3. Cuantización de campos libres

- Recordemos que para cuantizar un sistema clásico de coordenadas q^i y momentos p^i en la imagen de Schrödinger promovemos q^i y p^i a operadores e imponemos las reglas de conmutación (en unidades $\hbar = 1$):

$$[q^i, p^j] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q^i, q^j] = [p^i, p^j] = 0. \tag{1}$$

- En la imagen de Heisenberg, en la que los operadores dependen del tiempo,

$$q^j_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} q^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \quad p^j_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{2}$$

$$(\Rightarrow \partial_t q^j_H = \mathrm{i}Hq^j_H - \mathrm{i}q^j_H H = -\mathrm{i}[q_H, H], \quad \text{si } \partial_t q^j = 0)$$

  imponemos las reglas de conmutación en tiempos iguales,

$$[q^i_H(t), p^j_H(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q^i_H(t), q^j_H(t)] = [p^i_H(t), p^j_H(t)] = 0. \tag{3}$$

- En teoría de campos hemos reemplazado $q_H^i(t)$ por $\phi(t,\vec{x})$ y $p_H^i(t)$ por $\Pi(t,\vec{x})$, así que para cuantizar los campos los promovemos a operadores e imponemos[a]

$$\boxed{[\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{y})] = \mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \quad [\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{y})] = [\Pi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{y})] = 0} \qquad (4)$$

segunda cuantización

▷ Estudiaremos en primer lugar el caso del campo escalar real.

[a] Este procedimiento se llama cuantización canónica. Existe un procedimiento alternativo, el formalismo de integrales de camino que resulta particularmente útil para cuantizar teorías de campos gauge.

- Consideremos un campo escalar real libre,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}), \quad p^0 = E_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \tag{5}$$

donde ahora ϕ, $a_{\vec{p}}$ y $a^\dagger_{\vec{p}}$ son operadores. Recordando que

$$\Pi(t,\vec{y}) = \partial_t \phi(t,\vec{y}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{2}} \right) \left(a_{\vec{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy} - a^\dagger_{\vec{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}qy} \right) \tag{6}$$

es fácil comprobar que (4) implica

$$\boxed{[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = 0} \tag{7}$$

▷ En efecto,

$$
\begin{aligned}
[\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{y})] =& \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{2}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \\
&\times\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\vec{p}}-E_{\vec{q}})t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\vec{p}}-E_{\vec{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}\right) \\
=& \frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right)=\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned} \tag{8}
$$

donde se ha usado que

$$
\delta^3(\vec{x})=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}},\quad \delta^3(-\vec{x})=\delta^3(\vec{x}). \tag{9}
$$

▷ Las reglas de conmutación (7) nos recuerdan a los operadores creación y destrucción de modos de energía $\hbar\omega$ de un oscilador armónico con hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{10}$$

cuyas soluciones se hallan introduciendo los operadores (reinsertamos las $\hbar$ para refrescar mejor la memoria):

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger), \tag{11}$$

que satisfacen las reglas de conmutación,

$$[x, p] = \mathrm{i}\hbar \Rightarrow [a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{12}$$

De ellas se deduce que

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}). \tag{13}$$

Definiendo el estado de mínima energía (el vacío) $|0\rangle$ como aquél que es aniquilado por el operador a y aplicando (12)

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger, \quad [H, a] = -\hbar\omega a, \tag{14}$$

tenemos que, normalizando $\langle 0|0\rangle = 1$,

$$a\,|0\rangle = 0 \Rightarrow a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \quad |n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle \tag{15}$$

de donde $a^\dagger a$ es el operador número de modos, $|0\rangle$ tiene energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (energía del punto cero) y $|n\rangle$ tiene energía $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

Los autoestados $\{|n\rangle\}$ del hamiltoniano forman el espacio de Hilbert del sistema, llamado espacio de Fock.

- Volviendo a nuestra teoría de campos, vemos que (7) son las relaciones de conmutación de un conjunto infinito de osciladores armónicos, uno por cada valor de $\vec{p}$, excepto por un factor de normalización que es el volumen (infinito) del sistema, pues

$$\lim_{\vec{p}\to\vec{q}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \lim_{\vec{p}\to\vec{q}}\int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} = V(\to\infty). \tag{16}$$

▷ Podemos construir entonces el espacio de Fock de estados usando los operadores creación ($a^\dagger_{\vec{p}}$) y destrucción ($a_{\vec{p}}$) de modos de momento $\vec{p}$, a partir de (7) y $a_{\vec{p}}\,|0\rangle = 0$. Así obtenemos los estados multipartícula:

$$|\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{2E_{\vec{p}_2}}\cdots a^\dagger_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{p}_2}\cdots|0\rangle\,. \tag{17}$$

▷ La normalización ha sido elegida convenientemente de modo que es invariante Lorentz. En efecto, tomemos por simplicidad el estado de una partícula de momento $\vec{p}$,

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle \Rightarrow \langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{q}}}\sqrt{2E_{\vec{p}}}\,\langle 0|\, a_{\vec{q}} a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{18}$$

que es una normalización invariante pues si hacemos e.g. un boost en dirección z,

$$E' = \gamma(E+\beta p_z), \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma(\beta E + p_z) \tag{19}$$

vemos que

$$\delta^3(\vec{p}\,'-\vec{q}\,') = \frac{\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}{\gamma\left(\beta\dfrac{\partial E}{\partial p_z}+1\right)} = \frac{E\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}{\gamma(\beta p_z + E)} = \frac{E}{E'}\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$$

$$\Rightarrow E_{\vec{p}\,'}\delta^3(\vec{p}\,'-\vec{q}\,') = E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\ . \tag{20}$$

En el primer paso se ha usado

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x = x_0)\right|} \,, \quad f(x) = p'_z(p_z) = \gamma(\beta E + p_z) \,, \tag{21}$$

y en el segundo,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_z} = \frac{p_z}{E} \,, \quad \text{pues } E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \,. \tag{22}$$

- Veamos ahora cuál es la energía de los estados multipartícula. Para ello expresaremos primero el hamiltoniano en términos de operadores creación y destrucción (hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad, pues el hamiltoniano es una constante del movimiento):

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}(x) = \int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{2}\left(\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\
&\quad \times \Big\{ -E_{\vec{p}}E_{\vec{q}} \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \\
&\qquad - \vec{p}\cdot\vec{q} \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \\
&\qquad + m^2 \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}}(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{p}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}V\right).
\end{aligned} \tag{23}
$$

▷ El segundo término es la suma de la E del punto cero de todos los osciladores,

$$E_{\text{vac}} = V\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\vec{p}} \Rightarrow \rho_{\text{vac}} = \frac{E_{\text{vac}}}{V} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\vec{p}}. \tag{24}$$

No nos preocupa que la energía total del sistema, que tiene un volumen infinito, sea divergente. Pero vemos que, además, la densidad de energía del vacío ρ_{vac} es infinita. Esto tampoco es un problema, pues estamos interesados en diferencias de energía,[a] así que podemos substraer la energía del punto cero y declarar que H es

$$H \equiv \int \mathrm{d}^3x \;:\frac{1}{2}\left(\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right): = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\; E_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} \tag{25}$$

donde $:\mathcal{O}:$ es el orden normal de $\mathcal{O}$, que consiste en escribir todos los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción. Así,

$$:a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{p}}: \equiv \; a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}}. \tag{26}$$

[a] Esto no puede hacerse si se incluye gravedad, pues entonces la energía del vacío es relevante. La energía del punto cero está relacionada con la constante cosmológica. Véase la discusión de Maggiore [Maggiore], p. 141.

