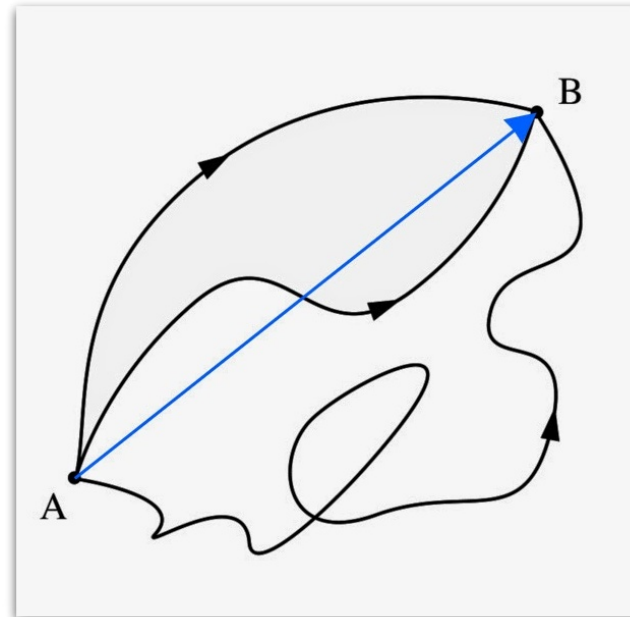


Teoría Cuántica de Campos Avanzada (I)

Formalismo de integrales de camino



José Ignacio Illana

Departamento de Física Teórica y del Cosmos



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Programa

1. Introducción y motivación
2. Repaso del formalismo de cuantización canónica
3. La integral de camino en mecánica cuántica
4. Cuantización funcional de campos escalares
 - ▷ Funciones de Green
 - ▷ Rotación de Wick
 - ▷ Derivadas funcionales y funcional generador
 - ▷ Campo escalar libre
 - ▷ Interpretación en términos de partículas

Programa

5. Campos en interacción. Teoría de perturbaciones
 - ▷ Funcional generador y funciones de Green
 - ▷ Funcional generador de diagramas conectados
 - ▷ Funcional generador de diagramas 1PI
 - ▷ Reglas de Feynman
 - ▷ Acción efectiva
 - ▷ Campos en el espacio Euclídeo y analogía con mecánica estadística
6. Cuantización funcional de campos fermiónicos
7. Cuantización funcional del campo electromagnético
8. Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva
9. Fórmula LSZ
10. Teorema óptico. Partículas inestables. Relaciones de dispersión

Introducción y motivación

- En 1920s, Schrödinger, Heisenberg y otros: formulación habitual de la MQ.
 - En 1933, Dirac notó que, en contraste con MC, la acción parecía irrelevante. Así que especuló, sin éxito, con que el propagador de la MQ fuera $\exp\{iS/\hbar\}$ con S la acción clásica a lo largo del camino clásico.
 - En 1948, Feynman logró derivar una nueva formulación de la MQ: escribir propagador como una suma sobre todos los posibles caminos (no solamente el camino clásico) entre un estado inicial y otro final, cada uno de los cuales contribuye con $\exp\{iS/\hbar\}$.
- ⇒ la partícula cuántica toma todos los caminos y la amplitud de probabilidad de cada uno se suma, de acuerdo con el principio de superposición de la MQ.

Introducción y motivación

- En realidad, en MQ de una partícula las integrales de camino no ofrecen ningún resultado nuevo y los cálculos son más difíciles.
- Sin embargo, muy útil en situaciones complicadas, como en teoría de campos.
- En cualquier caso, el formalismo de integrales de camino constituye una aportación fundamental a la MQ:
 - (i) Nueva forma muy interesante e intuitiva de visualizar los procesos cuánticos.
 - (ii) El límite clásico de la MQ se entiende de una forma muy natural.

