)$$

así que  $\hbar$  tiene dimensiones de energía (o momento) por tiempo (o longitud).

---

<sup>a</sup>Históricamente se ha llamado correcciones radiativas a las correcciones cuánticas, porque se calcularon en primer lugar para sistemas atómicos en procesos donde se emite o se absorbe radiación electromagnética.

## Correcciones cuánticas: *Loops*

- Hay dos fuentes principales de potencias de  $\hbar$  en el proceso de cuantización:
- ▷ La primera está en las relaciones de conmutación (o anticonmutación). Por ejemplo, en el caso escalar:

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \Rightarrow \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\hbar\delta^3(\vec{p} - \vec{q}) . \quad (2)$$

Repitiendo los pasos necesarios para calcular el propagador de Feynman obtenemos entonces que **cada propagador incluye una potencia de  $\hbar$** :

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} , \quad \text{con } \varepsilon \rightarrow 0^+ . \quad (3)$$

- ▷ En segundo lugar tenemos que introducir explícitamente **una potencia de  $\hbar$  por cada vértice de interacción**. La razón es que el producto  $Ht$  (acción), donde  $H$  es un hamiltoniano y  $t$  el tiempo, tiene las dimensiones de  $\hbar$  y por tanto en el operador evolución aparece con un factor  $1/\hbar$  para que el argumento de la exponencial sea adimensional.

## Correcciones cuánticas: *Loops*

▷ Esto afecta a la teoría de perturbaciones. Por ejemplo, el campo en la imagen de interacción se define

$$\phi_I(t, \vec{x}) \equiv e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (4)$$

y así sucesivamente. Siendo cuidadosos con los factores de  $\hbar$  obtenemos que la teoría de perturbaciones toma la forma final

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) / \hbar \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) / \hbar \right] \right\} | 0 \rangle}. \quad (5)$$

Al desarrollar en serie las exponenciales obtendremos que por cada vértice de nuestra teoría de perturbaciones tenemos que añadir una potencia de  $1/\hbar$ .

## Correcciones cuánticas: *Loops*

- Con estas dos reglas, cada propagador introduce una potencia de  $\hbar$  y cada vértice una de  $\hbar^{-1}$ , podemos discutir la **relación entre el número de *loops* y el de potencias de  $\hbar$  en un diagrama de Feynman conexo amputado arbitrario.**<sup>a</sup>
- ▷ Podemos definir el número de *loops* como el número  $L$  de cuadrimomentos no fijados por la regla de conservación del momento sobre los que tenemos que integrar para calcular el resultado de la amplitud correspondiente. Así, en un diagrama con  $I$  líneas internas y  $V$  vértices tenemos

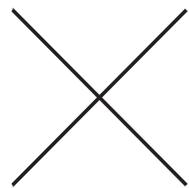
$$L = I - (V - 1) = I - V + 1 . \quad (6)$$

---

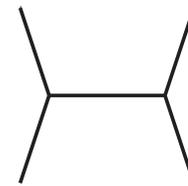
<sup>a</sup>Aunque hayamos mostrado el ejemplo explícito del caso escalar, la misma regla aplica al caso de campos de espines arbitrarios.

## Correcciones cuánticas: *Loops*

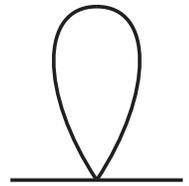
En efecto, tenemos  $I$  cuádrimomentos circulando por las líneas internas, sobre los que imponemos  $V - 1$  restricciones (una por cada vértice, excepto la global que corresponde a conservación del cuádrimomento total). Veamos algunos ejemplos:



$$L = 0 - 1 + 1 = 0$$



$$L = 1 - 2 + 1 = 0$$

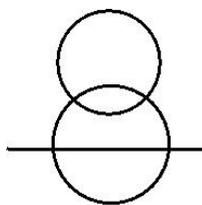


$$L = 1 - 1 + 1 = 1$$

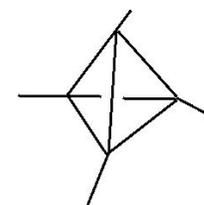


$$L = 2 - 2 + 1 = 1$$

(7)



$$L = 7 - 4 + 1 = 4$$



$$L = 6 - 4 + 1 = 3$$

Nótese que normalmente  $L$  coincide con el número de lazos en el diagrama de Feynman. Pero no siempre, como se ve en el último ejemplo, en el que hay 4 lazos pero  $L = 3$ .

## Correcciones cuánticas: *Loops*

- Aplicando ahora que cada propagador conlleva una potencia de  $\hbar$  y cada vértice una de  $\hbar^{-1}$  vemos que un diagrama conexo amputado con  $L$  *loops* es de orden  $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$ . Por tanto, **el desarrollo en *loops* corresponde a un desarrollo en potencias de  $\hbar$ .**
- ▷ Puede sorprender sin embargo que el primer término del desarrollo perturbativo sea proporcional  $\hbar^{-1}$ , pero esto se debe a que hemos normalizado la acción dividiendo por  $\hbar$  por argumentos dimensionales, de manera que debemos descontar ese factor y concluir que realmente la contribución de cero *loops* (orden  $\hbar^0$ ) corresponde al límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ).

## Correcciones cuánticas: *Loops*

- Otro comentario importante es que en teorías con un único acoplamiento, **el desarrollo perturbativo en el acoplamiento y el desarrollo en *loops* coinciden**, si fijamos el número de patas externas. La razón es que en ese caso existe una relación entre  $L$  y  $V$ . Por ejemplo, en la teoría  $\lambda\phi^4$  cada vértice tiene cuatro patas, así que

$$4V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V - E/2 + 1, \quad (8)$$

siendo  $E$  el número de patas externas e  $I$  el de líneas internas. Esta relación viene de que  $4V$  es el número total de líneas que confluyen en vértices, pero las que corresponden a líneas internas cuentan dos veces. Es fácil comprobar que esta relación se cumple en todos los ejemplos de (7), excepto para el primero de la columna de la derecha, en el que los vértices tienen tres patas, pues corresponden a una teoría  $\lambda\phi^3$  y la relación es entonces

$$3V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V/2 - E/2 + 1. \quad (9)$$

## Divergencias ultravioletas

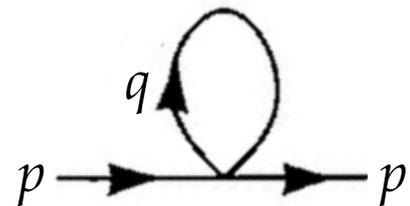
- El hecho de que los cálculos a uno o más *loops* involucren una **integración sobre momentos, cuyos módulos van de cero hasta infinito**, conduce a una intrigante propiedad de la teoría cuántica de campos: la posible aparición de **divergencias** en los cálculos perturbativos.

[El origen y naturaleza de estas divergencias es diverso y su estudio da lugar a algunos de los aspectos más interesantes de la teoría cuántica de campos, como el grupo de renormalización.]

- ▷ En este curso nos vamos a limitar a hacer una breve introducción a algunos de estos fenómenos, poniendo énfasis en la realización de cálculos explícitos.

## Divergencias ultravioletas

- Veamos en un ejemplo concreto cómo aparecen algunas de estas divergencias. Tomemos de nuevo la teoría  $\lambda\phi^4$  y calculemos el siguiente diagrama amputado:



$$-iB = \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2}. \quad (10)$$

Esta integral puede abordarse más fácilmente en el espacio Euclídeo, haciendo el cambio de variables  $q^0 = iq_E^0$  (rotación de Wick), manteniendo  $\vec{q} = \vec{q}_E$  y por tanto sustituyendo  $q^2 = -q_E^2$ . De esta forma la integral factoriza en el producto de una integral angular en cuatro dimensiones por una integral sobre la coordenada radial  $q_E$  entre cero e infinito (estudiaremos en detalle este procedimiento en un número arbitrario de dimensiones más adelante):

$$B = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E q_E^3 \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2} \quad (11)$$

## Divergencias ultravioletas

- ▷ La integral resultante es divergente. Para poder dar sentido al resultado **regularizaremos** la integral para aislar la divergencia. En esta ocasión usaremos como **regulador** un *cut-off* en momentos, es decir, integraremos hasta un valor finito  $\Lambda$  que al final haremos tender a infinito. Haciendo esto tenemos

$$B = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left( \Lambda^2 + m^2 \ln \frac{m^2}{m^2 + \Lambda^2} \right). \quad (12)$$

- ▷ Vemos por tanto que este diagrama presenta una **divergencia ultravioleta**, es decir, en el límite de momento infinito. En ocasiones un diagrama puede también tener divergencias infrarrojas (en el límite de momento cero).
- ▷ En el resto de este tema veremos cómo clasificar, regularizar e interpretar las divergencias ultravioletas que aparecen en cálculos a nivel de uno o más *loops* en teoría cuántica de campos.