▷ De este modo el vacío tiene energía cero y

$$\begin{aligned} H\left|\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots\right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \cdots a^\dagger_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{p}_2} \cdots \left|0\right\rangle \\ &= \left(E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \cdots\right)\left|\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots\right\rangle , \end{aligned} \tag{27}$$

donde se ha aplicado $a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}_i} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_i) + a^\dagger_{\vec{p}_i} a_{\vec{p}}$ de (7) y $a_{\vec{p}}\left|0\right\rangle = 0$.

▷ En cuanto al momento,

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x \ :\partial^0\phi\partial^i\phi: = \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}}$$

$$\times : \left\{ -E_{\vec{p}}q^i a_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)x} - E_{\vec{p}}q^i a^\dagger_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)x} + E_{\vec{p}}q^i a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)x} + E_{\vec{p}}q^i a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, p^i : (-a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} - a^\dagger_{\vec{p}}a^\dagger_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{p}} + a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}}) := \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, p^i a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}}, \tag{28}$$

donde los dos primeros sumandos son nulos porque resultan de la integración de una función impar en un intervalo simétrico.

Por tanto,

$$P^i\,|\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, p^i a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}}\sqrt{2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{2E_{\vec{p}_2}}\cdots a^\dagger_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{p}_2}\cdots|0\rangle$$

$$= (p^i_1 + p^i_2 + \cdots)\,|\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots\rangle\,. \tag{29}$$

- Nótese que los estados multipartícula $|\vec{p}_1\vec{p}_2\dots\rangle$ son simétricos bajo intercambio de dos partículas cualesquiera, porque los operadores creación conmutan entre sí.

▷ Por otro lado, recordemos que del teorema de Noether se deduce que los campos escalares tienen espín cero, así que los cuantos que crea y destruye un campo escalar son partículas de espín cero.

▷ Tenemos por tanto justificada la conexión espín-estadística que establece que las partículas de espín entero $(0, 1, 2, \dots)$ son bosones, es decir, obedecen la estadística de Bose-Einstein, que implica que sus estados son simétricos bajo intercambio.

▷ Veremos que la imposición de reglas de anticonmutación para la cuantización de campos de espín $\frac{1}{2}$, para evitar que el hamiltoniano no esté acotado inferiormente, conduce también de forma automática a estados multipartícula antisimétricos bajo intercambio, como corresponde a los fermiones.

▷ Es decir, en Teoría Cuántica de Campos la conexión espín-estadística no es un postulado sino un teorema.

Campos complejos | Antipartículas

- Si el campo escalar es complejo,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right), \tag{30}$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\vec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right). \tag{31}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &[\phi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{y})] = \mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &[\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = [\Pi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{y})] = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = [b_{\vec{p}}, b^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \\ &[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}, b^\dagger_{\vec{q}}] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Análogamente al caso del campo real, construimos el espacio de Fock a partir de

$$a_{\vec{p}} \left|0\right\rangle = b_{\vec{p}} \left|0\right\rangle = 0, \tag{33}$$

aplicando $a^\dagger_{\vec{p}}$ y $b^\dagger_{\vec{p}}$ sucesivamente.

- Es fácil demostrar que, tomando el orden normal,

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\vec{p}}(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + b^\dagger_{\vec{p}} b_{\vec{p}}), \quad P^i = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, p^i (a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + b^\dagger_{\vec{p}} b_{\vec{p}}). \tag{34}$$

  Vemos que los cuantos de un campo escalar complejo son dos especies de igual masa creadas por $a^\dagger_{\vec{p}}$ y $b^\dagger_{\vec{p}}$, respectivamente.

- La carga U(1) conservada es

$$Q = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \ :\phi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi: = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}}$$

$$\times : \left\{ \left(a^\dagger_{\vec{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \partial_0 \left(a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\right) - \partial_0 \left(a^\dagger_{\vec{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \left(a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\right)\right.$$

$$= \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}}$$

$$\times : \left\{ \left(a^\dagger_{\vec{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) E_{\vec{q}} \left(a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} - b^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\right) + E_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} - b_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \left(a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\right)\right.$$

$$= \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} : \left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-p)x} - b_{\vec{p}}b^\dagger_{\vec{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)x}\right) :$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} (a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} - b^\dagger_{\vec{p}}b_{\vec{p}}). \qquad (35)$$

▷ Por tanto, el estado $a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$ tiene carga $Q = +1$ y $b^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$ tiene carga $Q = -1$.

- Ya estamos en situación de interpretar las soluciones de energía negativa de la ecuación de Klein-Gordon:
  - El coeficiente de la solución de energía positiva de un campo complejo ϕ se convierte al cuantizar el campo en el operador destrucción de una partícula (carga unidad) mientras que el coeficiente de la solución de energía negativa se convierte en el operador creación de su antipartícula (carga opuesta).
  - Para el campo $\phi^\dagger$ ocurre lo contrario, pues se intercambian los roles de partícula y antipartícula.
  - Si el campo es real, $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$, entonces crea y destruye partículas que coinciden con su propia antipartícula.

Campos de espín $\frac{1}{2}$ | Campo de Dirac

- Para cuantizar el campo de Dirac, que es un campo complejo,

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right), \tag{36}$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \sum_{r=1,2} \left(a^\dagger_{\vec{q},r} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} + b_{\vec{q},r} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \right), \tag{37}$$

convertimos los coeficientes $a_{\vec{p},s}$, $b_{\vec{p},s}$ y sus complejos conjugados en operadores y sus operadores adjuntos, como hicimos con el campo escalar.

▷ Antes de imponer ninguna relación de (anti)conmutación sobre los mismos, veamos qué forma tiene el operador hamiltoniano resultante (de nuevo hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad):

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{00} = \int \mathrm{d}^3x\ \psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0 \psi = \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}$$

$$\times \sum_{r,s} \Big\{ a^\dagger_{\vec{q},r} a_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} u^{(s)}(\vec{p}) - b_{\vec{q},r} b^\dagger_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} v^{(s)}(\vec{p})$$

$$- a^\dagger_{\vec{q},r} b^\dagger_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} v^{(s)}(\vec{p}) + b_{\vec{q},r} a_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} u^{(s)}(\vec{p}) \Big\}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \Big\{ a^\dagger_{\vec{p},r} a_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) - b_{\vec{p},r} b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p})$$

$$- a^\dagger_{-\vec{p},r} b^\dagger_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(-\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) + b_{-\vec{p},r} a_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(-\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) \Big\}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a^\dagger_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} - b_{\vec{p},s} b^\dagger_{\vec{p},s}), \qquad (38)$$

donde hemos usado

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\delta_{rs},$$
$$u^{(r)\dagger}(-\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = v^{(r)\dagger}(-\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \tag{39}$$