Introducción y motivación

- En TQC (relativista o no) las integrales de camino juegan un papel central:
 - (i) Forma relativamente sencilla de cuantizar los campos: **cuantización funcional**. Permiten obtener sistemáticamente las funciones de Green (amplitudes de probabilidad de procesos físicos: *scattering* y desintegración de partículas).
 - (ii) El tratamiento con integrales de camino de las teorías de campos gauge (especialmente las no abelianas) es muy elegante y casi imprescindible: **gauge fixing** y **campos fantasma** aparecen sin esfuerzo.
 - (iii) Fenómenos no perturbativos, como solitones e instantones, se pueden entender más fácilmente mediante integrales de camino.
 - (iv) Ponen en evidencia la estrecha relación entre mecánica estadística y mecánica cuántica, o entre teoría estadística de campos y teoría cuántica de campos.

Repaso del formalismo de cuantización canónica

- Un sistema clásico con n grados de libertad $q_i, i = 1, \dots, n$, viene descrito por el lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i)$. En el formalismo hamiltoniano se sustituyen las velocidades \dot{q}_i por los momentos conjugados p_i ,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \quad (1)$$

La cuantización canónica consiste en promover a operadores las coordenadas (\hat{q}_i) y los momentos (\hat{p}_i) e imponer **relaciones de conmutación** (a tiempos iguales, en la imagen de Heisenberg):

$$[\hat{q}_i(t), \hat{p}_j(t)] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2)$$

- La generalización a un medio continuo descrito por un campo escalar $\phi(x)$ es

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_\phi(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (3)$$

Campos bosónicos (fermiónicos) \Leftrightarrow relaciones de conmutación (anticommutación).

Repaso del formalismo de cuantización canónica

- Los campos cuánticos libres son combinaciones de operadores creación y aniquilación de modos partícula y antipartícula con cuadrimomento bien definido, que forman un espacio de Fock de estados multipartícula.
- En presencia de interacciones, la fórmula LSZ nos permite escribir la matriz de *scattering* en términos de funciones de Green: valores esperados en el vacío de productos de campos ordenados temporalmente.
- Expresando los campos en la imagen de interacción las funciones de Green se hallan perturbativamente, haciendo uso del teorema de Wick.

La integral de camino en MQ

Para comprender el formalismo de integrales de camino, consideremos el sistema cuántico más simple: una partícula no relativista de masa m que se mueve en una dimensión sometida a un potencial V . Su hamiltoniano (insertamos \hbar y $\hat{}$) es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) , \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar . \quad (4)$$

Recordemos que en la imagen de Schrödinger los estados evolucionan con el tiempo,

$$|\psi_S\rangle (t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi_S\rangle (0) \quad (5)$$

mientras que en la imagen de Heisenberg los estados son independientes del tiempo,

$$|\psi_H, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar} |\psi_S\rangle (t) \quad (6)$$

(aunque recuerdan el t en que se han definido) y los operadores evolucionan.

La integral de camino en MQ

En la imagen de Heisenberg llamaremos $|x, t_i\rangle$ al vector que en un instante t_i es autoestado del operador posición $\hat{x}(t_i)$ con valor x , es decir,

$$\hat{x}(t_i) |x, t_i\rangle = x |x, t_i\rangle \quad (7)$$

donde

$$|x, t_i\rangle = e^{i\hat{H}t_i/\hbar} |x_i\rangle \quad (8)$$

siendo $|x_i\rangle \equiv |x\rangle(t_i)$ el mismo estado escrito en la imagen de Schrödinger.

Supongamos que queremos calcular la amplitud de probabilidad de que la partícula viaje desde un punto x_i a otro punto x_f en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. En el formalismo canónico esta amplitud viene dada por

$$\mathcal{A} = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} | x_i \rangle \quad (9)$$

La integral de camino en MQ

Nótese que en cada instante fijo t , los estados $|x, t\rangle$ forman un conjunto completo,

$$1 = \int dx |x, t\rangle \langle x, t| \quad (10)$$

donde en adelante se sobreentiende que las integrales van desde $-\infty$ hasta ∞ .