## Divergencias ultravioletas

- El comportamiento ultravioleta de un diagrama se puede caracterizar por su **grado superficial de divergencia**,  $D$ , que se define como la diferencia entre el número de potencias del momento de integración en el numerador menos las del denominador.
- ▷ En teorías en las que los vértices no dependen del momento, el grado superficial de divergencia depende del número de *loops* (potencias positivas del momento) y del número y tipo de propagadores (potencias negativas del momento, simples para fermiones, dobles para bosones).
- ▷ Así por ejemplo tenemos

$$\lambda\phi^n \quad (n \geq 3) \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I \quad (13)$$

$$\text{QED} \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I_\gamma - I_f \quad (14)$$

donde  $I_{\gamma,f}$  se refiere al número de líneas internas fotónicas y fermiónicas, respectivamente.

## Divergencias ultravioletas

- ▷ En general, un diagrama divergerá logarítmicamente, linealmente, cuadráticamente y así sucesivamente para  $D \geq 0$ , aunque esto es **condición necesaria pero no suficiente**, pues hay excepciones a esta regla.
- ▷ Antes, reescribamos  $D$  de una manera más útil en términos del número de patas externas y vértices.
- ▷ La expresión depende de la teoría en cuestión. Estudiemos cada caso por separado.

## Divergencias ultravioletas

$$\lambda\phi^n$$

- En este caso (13) conduce a

$$D = 4L - 2I = (n - 4)V - E + 4, \quad (15)$$

donde hemos usado las relaciones

$$L = I - V + 1, \quad nV = E + 2I. \quad (16)$$

Vemos que cuanto mayor es el número de patas externas, a igual número de vértices, menor es  $D$ .

- ▷ Tenemos pues un número finito de posibles diagramas divergentes ( $D \geq 0$ ), llamados **divergencias primitivas**.
- ▷ Veamos cuáles son en el caso de  $\lambda\phi^4$  ( $n = 4$ ), es decir

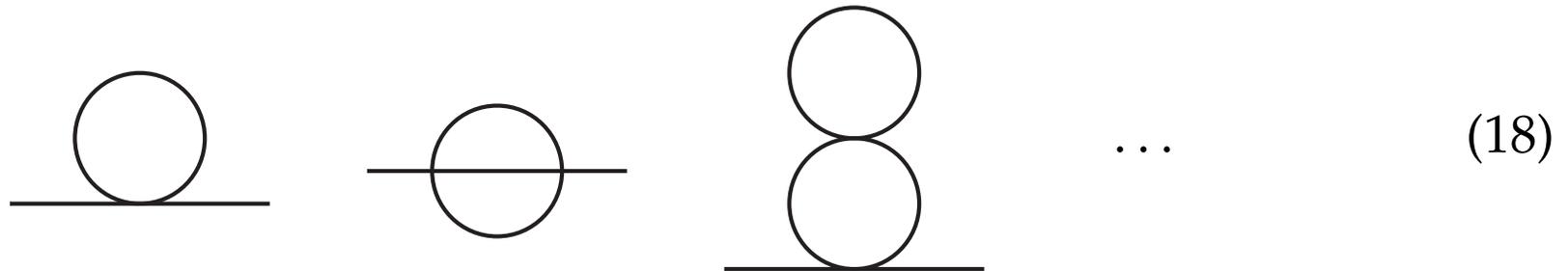
$$D = 4 - E \geq 0. \quad (17)$$

Nótese que en este caso  $E$  es siempre par.

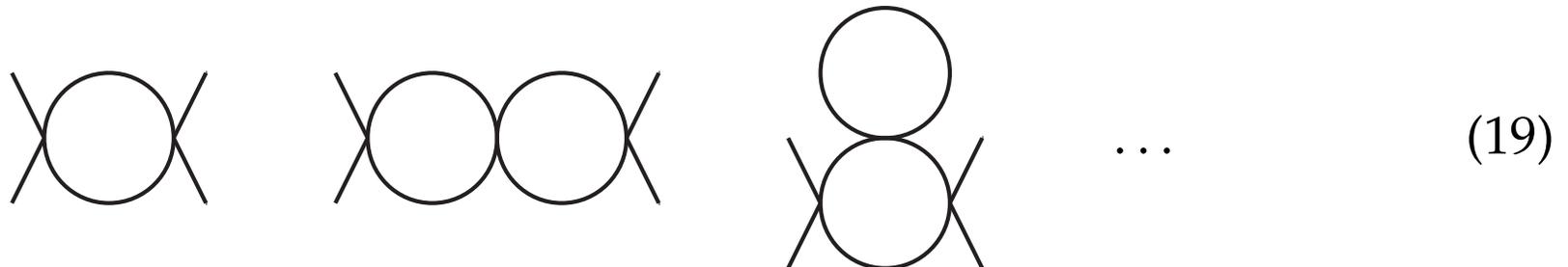
# Divergencias ultravioletas

$\lambda\phi^n$

- $E = 0$ : Los diagramas vacío-vacío. Son cuárticamente divergentes ( $\propto \Lambda^4$ ) y contribuyen a la **energía del vacío**, pero no son relevantes para hallar las amplitudes de scattering pues se cancelan en la fórmula LSZ.
- $E = 2$ : Las funciones de Green de dos puntos. Son cuadráticamente divergentes ( $\propto \Lambda^2$ ) y contribuyen a la **autoenergía del campo**:



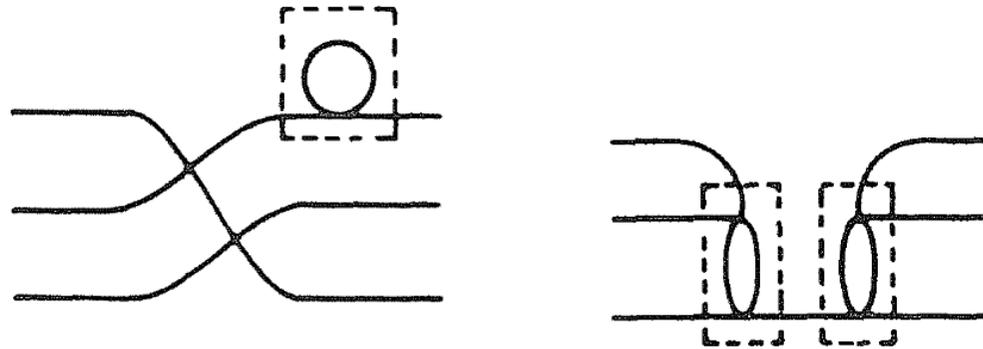
- $E = 4$ : Las funciones de Green de cuatro puntos. Son logarítmicamente divergentes ( $\propto \ln \Lambda$ ) y contribuyen a la **corrección al vértice**:



# Divergencias ultravioletas

$$\lambda\phi^n$$

- Podría pensarse que diagramas con  $D < 0$ , es decir  $E \geq 6$  son finitos, pero esto solamente es cierto si no contienen subdiagramas divergentes (con  $E = 2$  o  $E = 4$ ). Por ejemplo, los siguientes diagramas con  $D = -2$  ( $E = 6$ ) son divergentes:



(20)

- En realidad, para que un diagrama sea finito, su grado superficial de divergencia  $D$  y el de todos sus subdiagramas debe ser negativo ([teorema de Weinberg](#)).