▷ Si ahora impusiéramos las mismas reglas de conmutación que al campo escalar complejo y aplicáramos el orden normal (substracción de la energía del vacío), obtendríamos un hamiltoniano no acotado inferiormente, pues los estados creados por $b^\dagger_{\vec{p}}$, que llamaremos antipartículas, contribuyen con energía negativa arbitrariamente grande. Para obtener un espectro de energías que tenga sentido, debemos imponer las reglas de anticonmutación:

$$\{\psi(t,\vec{x}),\Pi_\psi(t,\vec{y})\} = \mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ , \quad \{\psi(t,\vec{x}),\psi(t,\vec{y})\} = \{\Pi_\psi(t,\vec{x}),\Pi_\psi(t,\vec{y})\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\{a_{\vec{p},r},a^\dagger_{\vec{q},s}\} = \{b_{\vec{p},r},b^\dagger_{\vec{q},s}\} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{rs} \\ &\{a_{\vec{p},r},a_{\vec{q},s}\} = \{b_{\vec{p},r},b_{\vec{q},s}\} = \{a_{\vec{p},r},b_{\vec{q},s}\} = \{a_{\vec{p},r},b^\dagger_{\vec{q},s}\} = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Y definir, consistentemente, el orden normal para operadores fermiónicos,

$$: a_{\vec{p},r} a^\dagger_{\vec{p},r} : \equiv -a^\dagger_{\vec{p},r} a_{\vec{p},r}, \quad : b_{\vec{p},r} b^\dagger_{\vec{p},r} : \equiv -b^\dagger_{\vec{p},r} b_{\vec{p},r}, \tag{41}$$

lo que conduce al hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x \; : \psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0 \psi : = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a^\dagger_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} + b^\dagger_{\vec{p},s} b_{\vec{p},s}). \tag{42}$$

Análogamente, para el operador momento se obtiene

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x \; : \theta^{0i} : = \int \mathrm{d}^3x \; : \psi^\dagger \mathrm{i}\partial^i \psi : = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} p^i \sum_s (a^\dagger_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} + b^\dagger_{\vec{p},s} b_{\vec{p},s}). \tag{43}$$

- El momento angular (carga de Noether conservada asociada a la invariancia bajo rotaciones) tiene una parte orbital (idéntica a la del campo escalar) y otra de espín (adicional). Aplicando las expresiones generales para las corrientes de Noether, se puede demostrar que la parte de espín en la representación quiral es

$$\vec{S} = \int \mathrm{d}^3x \ :\psi^\dagger \tfrac{1}{2}\vec{\Sigma}\psi: \quad \text{donde } \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Expresado en el espacio de Fock, el espín en la dirección del eje z queda

$$S_z = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \times \sum_{r,s} :\Big\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} a^\dagger_{\vec{q},r} a_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(\vec{q})\Sigma^3 u^{(s)}(\vec{p}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} b_{\vec{q},r} b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(\vec{q})\Sigma^3 v^{(s)}(\vec{p}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} a^\dagger_{\vec{q},r} b^\dagger_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(\vec{q})\Sigma^3 v^{(s)}(\vec{p}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} b_{\vec{q},r} a_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(\vec{q})\Sigma^3 u^{(s)}(\vec{p}) \Big\}: . \tag{45}$$

▷ Entonces el espín J_z del estado creado por $a^\dagger_{\vec{p},s}\,|0\rangle$ o $b^\dagger_{\vec{p},s}\,|0\rangle$ en su sistema de referencia en reposo ($\vec{p}=0$) se obtiene aplicando S_z a estos estados. Recordemos:

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\,\xi^{(s)}, \quad v_L^{(s)}(0) = -v_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\,\eta^{(s)} \tag{46}$$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \eta^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{47}$$

La última línea en (45) se anula aplicando (39) y obtenemos

$$S_z\; a^\dagger_{0,1}\,|0\rangle = +\frac{1}{2}a^\dagger_{0,1}\,|0\rangle\,, \quad S_z\; a^\dagger_{0,2}\,|0\rangle = -\frac{1}{2}a^\dagger_{0,2}\,|0\rangle\,, \tag{48}$$

$$S_z\; b^\dagger_{0,1}\,|0\rangle = +\frac{1}{2}b^\dagger_{0,1}\,|0\rangle\,, \quad S_z\; b^\dagger_{0,2}\,|0\rangle = -\frac{1}{2}b^\dagger_{0,2}\,|0\rangle\,, \tag{49}$$

donde se ha tenido en cuenta que $:b_{\vec{p},s}b^\dagger_{\vec{p},s}: = -b^\dagger_{\vec{p},s}b_{\vec{p},s}$. Nótese que gracias a que dado un s hemos introducido $\eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*}$ para los espinores de las antipartículas, que es autovector de σ^3 con autovalor opuesto al de $\xi^{(s)}$, los estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen el mismo espín.

▷ Como $[K_z, J_z] = 0$, el estado resultante de hacer un boost en la dirección del eje z (en la que hemos definido el espín) sigue siendo un autoestado del espín. A la proyección del espín en la dirección del movimiento se le llama helicidad y se puede comprobar usando las expresiones explícitas de los espinores que

$$\hat{p} \cdot \vec{\Sigma}\, u^{(1)}(\vec{p}) = +u^{(1)}(\vec{p}) \,, \qquad \hat{p} \cdot \vec{\Sigma}\, u^{(2)}(\vec{p}) = -u^{(2)}(\vec{p}) \tag{50}$$

$$\hat{p} \cdot \vec{\Sigma}\, v^{(1)}(\vec{p}) = -v^{(1)}(\vec{p}) \,, \qquad \hat{p} \cdot \vec{\Sigma}\, v^{(2)}(\vec{p}) = +v^{(2)}(\vec{p}) \,, \tag{51}$$

con lo que el resultado de (48) y (49) es extensible a los estados de helicidad:

$$\hat{p} \cdot \vec{S}\, a^\dagger_{\vec{p},1} |0\rangle = +\frac{1}{2} a^\dagger_{\vec{p},1} |0\rangle \,, \quad \hat{p} \cdot \vec{S}\; a^\dagger_{\vec{p},2} |0\rangle = -\frac{1}{2} a^\dagger_{\vec{p},2} |0\rangle \tag{52}$$

$$\hat{p} \cdot \vec{S}\, b^\dagger_{\vec{p},1} |0\rangle = +\frac{1}{2} b^\dagger_{\vec{p},1} |0\rangle \,, \quad \hat{p} \cdot \vec{S}\; b^\dagger_{\vec{p},2} |0\rangle = -\frac{1}{2} b^\dagger_{\vec{p},2} |0\rangle \,, \tag{53}$$

es decir, los estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen la misma helicidad. Recordemos por último que las helicidades son invariantes Lorentz solamente para estados sin masa (quiralidades).

- En cuanto a la carga U(1),

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \ :\psi^\dagger\psi: = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s (a^\dagger_{\vec{p},s}a_{\vec{p},s} - b^\dagger_{\vec{p},s}b_{\vec{p},s}). \tag{54}$$

  Por tanto, el campo cuántico ψ destruye partículas y crea antipartículas de igual masa, espín $\frac{1}{2}$ y carga opuesta.