Tomemos tiempos intermedios $t_n \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ con $t_i \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_N \equiv t_f$,

$$t_n = t_0 + n\delta t, \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}. \quad (11)$$

Entonces la amplitud (9) puede escribirse

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int dx_1 \langle x_f, t_f | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 \langle x_f, t_f | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} \langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

La integral de camino en MQ

donde $x_i \equiv x_0$, $x_f \equiv x_N$. Y para δt suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}\langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle &= \langle x_{n+1} | e^{-i\hat{H}\delta t/\hbar} | x_n \rangle \\ &= \langle x_{n+1} | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle + \mathcal{O}(\delta t)^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Utilizando ahora la base de momentos

$$1 = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (14)$$

y la siguiente normalización de la onda plana,

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{ipx/\hbar} \quad (15)$$

que es consistente con

$$\delta(x - y) = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | y \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(x-y)/\hbar} \quad (16)$$

La integral de camino en MQ

podemos escribir, despreciando términos de orden $(\delta t)^2$,

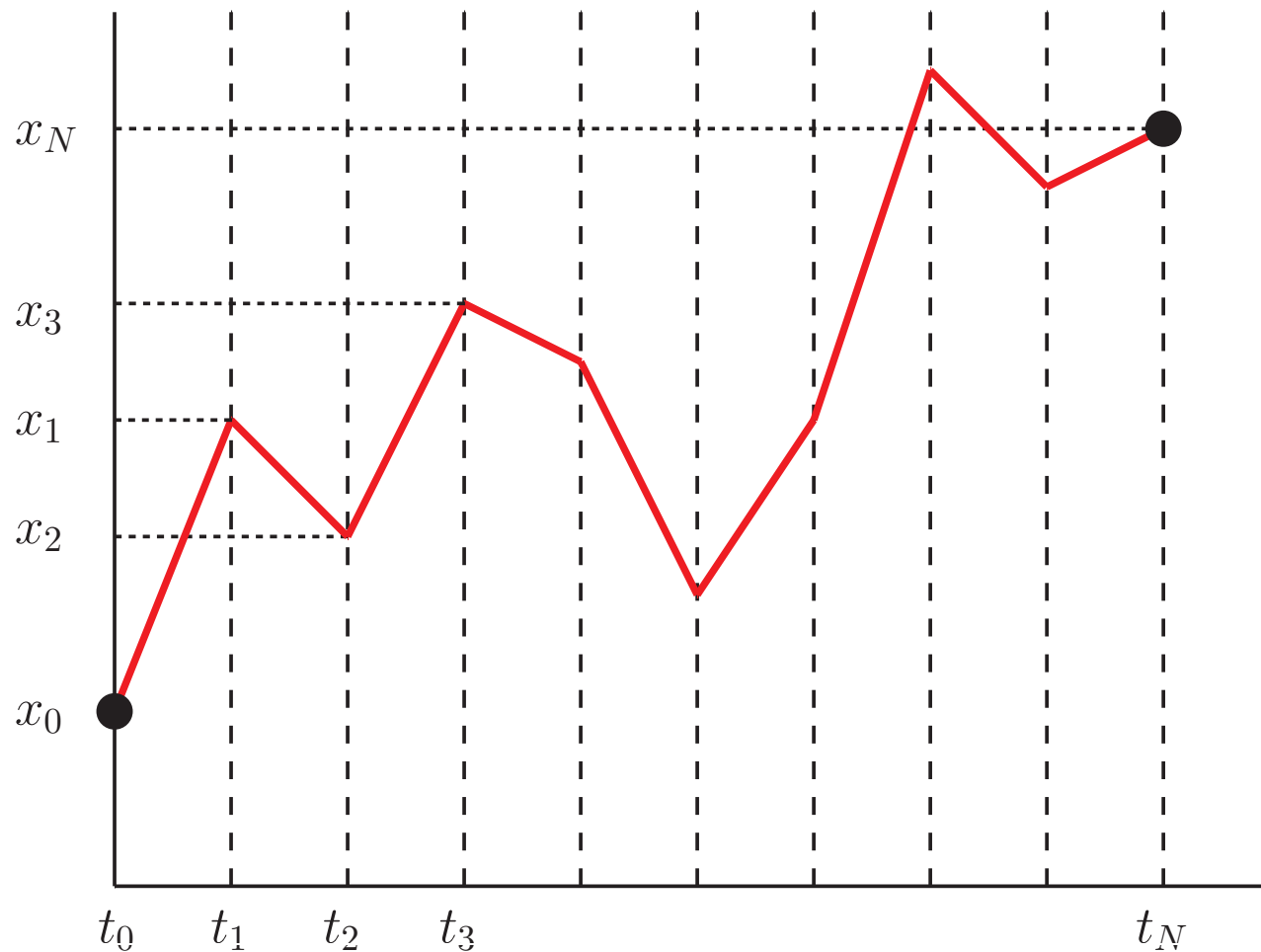
$$\begin{aligned}
 \langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle &= \langle x_{n+1} | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle \\
 &= \int dp_n \langle x_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle \\
 &= \int dp_n \langle x_{n+1} | p_n \rangle [1 - iH(p_n, x_n)\delta t/\hbar] \langle p_n | x_n \rangle \\
 &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x_{n+1}-x_n)/\hbar} e^{-iH(p_n, x_n)\delta t/\hbar} \\
 &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_n \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} - H(p_n, x_n) \right] \delta t \right\} . \quad (17)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (12) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_n \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} - H(p_n, x_n) \right] \delta t \right\} . \quad (18)
 \end{aligned}$$