## Divergencias ultravioletas

$$\lambda\phi^n$$

- Vemos por tanto que en la teoría  $\lambda\phi^4$  hay un **número finito de divergencias primitivas** (dos en este caso) que afectan a la predicción de nuestros observables: la autoenergía del campo y la corrección al vértice.
- ▷ Cuando esto ocurre la teoría es **renormalizable** que, como veremos, quiere decir que podemos reabsorber todos los infinitos que aparezcan con un número finito de medidas, estando el resto de predicciones de la teoría bien definidas. Este proceso de reabsorber infinitos se denomina **renormalización** y lo discutiremos brevemente más adelante, en el caso de la QED.
- La teoría  $\lambda\phi^3$  también tiene un número finito de divergencias primitivas, pues en este caso  $D = 4 - E - V$ . Al aumentar el número de patas externas, independientemente del número de vértices, llegaremos a  $D < 0$ .
- ▷ Pero, además, en este caso ocurre que diagramas con el mismo número de patas externas son cada vez más convergentes haciéndose finitos a partir de un número determinado de *loops*. Este tipo de teorías se llaman **super-renormalizables**.

## Divergencias ultravioletas

$$\lambda\phi^n$$

- Teorías  $\lambda\phi^n$  con  $n > 4$ , por el contrario, son **no renormalizables** puesto que, cualquiera que sea el número de patas externas de un diagrama,  $D$  siempre será positivo para un número suficientemente alto de vértices. Esto quiere decir que hay un número infinito de divergencias primitivas, que requerirían un número infinito de medidas para ser reabsorbidas.
  - El hecho de que  $\lambda\phi^n$  con  $n \leq 4$  sean teorías renormalizables es un ejemplo del **criterio de renormalizabilidad** que establece que un lagrangiano de interacción cuyos coeficientes (constantes de acoplamiento) tengan dimensiones de masa elevada a una potencia positiva o nula (adimensionales) es renormalizable.
- ▷ En nuestro ejemplo, como  $[\mathcal{L}] = M^4$  y  $[\phi] = M$ , las constantes tienen dimensiones  $[\lambda] = M^{4-n}$ .

## Divergencias ultravioletas

$$\lambda\phi^n$$

- ▷ Podemos entender el criterio de renormalizabilidad del siguiente modo: si cada vértice de interacción introduce un acoplamiento con dimensiones de masa negativas entonces, por argumentos dimensionales, éste debe compensarse con algún otro parámetro con dimensiones positivas de masa (por ejemplo el *cut-off*  $\Lambda$ ) si no hay cancelaciones debidas a alguna simetría. En tal caso habrá un número indeterminado de funciones de Green que serán divergentes cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$  y por tanto no podremos reabsorber todos los infinitos en un número finito de medidas.
- ▷ Hemos visto ejemplos (20) en los que  $D$  puede ser negativo y aún así el diagrama es divergente. Pero también puede ocurrir lo opuesto: diagramas con grado superficial de divergencia positivo, y por tanto a priori divergentes, que den un resultado finito. Esto es debido a la presencia de simetrías que reducen el grado de divergencia de algunos diagramas. Esto es lo que ocurre en QED, como veremos a continuación.

- En este caso (14) conduce a

$$D = 4L - 2I_\gamma - I_f = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_f \quad (21)$$

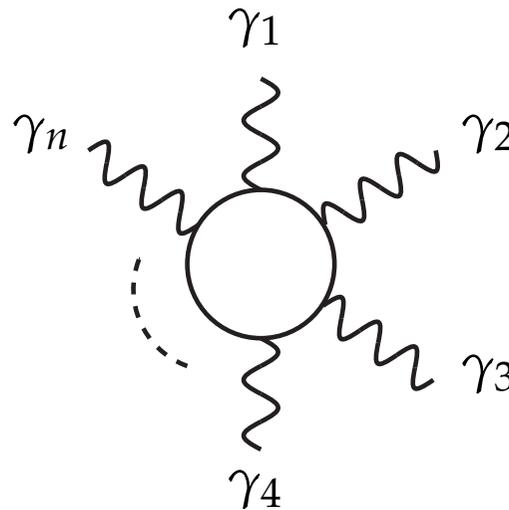
donde hemos usado las relaciones

$$L = I - V + 1 = I_\gamma + I_f - V + 1, \quad V = E_\gamma + 2I_\gamma, \quad 2V = E_f + 2I_f. \quad (22)$$

Vemos pues que en QED los diagramas con divergencias primitivas son potencialmente aquellos para los que  $D \geq 0$ , es decir

$$E_\gamma + \frac{3}{2}E_f \leq 4. \quad (23)$$

- Antes de discutir todas las posibilidades conviene demostrar el **Teorema de Furry** que establece que funciones de Green sin líneas externas fermiónicas ( $E_f = 0$ ) y con un número impar de líneas externas fotónicas ( $E_\gamma = \text{impar}$ ) son cero a todo orden en teoría de perturbaciones debido a la **conservación de la conjugación de carga** de la QED:



$$= 0, \quad n \text{ impar} \quad (24)$$

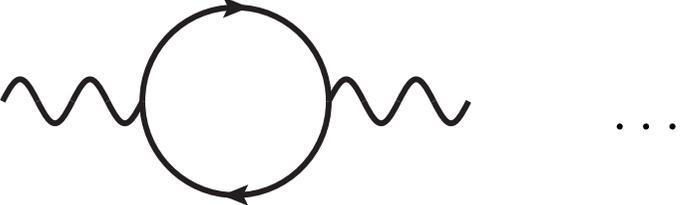
▷ En efecto:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | (CA_{\mu_1}(x_1)C) \cdots (CA_{\mu_n}(x_n)C)C e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} C | 0 \rangle \\
 &= (-1)^n \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle , \tag{25}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado  $C^2 = 1$ ,  $C | 0 \rangle = | 0 \rangle$ ,  $CA_{\mu}C = -A_{\mu}$  y  $C\mathcal{H}_{\text{QED}}C = \mathcal{H}_{\text{QED}}$ . Para  $n$  impar estas funciones de Green coinciden con su opuesta y por tanto deben anularse.

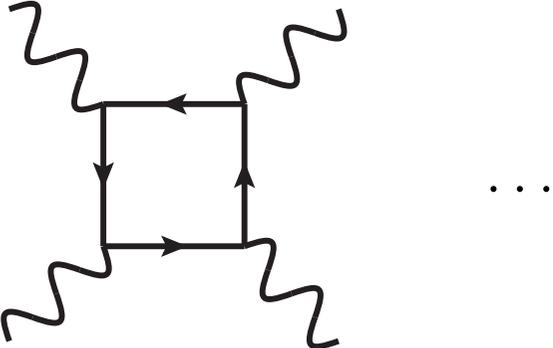
▷ Una vez descartadas estas funciones de Green, clasifiquemos el resto que cumplen (23), es decir  $D = 4 - E_{\gamma} - \frac{3}{2}E_f \geq 0$ :

- $E_f = 0$ 
  - $E_\gamma = 0$ : **Energía del vacío**. Cuárticamente divergente pero irrelevante para procesos de scattering.
  - $E_\gamma = 2$ : **Autoenergía del fotón**. A priori cuadráticamente divergente, aunque la simetría gauge hace que la divergencia sea en realidad logarítmica.



(26)

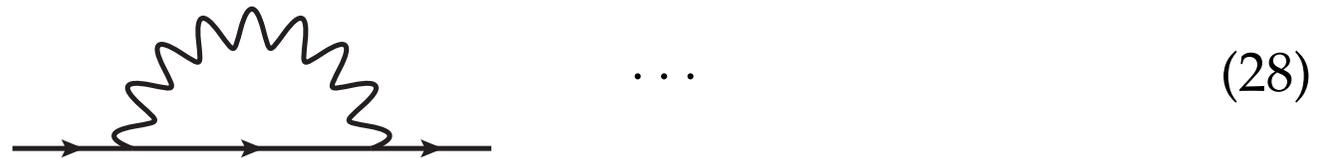
- $E_\gamma = 4$ : **Light by light scattering**. A priori logarítmicamente divergente aunque de nuevo la simetría gauge la protege haciéndola **finita**.



(27)

- $E_f = 2$

- $E_\gamma = 0$ : **Autoenergía del fermión**. A priori linealmente divergente, aunque en este caso la simetría quiral reduce la divergencia a logarítmica.