- Veamos ahora qué significan las etiquetas $s = 1, 2$ de los autoestados de espín. Asociamos s con el espín del fermión correspondiente a lo largo de una dirección dada. Consideremos una dirección cualquiera $\hat{n}(\theta, \varphi)$. Entonces los autoestados de espín en esa dirección son

$$\xi^{(s)} = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$$

$$\xi(\uparrow) \equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{pues } (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\xi(\uparrow) = +\xi(\uparrow), \tag{55}$$

$$\xi(\downarrow) \equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta, \varphi)\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{pues } (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\xi(\downarrow) = -\xi(\downarrow). \tag{56}$$

(En particular, $\xi^{(s)} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ son los autoestados de espín a lo largo del eje z.)

▷ Pues bien, el estado que tiene autovalor opuesto a cualquier ξ es $\eta = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^*$, pues si $(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\xi = \xi$ entonces

$$(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\eta = (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^*) = \mathrm{i}\sigma^2\hat{n}\cdot\vec{\sigma}^*\xi^* = -(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^*) = -\eta, \tag{57}$$

donde se ha usado que $\vec{\sigma}\sigma^2 = -\sigma^2\vec{\sigma}^*$. Así que podemos denotar también

$$\xi^{(-s)} \equiv \eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)) \tag{58}$$

para recordarnos que son autoestados con autovalor opuesto al dado.

– Nótese, por cierto, que una doble inversión del espín de ξ lo lleva a

$$-\mathrm{i}\sigma^2\eta^* = -\mathrm{i}\sigma^2(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^*)^* = \sigma^2\sigma^{2*}\xi = -\xi \tag{59}$$

que no coincide con ξ, lo que refleja el hecho de que un giro de 2π no devuelve un sistema de espín $\frac{1}{2}$ a su estado original (para ello hay que rotar 4π).

▷ Resumiendo, los espinores que introdujimos en el tema anterior son

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\ \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\ \xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\ \xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}\ \xi^{(-s)} \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Así que, dado el campo $\psi(x)$ de (36), el operador $a_{\vec{p},s}$ destruye partículas cuyo espinor $u^{(s)}(\vec{p})$ contiene a $\xi^{(s)}$ y el operador $b^\dagger_{\vec{p},s}$ crea antipartículas cuyo espinor $v^{(s)}(\vec{p})$ contiene a $\xi^{(-s)}$.

Esto simplificará mucho las cosas. Por ejemplo, veremos más tarde que el conjugado de carga del campo $\psi(x)$ intercambia partículas por antipartículas preservando el mismo estado s, es decir, con el mismo espín o la misma helicidad.

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right)$$

- En el límite ultrarrelativista ($E \gg m$) recordemos que

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_R \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Por tanto:

- El campo ψ_L:
  - destruye partículas de helicidad $h = -\frac{1}{2}$ (espinor $u^{(2)}$)
  - y crea antipartículas de helicidad $h = +\frac{1}{2}$ (espinor $v^{(1)}$).
- El campo ψ_R:
  - destruye partículas de helicidad $h = +\frac{1}{2}$ (espinor $u^{(1)}$)
  - y crea antipartículas de helicidad $h = -\frac{1}{2}$ (espinor $v^{(2)}$).

Conjugación de carga

- El conjugado de carga del campo de Dirac clásico (representación quiral) es

$$\psi^c(x) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2\psi_R^*(x) \\ \mathrm{i}\sigma^2\psi_L^*(x) \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\gamma^2\psi^*(x) \quad (= -\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0\overline{\psi}^T(x)). \tag{62}$$

▷ Veamos cómo actúa la operación conjugación de carga sobre los estados de una partícula. Para ello necesitamos introducir un operador unitario C, con $C^2 = 1$, que transforme los operadores creación de la siguiente manera,

$$Ca_{\vec{p},s}C = \eta_C b_{\vec{p},s}\ , \quad Cb_{\vec{p},s}C = \eta_C a_{\vec{p},s}\ , \tag{63}$$

donde $\eta_C^2 = 1$, así que $\eta_C = \pm 1$. Entonces, a partir de (60) tenemos

$$\begin{aligned}[v^{(s)}(\vec{p})]^* &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*}) \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*}) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2\sqrt{p\bar{\sigma}^*}\ \xi^{(s)*} \\ \mathrm{i}\sigma^2\sqrt{p\sigma^*}\ \xi^{(s)*} \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma^2 \\ \mathrm{i}\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\ \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\ \xi^{(s)} \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\gamma^2 u^{(s)}(\vec{p}),\end{aligned} \tag{64}$$

(primero hemos usado $\sigma^2\vec{\sigma}\sigma^2 = -\vec{\sigma}^*$ con $(\sigma^2)^2 = 1$ y luego $\sigma^{2*} = -\sigma^2$) de donde

$$u^{(s)}(\vec{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2[v^{(s)}(\vec{p})]^*, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = -\mathrm{i}\gamma^2[u^{(s)}(\vec{p})]^* \tag{65}$$

(pues $(\gamma^2)^2 = -1$.)

▷ De esta forma se satisface la versión operatorial de (62):

$$
\begin{aligned}
C\psi(x)C &= \eta_C \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \\
&= -\mathrm{i}\eta_C \gamma^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} [v^{(s)}(\vec{p})]^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_{\vec{p},s} [u^{(s)}(\vec{p})]^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \\
&= -\mathrm{i}\eta_C \gamma^2 \psi^*(x). \qquad (66)
\end{aligned}
$$

Es decir, la conjugación de carga intercambia partículas y antipartículas preservando el estado de espín, es decir, manteniendo las helicidades.

▷ Para campos de Majorana, que a nivel clásico satisfacen

$$\psi_M^c(x) = \zeta^* \psi_M(x) \tag{67}$$

se tiene que[a]

$$\begin{aligned}
&C\psi_M(x)C = \psi_M(x) \\
\Rightarrow &\eta_C \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \\
\Rightarrow &a_{\vec{p},s} = \eta_C \, b_{\vec{p},s} \,,
\end{aligned} \tag{68}$$

es decir, partícula y antipartícula coinciden, pues

$$C a^\dagger_{\vec{p},s} |0\rangle = C a^\dagger_{\vec{p},s} C C |0\rangle = \eta_C b^\dagger_{\vec{p},s} |0\rangle = a^\dagger_{\vec{p},s} |0\rangle \,, \tag{69}$$

donde se ha tomado $C|0\rangle \equiv |0\rangle$.

[a] La fase compleja ζ^* a la derecha de la igualdad (67) está incorporada en la definición (63) que se introduce a la izquierda de la igualdad (68), de modo que podemos decir que $\eta_C = \zeta$, y es por tanto necesariamente real, pues $\eta_C = \pm 1$.

- Para un campo escalar complejo, basta ignorar espinores e índices de espín,

$$C\phi(x)C = \eta_C \phi^*(x) \Rightarrow C a^\dagger_{\vec{p}} C = \eta_C b^\dagger_{\vec{p}}\,, \quad C b^\dagger_{\vec{p}} C = \eta_C a^\dagger_{\vec{p}}. \tag{70}$$

El campo de Majorana es el análogo al campo escalar real.