- $E_\gamma = 1$ : **Corrección al vértice**. Divergencia logarítmica.



Las divergencias primitivas en QED son por tanto la autoenergía del fotón, la autoenergía del fermión y la corrección al vértice. Sus contribuciones a un *loop* se muestran en (26), (28) y (29), respectivamente.

# Regularización dimensional

- Hemos anunciado previamente que en teoría cuántica de campos se pueden hacer predicciones precisas y sin ambigüedades a pesar de la aparición de infinitos en los cálculos a uno o más *loops*.
- ▷ El procedimiento, denominado **renormalización**, consiste en absorber los infinitos en un número finito de medidas experimentales de manera que todos los demás observables serán finitos.
- ▷ Pero antes tenemos que **regularizar** los infinitos para poder manipularlos.
  - En la sección anterior usamos un regulador muy sencillo, un **cut-off** en el momento del *loop*, pero este regulador no resulta óptimo. La razón es que viola explícitamente algunas de las simetrías de la teoría que son importantes a la hora de implementar el proceso de renormalización. En particular, en (12) se viola la invariancia Lorentz.
  - En esta sección estudiaremos, mediante el ejemplo concreto de la autoenergía del electrón, un tipo de regularización que sí mantiene todas las simetrías relevantes, incluyendo las invariancias Lorentz y gauge.

## Regularización dimensional

- El método que emplearemos se conoce como **regularización dimensional** y consiste en asumir que en lugar de 4 dimensiones espacio-temporales trabajamos en  $d \equiv 4 - \epsilon$ .<sup>a</sup>
- ▷ Eligiendo el valor de  $\epsilon$  adecuado cualquier diagrama se puede hacer finito. Al final del cálculo, y después del proceso de renormalización, tomaremos el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  para eliminar el regulador.

---

<sup>a</sup>No confundir este  $\epsilon$  con el  $\epsilon \rightarrow 0^+$  de la prescripción de Feynman para los propagadores, que en adelante se sobreentiende y no escribiremos.



$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \text{Diagrama} + \text{Diagrama (1PI)} + \text{Diagrama (1PI)} + \text{Diagrama (1PI)} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} [-i\Sigma(\not{p})] \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \left[ 1 + \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} + \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}} = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}, \tag{31}
 \end{aligned}$$

donde los diagramas 1PI amputados son

$$\text{Diagrama (1PI)} = -i\Sigma(\not{p}) \tag{32}$$

y

$$\text{Diagrama} = \tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} \quad (\text{propagador libre}). \tag{33}$$

- Veamos que, como ocurre con la autoenergía  $M^2(p)$  del campo escalar, la **autenergía del electrón**  $\Sigma(\not{p})$  contribuye a la masa física ( $m$ ) y a la renormalización de la función de onda del electrón ( $Z_\psi$ ):

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (34)$$

y por tanto, cerca de  $\not{p} = m$ ,

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) = \not{p} - m_0 - \Sigma(m) - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} (\not{p} - m) = (\not{p} - m) \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right). \quad (35)$$

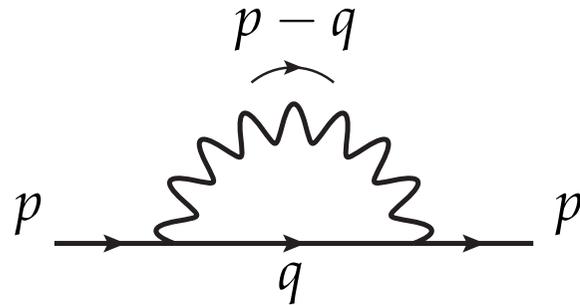
Así que

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - m} + \text{regular cerca de } \not{p} = m \quad (36)$$

de donde

$$m = m_0 + \Sigma(m), \quad Z_\psi = \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right)^{-1}. \quad (37)$$





$$-i\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie)\gamma^\mu \frac{i(\not{q} + m_0)}{q^2 - m_0^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p - q)^2} (-ie)\gamma^\nu . \quad (39)$$

Como hemos dicho esta integral es divergente y para regularizarla la hallaremos en  $d = 4 - \epsilon$  dimensiones:

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (\not{q} + m_0) \gamma_\mu}{(q^2 - m_0^2)(p - q)^2} , \quad (40)$$

donde hemos introducido un parámetro  $\mu$  con dimensiones de masa, para que  $\Sigma$  mantenga las dimensiones correctas independientemente del valor de  $d$ . Este parámetro no es físico, lo hemos introducido por consistencia en el proceso de regularización y no afectará a ningún observable físico, aunque puede aparecer en cálculos intermedios de magnitudes no observables.

- A continuación describiremos, usando este ejemplo como ilustración, algunas de las técnicas estándar en cálculos a un *loop*.
1. En primer lugar necesitamos extender las reglas de la **Diracología** a  $d$  dimensiones. Para ello hay que notar que los índices espacio-temporales recorren las  $d$  dimensiones mientras que las matrices de Dirac siguen siendo matrices  $4 \times 4$  (espacio espinorial). Se cumplen por tanto las siguientes relaciones:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = d, \quad (41)$$

que conducen a las identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \mathbf{1}_{4 \times 4} = (4 - \epsilon) \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (42)$$

$$\gamma^\mu \not{d} \gamma_\mu = -\not{d} \gamma^\mu \gamma_\mu + 2\not{d} = -(d - 2)\not{d} = -(2 - \epsilon)\not{d}. \quad (43)$$

2. Otra técnica consiste en la introducción de **parámetros de Feynman**, que nos permiten agrupar el producto de propagadores en una expresión que manipularemos después de forma sencilla. La forma general para  $n$  propagadores se basa en la siguiente igualdad (fácilmente demostrable):

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (44)$$

En nuestro cálculo hay dos factores en el denominador (dos propagadores),

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[x A_1 + (1-x) A_2]^2} \quad (45)$$

que podemos identificar como  $A_2 = q^2 - m_0^2$  y  $A_1 = (p - q)^2$ , así que

$$\frac{1}{(q^2 - m_0^2)(p - q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + x(p^2 - 2pq) - (1-x)m_0^2]^2}. \quad (46)$$

3. Lo interesante de esta parametrización es que ahora podemos hacer un cambio de variable para **completar un cuadrado perfecto** en el denominador, **desplazando el momento de integración**. En nuestro caso, si introducimos un nuevo momento

$$\ell \equiv q - xp \quad (47)$$

en (40), usamos las identidades (42) y (43), e introducimos el parámetro de Feynman de (46) tenemos

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{-(2-\epsilon)(\ell + xp) + (4-\epsilon)m_0}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (48)$$

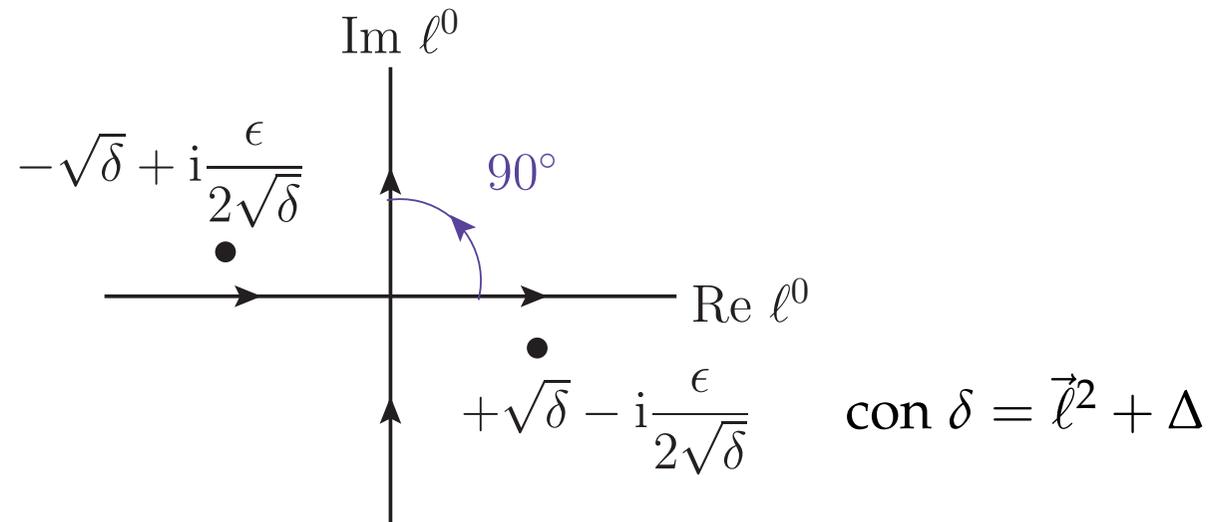
donde

$$\Delta \equiv -x(1-x)p^2 + (1-x)m_0^2. \quad (49)$$

Una cuestión muy importante es que el cambio de variable realizado no es más que una traslación, que no introduce ningún factor jacobiano. Sin embargo, solo tenemos garantizado que la integral no cambia bajo esa traslación de la variable de integración si la integral es finita, lo cual se cumple gracias a que la hemos regularizado antes de hacer estas manipulaciones.

4. Para integrar (48) realizamos lo que se conoce como **rotación de Wick**, que consiste en hacer un nuevo cambio de variable:

$$l^0 = i\ell_E^0, \quad \vec{l} = \vec{\ell}_E \Rightarrow l^2 = (\ell^0)^2 - \vec{\ell}^2 = -(\ell_E^0)^2 - \vec{\ell}_E^2 = -\ell_E^2. \quad (50)$$



( $\Delta$  es una función de  $x$  definida positiva en la región de momentos de interés, como pronto veremos.)

- ▷ El subíndice  $E$  nos recuerda que con la rotación de Wick pasamos del espacio de Minkowski al espacio Euclídeo, en el que el módulo al cuadrado de un cuadrivector es la suma de los cuadrados de todas sus componentes, sin signo relativo entre la componente temporal y las espaciales.
- ▷ De nuevo es necesario hacer un comentario importante. El cambio de variable que genera la rotación de Wick puede resultar extraño a primera vista, pues define momentos complejos. Sin embargo lo único que estamos haciendo es girar el contorno de integración originalmente sobre el eje  $\ell^0$  real, rotándolo  $90^\circ$  en el sentido opuesto a las agujas del reloj. El teorema de Cauchy garantiza que la integral no varía pues en este giro los contornos no cruzan ninguno de los polos definidos por la prescripción  $i\epsilon$  de Feynman.

5. Ahora que la integral se calcula en el espacio Euclídeo podemos descomponerla en una parte radial y otra angular en  $d$  dimensiones. Supongamos que el exponente del denominador es  $n$  en lugar de 2, para resolver un caso más general. Entonces

$$\int d^d \ell_E \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \int d\Omega_d \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (51)$$

donde  $d\Omega_d$  es el elemento de ángulo sólido en  $d$  dimensiones. En efecto:

6. A partir de la integral de una gaussiana:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp \left\{ - \sum_i^d x_i^2 \right\} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\
 &= \int d\Omega_d \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t} = \int d\Omega_d \frac{1}{2} \Gamma(d/2)
 \end{aligned} \tag{52}$$

donde hemos introducido la función **Gamma de Euler**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t} . \tag{53}$$

Por tanto,

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)} . \tag{54}$$

7. En cuanto a la parte radial:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(t + \Delta)^n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \int_0^1 dz z^{n-\frac{d}{2}-1} (1-z)^{\frac{d}{2}-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(n)}
 \end{aligned} \tag{55}$$

donde se ha hecho el cambio  $z = \Delta/(t + \Delta)$  y hemos introducido la función [Beta de Euler](#):

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dz z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \tag{56}$$

▷ Conviene conocer algunas **propiedades de la Gamma de Euler**:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \quad (57)$$

$\Gamma(x)$  tiene polos simples en  $x = 0, -1, -2, \dots$ . Desarrollando en serie en torno a los polos,

$$x = 0; \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x), \quad (58)$$

$$x = -1; \quad \Gamma(x) = -\frac{1}{(x+1)} + \gamma - 1 + \dots + \mathcal{O}(x+1), \quad (59)$$

donde  $\gamma = 0.5772\dots$  es la constante de Euler-Mascheroni. En particular, en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $d \rightarrow 4$ ) tenemos

$$\Gamma(2 - d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (60)$$

$$\Gamma(d/2) = \Gamma(2) = 1. \quad (61)$$

- Ya podemos calcular la integral (48), haciendo la rotación de Wick (50) y usando el resultado (51) para  $n = 2$ :

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\epsilon/2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon/2) [-(2-\epsilon)x\not{p} + (4-\epsilon)m_0] \Delta^{-\epsilon/2}, \quad (62)$$

donde hemos utilizado que la integral sobre  $\not{\ell}$  es cero por ser el integrando impar y el dominio de integración simétrico.

- ▷ Ahora, además de desarrollar en serie la función Gamma, debemos también desarrollar las potencias cuyo exponente es proporcional a  $\epsilon$

$$(4\pi)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (63)$$

$$\left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (64)$$

- Poniéndolo todo junto obtenemos finalmente

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ x\not{p} \left[ -2 \left( \Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) + 2 \right] + m_0 \left[ 4 \left( \Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) - 2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (65)$$

donde hemos definido

$$\Delta_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi . \quad (66)$$

- Este resultado presenta varias propiedades interesantes. En primer lugar, hemos parametrizado las divergencias ultravioletas en forma de polos en  $\epsilon$ . En segundo lugar,  $\Sigma(p)$  depende a un *loop* explícitamente del parámetro  $\mu$ . Esto puede ocurrir porque  $\Sigma$  no es un observable. Centrando nuestra atención en la parte divergente<sup>a</sup> podemos hacer fácilmente la integral sobre el parámetro de Feynman obteniendo

$$\Sigma^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\not{p} + 4m_0) + \text{finito} . \quad (67)$$

<sup>a</sup>Hemos ignorado una **divergencia infrarroja**, que se puede tratar introduciendo una masa ficticia para el fotón (evita que  $\Delta$  se anule) que al final del cálculo se hace tender a cero.



## Renormalización de la QED

- ▷ En (69) se ha introducido  $\Pi(k^2)$ , llamada **polarización del vacío** por razones que veremos enseguida, asumiendo una estructura tensorial para la **autoenergía del fotón**  $\Pi_{\mu\nu}(k^2)$  que está justificada por covariancia Lorentz,

$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = A(k^2)g_{\mu\nu} + B(k^2)k_\mu k_\nu \quad (71)$$

e invariancia gauge,<sup>a</sup>

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0 . \quad (72)$$

Para ver sus implicaciones, desarrollemos perturbativamente en términos de funciones de dos puntos 1PI:

---

<sup>a</sup>Esta propiedad del tensor  $\Pi_{\mu\nu}$  se obtiene a partir de la **identidad de Ward-Takahashi (113-116)**, que es una consecuencia de la invariancia gauge.





# Renormalización de la QED

1. El lagrangiano **clásico** original es una función de campos y parámetros **desnudos**:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m_0 \bar{\psi} \psi + e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 . \quad (76)$$

Se excluye el término de **gauge fixing** pues no necesita renormalización.