Campos de espín $\frac{1}{2}$ | Paridad

- El transformado bajo paridad del campo de Dirac clásico (rep quiral) es

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_R(\tilde{x}) \\ \psi_L(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \gamma^0 \begin{pmatrix} \psi_L(\tilde{x}) \\ \psi_R(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \gamma^0 \psi(\tilde{x}), \quad \text{donde } \tilde{x} = (t, -\vec{x}). \tag{71}$$

▷ Buscamos que sobre los estados de una partícula la paridad actúe

$$P a_{\vec{p},s} P = \eta_a a_{-\vec{p},s} \, , \quad P b_{\vec{p},s} P = \eta_b b_{-\vec{p},s} \, , \tag{72}$$

donde P es un operador unitario, con $P^2 = 1$, y η_a, η_b son fases que llamaremos paridades intrínsecas de partícula y antipartícula, respectivamente.

Suponemos $P\,|0\rangle = |0\rangle$.

Como los observables dependen de un número par de operadores fermiónicos, de la condición $P^2 = 1$ podemos tomar $\eta_a^2, \eta_b^2 = \pm 1$
(el signo menos será necesario para campos de Majorana).

- Entonces,

$$\begin{aligned} P\psi(t,\vec{x})P &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{-\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + \eta_b^* b^\dagger_{-\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{\vec{p},s} u^{(s)}(-\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\tilde{x}} + \eta_b^* b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(-\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\tilde{x}}\right) \\ &= \gamma^0 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\tilde{x}} - \eta_b^* b^\dagger_{\vec{p},s} v^{(s)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\tilde{x}}\right) \\ &= \eta_a \gamma^0 \psi(t,-\vec{x}), \quad \text{si } \eta_a = -\eta_b^*, \end{aligned} \tag{73}$$

donde primero se ha cambiado $\vec{p}$ por $-\vec{p}$ que implica sustituir px por $p\tilde{x}$ y luego

$$u^{(s)}(-\vec{p}) = \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}), \quad v^{(s)}(-\vec{p}) = -\gamma^0 v^{(s)}(\vec{p}). \tag{74}$$

Si el campo es de Majorana entonces $a = b$ y la condición $\eta_a = -\eta_a^*$ obliga a tomar $\eta_a = \pm\mathrm{i}$ ($\eta_a^2 = -1$), como habíamos anticipado. Para cualquier otro caso podemos tomar paridades reales, siendo la paridad intrínseca de un fermión $\eta_a = \pm 1$ opuesta a la de su antifermión $\eta_b = -\eta_a$.

Campos de espín $\frac{1}{2}$ | Paridad

- Si bien el valor de η_a (o η_b) es irrelevante para cualquier observable que involucre solo fermiones (o antifermiones), la diferencia de signo tiene consecuencias si ambos están presentes

  (vid. el sistema del positronio, estado ligado de electrón y positrón).

- Para un campo escalar, ignorando espinores e índices de espín, es fácil concluir que

$$P\phi(t,\vec{x})P = \eta_a \phi(t,-\vec{x}), \quad \text{si } \eta_a = \eta_b, \tag{75}$$

es decir, la paridad intrínseca de una partícula de espín cero y la de su antipartícula son iguales.

- Necesitamos que la inversión temporal T cambie

$$t \mapsto -t, \quad \vec{p} \mapsto -\vec{p}, \quad \vec{J} \mapsto -\vec{J}. \tag{76}$$

Notemos primero que si H es invariante bajo inversión temporal entonces T ha de ser un operador antiunitario pues $T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}T$.

Entonces para dos estados cualesquiera,

$$\langle Ta|Tb\rangle = \langle a|b\rangle^* = \langle b|a\rangle\,, \quad T(z\,|a\rangle) = z^* T\,|a\rangle\,. \tag{77}$$

La acción de T queda definida por

$$Ta_{\vec{p},s}T = a_{-\vec{p},-s}\,, \quad Tb_{\vec{p},s}T = b_{-\vec{p},-s}\,, \tag{78}$$

donde

$$a_{-\vec{p},-s} \equiv (a_{-\vec{p},2}, -a_{-\vec{p},1})\,, \quad b_{-\vec{p},-s} \equiv (b_{-\vec{p},2}, -b_{-\vec{p},1}). \tag{79}$$

▷ Por tanto,

$$\begin{aligned}
T\psi(t,\vec{x})T &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s T\left(a_{\vec{p},s}u^{(s)}(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\vec{p},s}v^{(s)}(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right)T \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{-\vec{p},-s}[u^{(s)}(\vec{p})]^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b^\dagger_{-\vec{p},-s}[v^{(s)}(\vec{p})]^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \\
&= \gamma^1\gamma^3 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{-\vec{p},-s}u^{(-s)}(-\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b^\dagger_{-\vec{p},-s}v^{(-s)}(-\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \\
&= \gamma^1\gamma^3 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p},s}u^{(s)}(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px'} + b^\dagger_{\vec{p},s}v^{(s)}(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px'}\right) \\
&= \gamma^1\gamma^3\,\psi(-t,\vec{x})\ , \qquad (80)
\end{aligned}$$

donde primero se ha usado que

$$u^{(-s)}(-\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\overline{\sigma}}(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*}) \\ \sqrt{p\overline{\sigma}}(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2\sqrt{p\sigma^*}\ \xi^{(s)*} \\ -\mathrm{i}\sigma^2\sqrt{p\overline{\sigma}^*}\ \xi^{(s)*} \end{pmatrix}$$

$$= -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} [u^{(s)}(\vec{p})]^* = -\gamma^1\gamma^3[u^{(s)}(\vec{p})]^*$$

$$\Rightarrow [u^{(s)}(\vec{p})]^* = \gamma^1\gamma^3 u^{(-s)}(-\vec{p}), \tag{81}$$

$$[v^{(s)}(\vec{p})]^* = \gamma^1\gamma^3 v^{(-s)}(-\vec{p}), \tag{82}$$

y después se ha cambiado s por $-s$ y $\vec{p}$ por $-\vec{p}$ que implica sustituir px por $-px'$ con $x' = (-t, \vec{x})$.

Campos escalares — Inversión temporal

- Para un campo escalar, es fácil obtener

$$T\phi(t,\vec{x})T = \phi(-t,\vec{x}). \tag{83}$$

C, P, T de bilineales fermiónicos

- A partir de las propiedades de transformación de $\psi(x)$ se pueden obtener las de los bilineales fermiónicos:

	C	P	T	CPT
$S(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)$	$S(x)$	$S(\tilde{x})$	$S(-\tilde{x})$	$S(-x)$
$P(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$	$P(x)$	$-P(\tilde{x})$	$P(-\tilde{x})$	$-P(-x)$
$V^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	$-V^\mu(x)$	$V_\mu(\tilde{x})$	$V_\mu(-\tilde{x})$	$-V^\mu(-x)$
$A^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$	$A^\mu(x)$	$-A_\mu(\tilde{x})$	$A_\mu(-\tilde{x})$	$-A^\mu(-x)$
$T^{\mu\nu}(x) = \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$	$-T^{\mu\nu}(x)$	$T_{\mu\nu}(\tilde{x})$	$-T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$	$T^{\mu\nu}(-x)$

con $\tilde{x} = (t, -\vec{x})$.