2. Los campos y parámetros desnudos están relacionados con campos y parámetros **renormalizados** mediante **constantes de renormalización**:

$$\psi \equiv Z_\psi^{1/2} \psi_r , \quad (77)$$

$$A^\mu \equiv Z_A^{1/2} A_r^\mu , \quad (78)$$

$$m_0 \equiv Z_m m , \quad (79)$$

$$e_0 \equiv Z_e e . \quad (80)$$

## Renormalización de la QED

3. El  $\mathcal{L}$  se descompone en el **lagrangiano original expresado en función de campos y parámetros renormalizados** ( $\mathcal{L}_r$ ) más un **lagrangiano de contratérminos** ( $\delta\mathcal{L}$ ):

$$\mathcal{L} \equiv Z_2 \bar{\psi}_r i \not{\partial} \psi_r - Z_0 m \bar{\psi}_r \psi_r + Z_1 e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu - Z_3 \frac{1}{4} (\partial^\mu A_r^\nu - \partial^\nu A_r^\mu)^2 \quad (81)$$

$$\equiv \mathcal{L}_r + \delta\mathcal{L} , \quad (82)$$

$$\mathcal{L}_r = \bar{\psi}_r i \not{\partial} \psi_r - m \bar{\psi}_r \psi_r + e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu - \frac{1}{4} (\partial^\mu A_r^\nu - \partial^\nu A_r^\mu)^2 , \quad (83)$$

$$\delta\mathcal{L} = \delta Z_2 \bar{\psi}_r i \not{\partial} \psi_r - \delta Z_0 m \bar{\psi}_r \psi_r + \delta Z_1 e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu - \delta Z_3 \frac{1}{4} (\partial^\mu A_r^\nu - \partial^\nu A_r^\mu)^2 , \quad (84)$$

# Renormalización de la QED

que introducen diagramas y reglas de Feynman adicionales:<sup>a</sup>

$$\begin{array}{c} \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \\ \text{X} \end{array} = i(\not{p}\delta Z_2 - m\delta Z_0) \quad (85)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \\ \text{X} \end{array} = -i(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\delta Z_3 \quad (86)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{X} \end{array} = ie\gamma^\mu \delta Z_1 \quad (87)$$

<sup>a</sup>Por cada derivada de un campo  $\partial_\mu\psi$  asociar  $-ip_\mu$ , donde  $p_\mu$  es el momento de la partícula entrante.

## Renormalización de la QED

4. Los **contratérminos** se relacionan con las constantes de renormalización que hemos introducido mediante:

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2 = Z_\psi , \quad (88)$$

$$Z_0 = 1 + \delta Z_0 = Z_m Z_\psi , \quad (89)$$

$$Z_1 = 1 + \delta Z_1 = Z_e Z_\psi Z_A^{1/2} , \quad (90)$$

$$Z_3 = 1 + \delta Z_3 = Z_A . \quad (91)$$



## Renormalización de la QED

- En QED se utiliza el **esquema de renormalización on-shell**, en el que los contratérminos se fijan mediante las siguientes condiciones de renormalización:
  - El propagador renormalizado del electrón es

$$\frac{i}{\not{p} - m - \widehat{\Sigma}(\not{p})} = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - m} + \text{regular cerca de } \not{p} = m, \quad (94)$$

donde

$$Z_\psi = \left( 1 - \left. \frac{d}{d\not{p}} \widehat{\Sigma}(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}. \quad (95)$$

Para que la masa que aparece en el propagador sea la masa física se impone

$$\widehat{\Sigma}(m) = 0 \Rightarrow m\delta Z_0 = -\Sigma(m) \quad (96)$$

y el residuo del propagador debe ser  $Z_\psi = 1$ , lo que implica:

$$\left. \frac{d}{d\not{p}} \widehat{\Sigma}(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0 \Rightarrow \delta Z_2 = \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} \quad (97)$$

## Renormalización de la QED

- El propagador renormalizado del fotón es

$$-\frac{i g_{\mu\nu} Z_A}{k^2} + \dots \quad (98)$$

donde

$$Z_A = \frac{1}{1 - \hat{\Pi}(0)}. \quad (99)$$

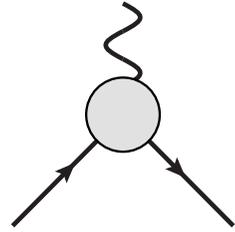
Para que coincida con el propagador de un fotón sin masa el residuo debe ser

$Z_A = 1$ , lo que implica:

$$\hat{\Pi}(0) = 0 \Rightarrow \delta Z_3 = \Pi(0) \quad (100)$$

# Renormalización de la QED

– El vértice renormalizado del electrón es



$$= ie\Gamma^\mu(p, p') = ie\gamma^\mu + ie\hat{\Lambda}^\mu(p, p') \quad (101)$$

donde, por ejemplo a 1 *loop*:



$$= ie\gamma_\mu + ie\Lambda_\mu^{(1)} + ie\gamma_\mu\delta Z_1 . \quad (102)$$

## Renormalización de la QED

- ▷ Se puede demostrar que la estructura Lorentz más general de este vértice para electrones *on-shell* es

$$ie\Gamma^\mu(p, p')|_{p^2=p'^2=m^2} = ie \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + iF_2(q^2)\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right], \quad (103)$$

donde los factores de forma  $F_1$  y  $F_2$  están relacionados con la carga y el momento dipolar magnético anómalo, respectivamente. La unidad de carga eléctrica  $e$  se define a partir del acoplamiento de un electrón *on-shell* con un fotón cuando el momento transferido  $q = p' - p \rightarrow 0$  (**límite de Thomson**):

$$ie\Gamma^\mu(p, p) = ie\gamma^\mu. \quad (104)$$

Por tanto

$$\boxed{\widehat{\Lambda}(p, p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta Z_1 = -\delta F_1(0)} \quad (105)$$

donde hemos definido por conveniencia  $F_1(q^2) \equiv 1 + \delta F_1(q^2)$ . Nótese que a 1 *loop* a  $F_2$  no contribuye ningún contratérmino que pueda usarse para absorber una divergencia, y de hecho es finito. Esto ocurre en teorías renormalizables con los factores de forma que acompañan a operadores de dimensión canónica mayor que 4 (en este caso  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$ , que tiene dimensión 5).

## Renormalización de la QED

- Las constantes de renormalización que acabamos de fijar no son independientes, sino que están relacionadas por la simetría gauge mediante la **identidad de Ward-Takahashi**:

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{d\Sigma}{dp^\mu} . \quad (106)$$

- ▷ Analicemos esto brevemente. Recordemos que la simetría gauge determina la forma de la interacción (acoplamiento mínimo), que a nivel árbol (orden cero) es

$$ie\Gamma_\mu^{(0)}(p, p') = ie\gamma_\mu , \quad (107)$$

Por tanto, podemos escribir

$$q^\mu \Gamma_\mu^{(0)}(p, p+q) = \not{q} = (\not{p} + \not{q} - m) - (\not{p} - m) = \left[ i\tilde{S}_F^{-1}(p+q) - i\tilde{S}_F^{-1}(p) \right]^{(0)} . \quad (108)$$

Esta relación resulta ser **válida a todo orden** en TP, así que también se cumple

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p+q) = \left[ i\tilde{S}_F^{-1}(p+q) - i\tilde{S}_F^{-1}(p) \right] , \quad i\tilde{S}_F^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p) . \quad (109)$$

## Renormalización de la QED

Esta igualdad, que es la base de la identidad (106), relaciona funciones de Green de dos y de tres puntos. Si ahora usamos (101) la expresión anterior implica

$$q^\mu \Gamma^\mu(p, p+q) = \not{q} + q^\mu \Lambda_\mu(p, p+q) = \not{q} - \Sigma(p+q) + \Sigma(p). \quad (110)$$

Tomando el límite  $q \rightarrow 0$  obtenemos finalmente (106). La identidad de WT se define para el lagrangiano original. Para conseguir que el lagrangiano renormalizado preserve la simetría gauge, hemos de imponer que las contribuciones de los contratérminos también verifiquen la igualdad (106). A partir de (92) y (102),

$$\Lambda_\mu^{\text{CT}} = \gamma_\mu \delta Z_1, \quad \Sigma^{\text{CT}} = -(\not{p} \delta Z_2 - m \delta Z_0) \quad (111)$$

así que,

$$\Lambda_\mu^{\text{CT}} = -\frac{d\Sigma^{\text{CT}}}{dp^\mu} \Rightarrow \delta Z_1 = \delta Z_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2, \quad (112)$$

que es la relación constantes de renormalización que habíamos anunciado.

# Renormalización de la QED

▷ La identidad de WT (110) implica (72). En efecto, diagramáticamente:

$$\mu \text{ wavy } \bigcirc \text{ wavy } \nu = \mu \text{ wavy } \bigcirc \text{ wavy } \nu \quad (113)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}(k^2) = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ ie\gamma_\nu \tilde{S}_F(q+k) ie\Gamma_\mu(q, q+k) \tilde{S}_F(q) \right\} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) &= -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \tilde{S}_F(q+k) k^\mu \Gamma_\mu(q, q+k) \tilde{S}_F(q) \right\} \\ &= -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \left[ \tilde{S}_F(q) - \tilde{S}_F(q+k) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (115)$$

donde se ha usado (109) y se ha desplazado la variable de integración de  $q$  a  $q+k$ .

# Renormalización de la QED

▷ Para demostrar que también  $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0$  basta escribir:

$$\mu \text{ wavy line } \bigcirc \text{ wavy line } \nu = \mu \text{ wavy line } \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \text{ wavy line } \nu \quad (116)$$

Nótese que hemos representado el diagrama dos maneras (113) y (116) pero no podemos poner  $\Gamma$  en ambos vértices pues en tal caso estaríamos contando dos veces diagramas como el siguiente:

$$\text{wavy line } \bigcirc \text{ wavy line} \quad (117)$$

## Renormalización de la QED

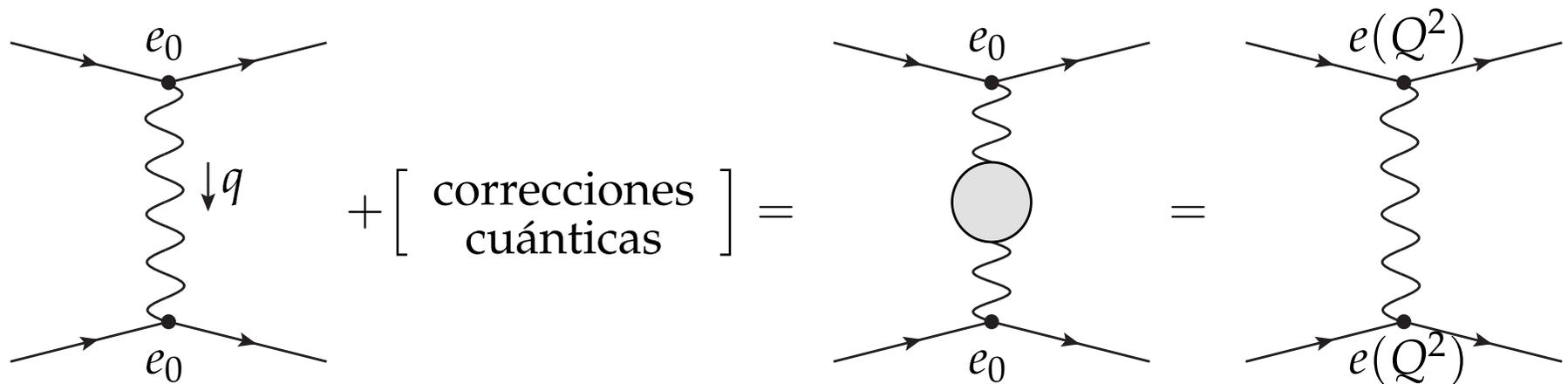
- ▷ La identidad de WT (112) tiene otra importante consecuencia: **la renormalización de la carga es universal**, independiente del fermión, pues se debe exclusivamente a las correcciones cuánticas al propagador del fotón, ya que como  $Z_1 = Z_2$ ,

$$e_0 = Z_e e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e = Z_3^{-1/2} e \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{Z_3} e_0, \quad Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}. \quad (118)$$

# Renormalización de la QED

- Veamos que la carga (constante de acoplamiento) que encontramos experimentalmente cuando medimos la intensidad de una interacción electromagnética no es la carga física  $e$  sino una **carga efectiva**  $e(Q^2)$  que depende del momento transferido en el proceso (convencionalmente  $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$ )

$$\frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{e^2 Z_3^{-1}}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{e^2}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(0)]} = \frac{e^2}{1 - \hat{\Pi}(q^2)} \equiv e^2(Q^2) \quad (119)$$



# Renormalización de la QED

## Nota:

Para ver que un fotón intercambiado en canal  $t$  tiene  $q^2 \leq 0$  elijamos el sistema de referencia en el que el electrón inicial está en reposo.

Entonces  $q^2 = (p' - p)^2 = 2(m^2 - pp') = 2m(m - E')$   
que es negativo o nulo porque  $E' \geq m$ .

Por otro lado el límite de  $Q^2 \rightarrow 0$  corresponde en el sistema CM a ángulos de *scattering*  $\theta \rightarrow 0$ , lo que se ve más claramente en el límite ultrarrelativista ( $E, E' \gg m$ ) pues entonces  $Q^2 \equiv -q^2 = 2(EE' - \vec{p} \cdot \vec{p}') = 2EE'(1 - \cos \theta)$ .

## Renormalización de la QED

- ▷ De hecho vemos que en efecto la carga física es  $e = e(0)$ , la correspondiente al límite de Thomson ( $q \rightarrow 0$ ) en el que el electrón no se desvía, es decir, las cargas están muy alejadas. Si calculamos  $\Pi(q^2)$  a un *loop* usando regularización dimensional obtenemos

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2 - x(1-x)q^2}{\mu^2} \right], \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (120)$$

Si nos vamos a distancias muy cortas,

$$\Pi(Q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \Delta_\epsilon + \frac{5}{3} \right) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}, \quad Q^2 = -q^2 \gg m^2. \quad (121)$$

Así que usando (119) podemos definir una **constante de acoplamiento efectiva**

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - [\Pi(Q^2) - \Pi(Q_0^2)]} = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (122)$$

## Renormalización de la QED

- ▷ De modo que el parámetro  $\mu$  que se introduce en regularización dimensional cobra un significado:  $\mu = Q_0$  es la **escala a la que sustraemos las divergencias** que es la **escala a la que medimos** experimentalmente la constante de acoplamiento. Llamamos *running* a la dependencia de la constante de acoplamiento con la escala.
- ▷ La modificación del acoplamiento se debe exclusivamente a las correcciones cuánticas al propagador del fotón, lo que da lugar a un acoplamiento efectivo que depende del momento transferido en el proceso y es independiente del fermión.

## Renormalización de la QED

▷ A distancias grandes ( $Q^2 \ll m^2$ ) la dependencia no es logarítmica en realidad, pero no importa, pues entonces podemos escribir (120)

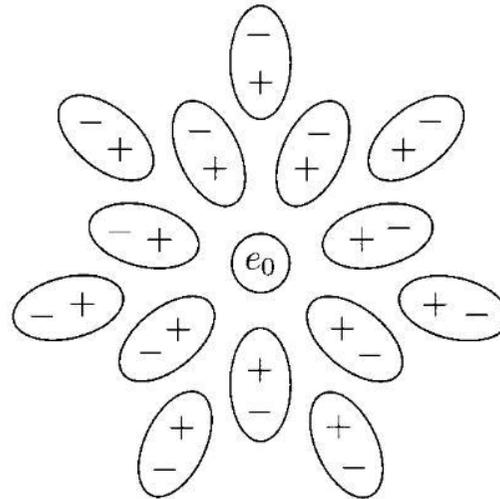
$$\begin{aligned}
 \Pi(Q^2) &= -\frac{\alpha}{3\pi}\Delta_\epsilon + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \ln \left( 1 + \frac{x(1-x)Q^2}{m^2} \right) + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \\
 &\approx -\frac{\alpha}{3\pi}\Delta_\epsilon + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \frac{Q^2}{m^2} \\
 &= -\frac{\alpha}{3\pi}\Delta_\epsilon + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{Q^2}{m^2}, \quad Q^2 \ll m^2,
 \end{aligned} \tag{123}$$

así que si  $Q^2, Q_0^2 \ll m^2$  prácticamente no hay *running*:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{Q^2 - Q_0^2}{m^2}} \approx \alpha(Q_0^2) \approx \alpha(0) \equiv \alpha. \tag{124}$$

# Renormalización de la QED

- Esta corrección a la carga dependiente de la escala/distancia puede interpretarse como el resultado del **apantallamiento** de la carga desnuda ( $e_0$ ) en un medio dieléctrico (el vacío):



- ▷ A grandes distancias ( $Q^2 \ll m_e^2$ ) la carga que observamos es (infinitamente) menor que  $e_0$  pues ésta se encuentra apantallada por la creación de **pares virtuales**  $f\bar{f}$  en el vacío. Por eso a  $\Pi(q^2)$  se le llama **polarización del vacío**.
- ▷ El *running* se ha observado experimentalmente midiendo  $\alpha(Q^2)$  a distintas escalas, pasando de  $\alpha(0) \approx 1/137$  a  $\alpha(M_Z^2) \approx 1/128$  de acuerdo con la predicción de la QED.