- Recordemos que en el gauge de radiación,

$$A^0(x) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0, \tag{84}$$

las tres componentes no nulas de $A^\mu(x)$ satisfacen una ecuación de Klein-Gordon sin masa,

$$\Box A^i = 0. \tag{85}$$

Sus soluciones son de la forma

$$\vec{A}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda) a_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \vec{\epsilon}^{\,*}(\vec{k},\lambda) a^*_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \tag{86}$$

con

$$\begin{aligned} &k^\mu = (\omega_{\vec{k}}, \vec{k}), \quad \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| && \Leftarrow \quad k^2 = 0, \\ &\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda) = 0 && \Leftarrow \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{aligned} \tag{87}$$

y $\vec{\epsilon}(\vec{k},1)$, $\vec{\epsilon}(\vec{k},2)$ dos vectores de polarización ortogonales entre sí.

▷ Hallemos los momentos conjugados,

$$\Pi^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \quad \text{pues } \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{88}$$

$$\Pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i}(x) = -\partial^0 A^i(x) = E^i(x) \quad \text{(campo eléctrico).} \tag{89}$$

Vemos que $A^0(x) = 0$ (en este gauge) y $\Pi^0(x) = 0$ (en general), así que no son variables dinámicas.

▷ Para cuantizar el campo electromagnético promovemos, como hasta ahora, $\vec{A}(x)$ a operador e imponemos

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{q},\lambda'}] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\delta_{\lambda\lambda'}\ , \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{q},\lambda'}] = 0, \tag{90}$$

donde $a^\dagger_{\vec{k},\lambda}$ ($a_{\vec{k},\lambda}$) son operadores sobre el espacio de Fock que crean (destruyen) fotones.

▷ Nótese que las relaciones de conmutación anteriores implican

$$
\begin{aligned}
[A^i(t,\vec{x}),E^j(t,\vec{y})] &= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}}\omega_{\vec{q}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\delta_{\lambda\lambda'}\\
&\quad\times\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{q}})t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}\sum_{\lambda,\lambda'}\epsilon^i(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j*}(\vec{q},\lambda')\right.\\
&\qquad\left.+\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}\sum_{\lambda,\lambda'}\epsilon^{i*}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j}(\vec{q},\lambda')\right\}\\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\sum_{\lambda}\epsilon^i(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j*}(\vec{k},\lambda)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\sum_{\lambda}\epsilon^{i*}(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j}(\vec{k},\lambda)\right\}\\
&= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\left\{\epsilon^i(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j*}(\vec{k},\lambda)+\epsilon^{i*}(-\vec{k},\lambda)\epsilon^{j}(-\vec{k},\lambda)\right\}\\
&= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\vec{k}^2}\right)\equiv \mathrm{i}g^{ij}\delta_{\mathrm{tr}}(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (91)
\end{aligned}
$$

▷ En el último paso se ha usado que el término entre llaves debe ser covariante bajo rotaciones y por tanto es una combinación de los tensores de dos índices bajo rotaciones que pueden construirse con δ^{ij} y k^i, es decir,

$$A\delta^{ij} + B\frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} = \frac{1}{2}\sum_\lambda \left\{\epsilon^i(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j*}(\vec{k},\lambda) + \epsilon^{i*}(-\vec{k},\lambda)\epsilon^j(-\vec{k},\lambda)\right\}. \tag{92}$$

Multiplicando por k^i, a partir de (87) tenemos que

$$Ak^j + Bk^j = 0 \Rightarrow A = -B \ , \tag{93}$$

y tomando, por ejemplo, $\vec{k} = (0,0,\omega_{\vec{k}})$, $\vec{\epsilon}(\vec{k},1) = (1,0,0)$ y $\vec{\epsilon}(\vec{k},2) = (0,1,0)$ basta mirar el término $i = j = 1$ para fijar

$$A = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \ . \tag{94}$$

▷ Si no fuera por el término $k^i k^j / \vec{k}^2$ en (91) habríamos obtenido

$$-\mathrm{i}\delta^{ij} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = -\mathrm{i}\delta^{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \mathrm{i}g^{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \,. \tag{95}$$

Pero este término se encarga de mantener la condición de transversalidad del campo electromagnético en el gauge de radiación ($\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}=0$), que proviene de $\nabla\cdot\vec{A}=0$ y también $\nabla\cdot\vec{E}=0$. Así,

$$[\nabla\cdot\vec{A}(t,\vec{x}), E^j(t,\vec{y})] = \nabla_x[\vec{A}(t,\vec{x}), E^j(t,\vec{y})] = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}(k^j - k^j) = 0 \,, \tag{96}$$

$$[A^i(t,\vec{x}), \nabla\cdot\vec{E}(t,\vec{y})] = \nabla_y[A^i(t,\vec{x}), \vec{E}(t,\vec{y})] = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}(k^i - k^i) = 0 \,. \tag{97}$$

Por eso hemos introducido en (91) la delta transversa $\delta_{\mathrm{tr}}(\vec{x}-\vec{y})$.

- Ya podemos construir el espacio de Fock actuando con $a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}$ sobre el vacío definido por $a_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle = 0$. Aplicando el orden normal a la expresión clásica, por razones que ya conocemos, obtenemos entonces

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \;\; :\vec{E}^2 + \vec{B}^2: = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \omega_{\vec{k}}\; a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}\;, \\
\vec{\mathbb{P}} &= \int \mathrm{d}^3x \;\; :\vec{E}\times\vec{B}: = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \vec{k}\; a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}\;.
\end{aligned} \tag{98}
$$

▷ Por tanto $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\; a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle$ es el estado de una partícula sin masa, energía $\omega_{\vec{k}}$ y momento $\vec{k}$ con dos estados de polarización que ahora analizaremos.

- Aplicando el teorema de Noether puede encontrarse (demuéstrese) que la cantidad conservada bajo rotaciones es

$$M^{ij} = \int \mathrm{d}^3x\ \partial_0 A^k (x^i \partial^j - x^j \partial^i) A_k + \int \mathrm{d}^3x\ (A^i \partial_0 A^j - A^j \partial_0 A^i). \tag{99}$$

El primer término es el momento angular orbital y el segundo es la parte de espín. Concentrémonos en el espín:

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int \mathrm{d}^3x\ \ :A^i \partial_0 A^j - A^j \partial_0 A^i: \\ &= \mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda',\lambda''} \Big(\epsilon^i(\vec{q},\lambda'')\epsilon^{j*}(\vec{q},\lambda') - \epsilon^{i*}(\vec{q},\lambda')\epsilon^j(\vec{q},\lambda'')\Big)\, a^\dagger_{\vec{q},\lambda'} a_{\vec{q},\lambda''}. \end{aligned} \tag{100}$$

Por tanto, usando (90),

$$a_{\vec{q},\lambda''} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} |0\rangle = [a_{\vec{q},\lambda''}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}] |0\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{k}) \delta_{\lambda,\lambda''} |0\rangle \tag{101}$$

obtenemos

$$S^{ij} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} |0\rangle = \mathrm{i} \sum_{\lambda'} \Big(\epsilon^i(\vec{k},\lambda)\epsilon^{j*}(\vec{k},\lambda') - \epsilon^{i*}(\vec{k},\lambda')\epsilon^j(\vec{k},\lambda)\Big)\, a^\dagger_{\vec{k},\lambda'} |0\rangle\,. \tag{102}$$

▷ Tomemos ahora $\vec{k} = (0, 0, \omega_{\vec{k}})$ y hallemos la helicidad de los fotones, es decir, el espín en la dirección del eje z, $S^3 = S^{12}$. Elijamos la base de estados de polarización lineal $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = (1, 0, 0)$ y $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) = (0, 1, 0)$, es decir, $\epsilon^i(\vec{k}, \lambda) = \delta^i_\lambda$. Entonces,

$$S^3 a^\dagger_{\vec{k},\lambda} |0\rangle = \mathrm{i} \sum_{\lambda'} (\delta^1_\lambda \delta^2_{\lambda'} - \delta^1_{\lambda'} \delta^2_\lambda) a^\dagger_{\vec{k},\lambda'} |0\rangle \Rightarrow \begin{array}{l} S^3 a^\dagger_{\vec{k},1} |0\rangle = +\mathrm{i} a^\dagger_{\vec{k},2} |0\rangle \\ S^3 a^\dagger_{\vec{k},2} |0\rangle = -\mathrm{i} a^\dagger_{\vec{k},1} |0\rangle \end{array} \tag{103}$$

Vemos que las polarizaciones lineales no son autoestados de helicidad. Sin embargo, sí lo son las polarizaciones circulares,

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) \pm \mathrm{i} \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)) \tag{104}$$

pues

$$S^3 a^\dagger_{\vec{k},+} |0\rangle = +a^\dagger_{\vec{k},+} |0\rangle , \quad a^\dagger_{\vec{k},+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger_{\vec{k},1} + \mathrm{i} a^\dagger_{\vec{k},2}) , \tag{105}$$

$$S^3 a^\dagger_{\vec{k},-} |0\rangle = -a^\dagger_{\vec{k},-} |0\rangle , \quad a^\dagger_{\vec{k},-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger_{\vec{k},1} - \mathrm{i} a^\dagger_{\vec{k},2}) . \tag{106}$$

▷ Por tanto, los estados $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\, a^\dagger_{\vec{k},\pm}\,|0\rangle$ describen partículas sin masa, espín 1 y helicidad ± 1.

- Conviene destacar finalmente que, a pesar de que la covariancia Lorentz está rota por la elección de este gauge, se puede comprobar que si se escriben los generadores de Poincaré en términos de operadores creación y destrucción se satisface el álgebra.

- Nos gustaría poder imponer una cuantización covariante,

$$[A^\mu(t,\vec{x}),\Pi^\nu(t,\vec{y})] = \mathrm{i}g^{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad [A^\mu(t,\vec{x}),A^\nu(t,\vec{y})] = 0 \ , \tag{107}$$

sin embargo eso no es posible pues, como hemos visto en (88) y (89), $\Pi^0(x) = 0$. En cambio, si el lagrangiano fuera

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \ , \tag{108}$$

que no es el langragiano de Maxwell, tendríamos

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \Rightarrow \begin{aligned} \Pi^0(x) &= -\partial_\mu A^\mu(x) \\ \Pi^i(x) &= -F^{0i} = E^i(x) \quad \text{(como antes)} \end{aligned} \tag{109}$$

▷ Reescribiendo

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \tag{110}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \Rightarrow \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial_\alpha A^\alpha\right) = 0 \\ &\Rightarrow \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\ &\Rightarrow \Box A^\nu = 0\,, \end{aligned} \tag{111}$$

es decir, A^μ tiene masa cero, donde se ha usado

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\ &\partial_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\alpha A^\alpha) = \partial^\nu \partial_\mu A^\mu\,, \end{aligned} \tag{112}$$

cuyas soluciones son

$$A^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda) a_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \epsilon^{\mu *}(\vec{k},\lambda) a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)\ . \tag{113}$$

▷ Como ahora no hemos impuesto $\epsilon^0 = 0$ ni $k_\mu \epsilon^\mu = 0$, el campo A^μ tiene cuatro grados de libertad, que etiquetamos mediante $\lambda = 0, 1, 2, 3$.
Obviamente el lagrangiano $\mathcal{L}'$ no es invariante gauge.
En particular, si tomamos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ entonces $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) = \delta^\mu_\lambda$, es decir,
$\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = (1, 0, 0, 0)$,
$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0)$,
$\epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0)$,
$\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1)$.
Solamente $\epsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\epsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ satisfacen $k_\mu \epsilon^\mu = 0$.

▷ Es fácil comprobar que las reglas de conmutación (107) implican

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{q},\lambda'}] = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) \ , \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\vec{k},\lambda}, a^\dagger_{\vec{q},\lambda'}] = 0 \ , \tag{114}$$

donde

$$\zeta_0 = -1 \ , \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \ . \tag{115}$$

- Los estados de una partícula,

$$\left|\vec{k},\lambda\right\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\, a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle \tag{116}$$

tienen norma negativa para $\lambda = 0$, ya que

$$\left\langle\vec{q},\lambda\middle|\vec{k},\lambda\right\rangle = 2\omega_{\vec{k}}\,\langle 0|\,a_{\vec{q},\lambda}a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle = 2\omega_{\vec{k}}\,\langle 0|\,[a_{\vec{q},\lambda},a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}]\,|0\rangle = \zeta_{\lambda}2\omega_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\;. \tag{117}$$

Esto no es aceptable, pues la normas se interpretan como probabilidades.
De todas formas, el lagrangiano $\mathcal{L}'$ no es el del electromagnetismo y, si lo fuera, los estados $\left|\vec{k},0\right\rangle$ y $\left|\vec{k},3\right\rangle$ no son físicos.

- Nos podemos plantear recuperar el electromagnetismo imponiendo que sobre los estados físicos,

$$\langle \text{fis}' | \, \partial_\mu A^\mu \, | \text{fis} \rangle = 0 \; . \tag{118}$$

Es decir, en lugar de tomar $\partial_\mu A^\mu = 0$ a nivel del lagrangiano, supondremos que el lagrangiano es $\mathcal{L}'$ pero imponemos la ecuación anterior sobre los estados físicos, lo que se conoce como cuantización de Gupta-Bleuler.

Veamos que en efecto esto es suficiente para eliminar del espacio de Fock todos los estados no físicos.

▷ Para ello, notemos que

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^- \tag{119}$$

donde hemos separado los estados de frecuencia positiva de los de frecuencia negativa,

$$\begin{aligned}(\partial_\mu A^\mu)^+ &= -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} k_\mu \epsilon^\mu(\vec{k},\lambda) a_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ (\partial_\mu A^\mu)^- &= \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} k_\mu \epsilon^{\mu*}(\vec{k},\lambda) a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \;.\end{aligned} \tag{120}$$

Como $(\partial_\mu A^\mu)^- = [(\partial_\mu A^\mu)^+]^\dagger$, la condición (118) se satisface siempre que

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ |\mathrm{fis}\rangle = 0 \;. \tag{121}$$

Además, como $(\partial_\mu A^\mu)^+$ es un operador lineal, si $|\mathrm{fis}_1\rangle$ y $|\mathrm{fis}_2\rangle$ son estados físicos también lo son una combinación arbitraria $\alpha\,|\mathrm{fis}_1\rangle + \beta\,|\mathrm{fis}_2\rangle$.