## Renormalización de la QED

- ▷ Para calcular esta predicción a un *loop* debemos tener en cuenta que no sólo contribuyen **electrones** ( $m_e \approx 0.511$  MeV) al loop fermiónico, sino también el resto de fermiones cargados del Modelo Estándar cuyas masas  $m$  cumplan  $M_Z \gg m$  (recordemos que  $M_Z \approx 91$  GeV):
- **muones** ( $m_\mu \approx 106$  MeV) y **taus** ( $m_\tau \approx 1.78$  GeV) que son leptones de carga  $-1$ ;
  - quarks **up** ( $m_u \approx 2$  MeV) y **charm** ( $m_c \approx 1.5$  GeV) de carga  $2/3$ ;
  - quarks **down** ( $m_d \approx 5$  MeV), **strange** ( $m_s \approx 150$  MeV) y **bottom** ( $m_b \approx 5$  MeV) de carga  $-1/3$ .

El quark top es demasiado pesado ( $m_t \approx 173$  GeV).

Además cada quark tiene 3 colores.

# Renormalización de la QED

▷ Así que

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \hat{\Pi}(Q^2)} \quad (125)$$

donde, para  $m_t^2 \gtrsim Q^2 \gg m_b^2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(Q^2) = & \frac{\alpha}{3\pi} (-1)^2 \left[ \ln \frac{Q^2}{m_e^2} + \ln \frac{Q^2}{m_\mu^2} + \ln \frac{Q^2}{m_\tau^2} - 3 \times \frac{5}{3} \right] \\ & + 3 \times \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left[ \ln \frac{Q^2}{m_u^2} + \ln \frac{Q^2}{m_c^2} - 2 \times \frac{5}{3} \right] \\ & + 3 \times \frac{\alpha}{3\pi} \left( -\frac{1}{3} \right)^2 \left[ \ln \frac{Q^2}{m_d^2} + \ln \frac{Q^2}{m_s^2} + \ln \frac{Q^2}{m_b^2} - 3 \times \frac{5}{3} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

Por tanto,

$$\alpha^{-1}(M_Z^2) = \alpha^{-1}(0) \left[ 1 - \hat{\Pi}(M_Z^2) \right] \approx 137(1 - 0.0672) \approx 128. \quad (127)$$

## Renormalización de la QED

- Como comentario final, nótese que además de acusar el efecto de apantallamiento de la carga, el vértice renormalizado depende de factores de forma que son función de  $q^2$ ,

$$ie\Gamma^\mu(p, p + q) = \frac{ie}{1 - \frac{1}{2}[\Pi(q^2) - \Pi(0)]} \left\{ \left[ 1 + \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \right] \gamma^\mu + iF_2(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right\}. \quad (128)$$

## Teorema óptico. Resonancias

- Hemos hallado anteriormente la anchura de desintegración de una partícula inestable  $A$  de masa  $m$  a un estado final  $f$  de  $n_f$  partículas. En el sistema CM es

$$d\Gamma(A \rightarrow f) = \frac{1}{2m} |\mathcal{M}(p \rightarrow \{p_f\})|^2 d\Phi_{n_f}, \quad d\Phi_{n_f} = \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^2 2E_j} \delta^4 \left( p - \sum_{j=1}^{n_f} p_j \right). \quad (129)$$

Sin embargo no está claro que esta expresión tenga sentido, pues una partícula inestable no puede ser un estado asintótico.

- ▷ Veamos cómo la fórmula LSZ y el teorema óptico nos conducen al mismo resultado y nos permiten entender su rango de validez.

## Teorema óptico. Resonancias

- Hemos obtenido el teorema óptico como consecuencia de la unitariedad de la matriz  $S = 1 + iT$ ,

$$2 \operatorname{Im} T = T^\dagger T . \quad (130)$$

Consideremos el proceso de *scattering*  $a \rightarrow b$  con  $|a\rangle = |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$  y  $|b\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$ .

Usando la relación de completitud

$$1 = \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} |\{\vec{q}_f\}\rangle \langle \{\vec{q}_f\}| \quad (131)$$

y escribiendo la matriz  $T$  en términos de la matriz invariante  $\mathcal{M}$  tenemos que:

## Teorema óptico. Resonancias

$$\text{Im} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \text{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b) , \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle &= \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger | \{\vec{q}_f\} \rangle \langle \{\vec{q}_f\} | T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \\ &= \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_j q_j) \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - \sum_j q_j) \mathcal{M}(a \rightarrow f) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \sum_f \int d\Phi_{n_f} \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f) . \end{aligned} \quad (133)$$

El teorema óptico (130) conduce entonces a:

$$2\text{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b) = \sum_f \int d\Phi_{n_f} \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f) . \quad (134)$$

## Teorema óptico. Resonancias

- ▷ Si ahora tomamos  $\vec{k}_i = \vec{p}_i$  obtenemos una forma del teorema óptico que relaciona la **sección eficaz total** de un proceso con la **amplitud de *scattering forward*** (hacia delante):

$$2\text{Im}\mathcal{M}(\vec{k}_1\vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}_1\vec{k}_2) = \sum_f \int d\Phi_{n_f} |\mathcal{M}(\vec{k}_1\vec{k}_2 \rightarrow f)|^2 \quad (135)$$

$$\Rightarrow \text{Im}\mathcal{M}(\vec{k}_1\vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}_1\vec{k}_2) = 2E_{\text{CM}}|\vec{k}|\sigma(\vec{k}_1\vec{k}_2 \rightarrow \text{todo}) , \quad (136)$$

siendo  $\vec{k}$  el momento de cada partícula en el sistema CM, donde se ha usado:

$$d\sigma = \frac{1}{4E_{\text{CM}}|\vec{k}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n .$$



## Teorema óptico. Resonancias

▷ Por tanto, aplicando la fórmula LSZ tenemos que

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(p \rightarrow p) &= \sqrt{Z}^2 \longrightarrow \textcircled{1\text{PI}} \longrightarrow \\
 \mathcal{M}(p \rightarrow p) &= -ZM^2(p^2) .
 \end{aligned}
 \tag{139}$$

Ahora podemos distinguir dos casos:

1. La partícula es **estable**:  $\mathcal{M}(p \rightarrow f) = 0$ . Entonces a partir de (135) y (139)

$$\mathcal{M}(p \rightarrow f) = 0 \Rightarrow \text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow p) = 0 \Rightarrow M^2(p^2) \in \mathbb{R} .
 \tag{140}$$

Ya sabemos que entonces cerca de  $p^2 = m^2$

$$\longrightarrow \textcircled{\phantom{0}} \longrightarrow = \frac{iZ}{p^2 - m^2}
 \tag{141}$$

donde la masa física y la constante de renormalización del campo son

$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2) , \quad Z = \left( 1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1} .
 \tag{142}$$



## Teorema óptico. Resonancias

- ▷ Si esta partícula inestable se intercambiara en canal  $s$  en un proceso de *scattering* se produciría una **resonancia** cerca de  $s = p^2 = m^2$ . La sección eficaz sería

$$\sigma \propto \frac{1}{|s - m^2 - iZ\text{Im } M^2(s)|^2} \quad (146)$$

que toma la forma de una **distribución de Breit-Wigner**:

$$\sigma_{\text{BW}} \propto \frac{1}{|s - m^2 + im\Gamma|^2} = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \quad (147)$$

donde  $\Gamma$  es la anchura de la partícula. Comparando ambas expresiones, vemos que **si la resonancia es estrecha** podemos identificar

$$\Gamma = -\frac{Z}{m}\text{Im } M^2(m^2). \quad (148)$$

Usando (139) y el teorema óptico (134) con  $a = b = p$  tenemos

$$\Gamma = \frac{\text{Im } \mathcal{M}(p \rightarrow p)}{m} = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Phi_{n_f} |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2 \quad (149)$$

que es exactamente la expresión (129) que queríamos justificar.