▷ Entonces, si tenemos un estado físico de una partícula

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda a^\dagger_{\vec{k},\lambda} |0\rangle \tag{122}$$

la condición (121) implica

$$0 = (\partial_\mu A^\mu)^+ |\psi\rangle = -\mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda,\lambda'} c_\lambda q_\mu \epsilon^\mu(\vec{q},\lambda') a_{\vec{q},\lambda'} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} |0\rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_\lambda \zeta_\lambda c_\lambda k_\mu \epsilon^\mu(\vec{k},\lambda) |0\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}}(c_0 + c_3) |0\rangle = 0 \Rightarrow c_0 + c_3 = 0$$

si $k^\mu = (\omega_{\vec{k}}, 0, 0, \omega_{\vec{k}})$ y $\epsilon^\mu(k,\lambda) = \delta^\mu_\lambda$. (123)

Es decir, un estado físico es:

- Una combinación arbitraria $|\psi_T\rangle$ de estados transversos creados por $a^\dagger_{\vec{k},1}$ y $a^\dagger_{\vec{k},2}$, como esperábamos.
- Pero también es física una combinación de la forma ($c_0 + c_3 = 0$):

$$|\phi\rangle = (a^\dagger_{\vec{k},0} - a^\dagger_{\vec{k},3}) |0\rangle \ . \tag{124}$$

▷ Así que el subespacio de estados físicos de una partícula de momento $\vec{k}$ más general es de la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle \ , \quad |\psi_T\rangle = \sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle \ , \tag{125}$$

donde vamos a ver que, primero

$$\langle\phi|\phi\rangle = 0\,, \quad \langle\psi_T|\phi\rangle = 0 \Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle \tag{126}$$

y, segundo, $|\psi\rangle$ y $|\psi_T\rangle$ tienen la misma energía, momento, momento angular, etc. Por tanto, podemos introducir una relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \sim |\psi_T\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle \tag{127}$$

y elegir cualquier $|\psi\rangle$ de la clase $|\psi_T\rangle$ ya sea transverso o no, pues esta elección no tiene consecuencias físicas.

▷ En efecto, demostremos lo primero,

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle &= \langle 0|\,(a_{\vec{k},0}-a_{\vec{k},3})(a^\dagger_{\vec{k},0}-a^\dagger_{\vec{k},3})\,|0\rangle = \langle 0|\,(a_{\vec{k},0}a^\dagger_{\vec{k},0}+a_{\vec{k},3}a^\dagger_{\vec{k},3})\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,([a_{\vec{k},0},a^\dagger_{\vec{k},0}]+[a_{\vec{k},3},a^\dagger_{\vec{k},3}])\,|0\rangle = 0 \end{aligned} \tag{128}$$

$$\langle\psi_T|\phi\rangle = \langle 0|\,(c_1^* a_{\vec{k},1}+c_2^* a_{\vec{k},2})(a^\dagger_{\vec{k},0}-a^\dagger_{\vec{k},3})\,|0\rangle = 0\;. \tag{129}$$

▷ Y ahora demostremos lo segundo: la energía y el momento vienen dados por

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\left(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda}\right) \tag{130}$$

$$\vec{\mathbb{P}} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\vec{k}\left(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a^\dagger_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda}\right) . \tag{131}$$

Si calculamos los elementos de matriz de estos operadores, que contienen siempre la combinación $(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},0} + a^\dagger_{\vec{k},3}a_{\vec{k},3})$, entre dos estados físicos, tengamos en cuenta que sobre un estado físico $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle$,

$$(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})\,|\psi\rangle = c(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})\,|\phi\rangle = c(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})(a^\dagger_{\vec{k},0} - a^\dagger_{\vec{k},3})\,|0\rangle = 0 \tag{132}$$

y, por tanto

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{fis}'|\,(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},0} + a^\dagger_{\vec{k},3}a_{\vec{k},3})\,|\mathrm{fis}\rangle &= \langle \mathrm{fis}'|\,(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},0} + a^\dagger_{\vec{k},0}(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3}) + a^\dagger_{\vec{k},3}a_{\vec{k},3})\,|\mathrm{fis}\rangle \\ = \langle \mathrm{fis}'|\,(-a^\dagger_{\vec{k},0}a_{\vec{k},3} + a^\dagger_{\vec{k},3}a_{\vec{k},3})\,|\mathrm{fis}\rangle &= -\,\langle \mathrm{fis}'|\,(a^\dagger_{\vec{k},0} - a^\dagger_{\vec{k},3})a_{\vec{k},3})\,|\mathrm{fis}\rangle = 0\ ,\end{aligned} \tag{133}$$

i.e. a energía y momento solamente contribuyen los osciladores transversos.

Campo electromagnético | C, P, T

- Finalmente, hallemos las propiedades de transformación de $A^\mu(x)$ bajo C, P y T.

▷ Como $C\overline{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, para que C sea una simetría del lagrangiano de QED necesitamos que $\mathcal{L}_{\text{QED}} \supset q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ permanezca invariante, es decir

$$CA^\mu(x)C = -A^\mu(x) \Rightarrow Ca_{\vec{k},\pm}C = \eta_C a_{\vec{k},\pm} \,, \tag{134}$$

de donde la conjugación de carga del fotón es $\eta_C = -1$.

▷ En cuanto a P, como $\vec{A}(x)$ es un vector tenemos que

$$PA^\mu(t,x)P = A_\mu(t,-\vec{x}) \Rightarrow Pa_{\vec{k},\pm}P = \eta_P a_{-\vec{k},\pm} \,, \tag{135}$$

donde la paridad intrínseca del fotón es $\eta_P = -1$, como corresponde a un estado que tiene momento angular $J = 1$, consistentemente con la paridad de un sistema de momento angular orbital $L = 1$, cuya función de onda viene dada por el armónico esférico $Y_L^M(\theta,\phi)$, que vale $(-1)^L = -1$.

▷ Por último,

$$TA^\mu(t,\vec{x})T = A_\mu(-t,\vec{x}) \Rightarrow Ta_{\vec{k},\pm}T = a_{-\vec{k},\mp} \,, \tag{136}$$

del mismo modo que el vector $T[\overline{\psi}(t,\vec{x})\gamma^\mu\psi(t,\vec{x})]T = \overline{\psi}(-t,\vec{x})\gamma_\mu\psi(-t,\vec{x})$.

- Con esto completamos las propiedades de transformación bajo C, P y T de los campos escalares (70, 75, 83), espinoriales (66, 73, 80)[a] y vectoriales[b] (134, 135, 136), que son los ladrillos que se usan para construir los lagrangianos que describen la física de partículas elementales. Sus interacciones involucran productos invariantes Lorentz de los campos y sus derivadas.

▷ Sabemos que las interacciones débiles violan C, P, CP y T, aunque las interacciones fuertes y electromagnéticas preservan las tres simetrías discretas.

▷ El teorema CPT establece que cualquier teoría cuántica de campos (lagrangiano hermítico invariante Lorentz) es invariante bajo la acción combinada de CPT,

$$CPT\,\mathcal{L}(x)\,CPT = \mathcal{L}(-x)\;. \tag{137}$$

Esto puede comprobarse sobre cualquier combinación hermítica de campos escalares y bilineales covariantes contraídos con derivadas o campos vectoriales.

---

[a] En particular, es útil deducir de ellas las propiedades de transformación de los bilineales fermiónicos a partir de las de los campos espinoriales,

[b] Para un campo vectorial complejo la conjugación de carga no es (134) sino $CA^{\mu}(x)C = -A^{\mu *}(x)$.