La integral de camino en MQ

Nótese que en la expresión anterior estamos integrando sobre todos los valores posibles de x_1, \dots, x_{N-1} y que cada conjunto de valores define un camino $x(t)$ dado por la interpolación de $x(t_0) = x_0, \dots, x(t_N) = x_N$, con extremos fijos:



La integral de camino en MQ

Hay además una integral sobre N momentos p_0, \dots, p_{N-1} . Esta expresión es por tanto la versión discretizada de la [integral funcional](#)

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{x} - H(p, x)] \right\} \quad (19)$$

donde las funciones $x(t)$ están fijas en los extremos, pero las $p(t)$ no. La medida funcional es la integral estándar sobre el espacio fásico.

En nuestro caso (4) el potencial no depende de las velocidades. Podemos hacer la integral sobre los momentos. La contribución de $V(x)$ factoriza y el resto se obtiene de

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -p_n^2 \frac{i\delta t}{2m\hbar} + p_n \frac{i(x_{n+1} - x_n)}{\hbar} \right\} = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\delta t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(x_{n+1} - x_n)^2}{2\hbar\delta t} \right\} \quad (20)$$

donde se ha usado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} e^{-aw^2 + bw} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{b^2/(4a)} \quad (21)$$

y se ha prolongado analíticamente el integrando oscilatorio tratando $i\delta t$ como real.

La integral de camino en MQ

Así que,

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} \right)^2 - V(x_n) \right] \delta t \right\} . \end{aligned} \quad (22)$$

La expresión anterior es la versión discretizada de la integral funcional:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] \right\} . \quad (23)$$

[$\mathcal{D}x(t)$ involucra una normalización que en la versión de campos $\mathcal{D}\phi$ será irrelevante]

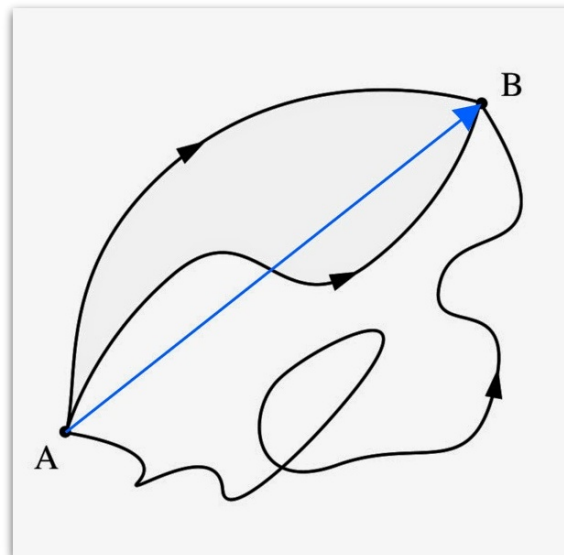
La integral de camino en MQ

Es decir,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right\} \quad (24)$$

donde la acción $S[x(t)]$ es un **funcional** de todos los posibles caminos, dada por:

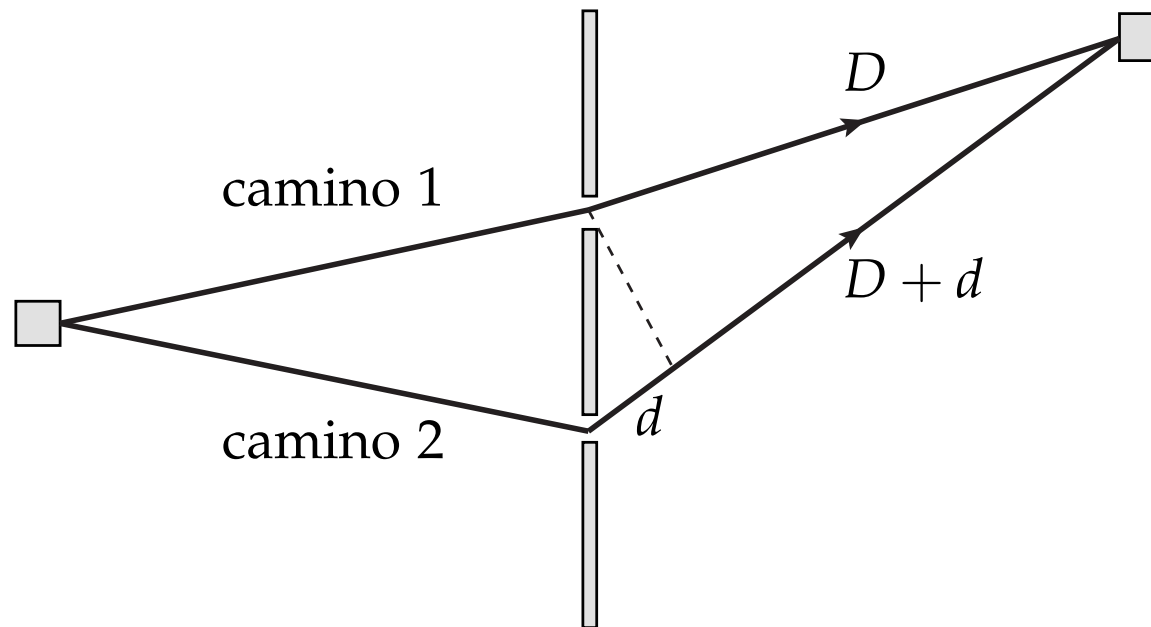
$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}), \quad L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (25)$$



La integral de camino en MQ

El resultado que acabamos de obtener era esperable. En MQ, cuando un proceso puede tener lugar por varios caminos la amplitud de probabilidad es la suma coherente (principio de superposición) de las amplitudes por cada camino.

Debemos interpretar el símbolo $\mathcal{D}x(t)$ como **suma sobre todos los caminos**. Piénsese en el experimento de la doble rendija:



La integral de camino en MQ

Que la fase de cada una de las amplitudes sea sencillamente la acción dividida por \hbar también tiene sentido: la diferencia de fase entre los dos caminos para una partícula que pueda pasar por ambas rendijas es

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{mv_2^2 t}{2} - \frac{mv_1^2 t}{2} \right) \approx \frac{mDd}{\hbar t} \approx \frac{pd}{\hbar} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad (26)$$

donde se ha usado que los caminos 1 y 2 se recorren con velocidades $v_1 = D/t$ y $v_2 = (D + d)/t$, respectivamente, siendo $d \ll D$, de modo que $v = v_1 \approx v_2$, y se ha introducido la relación debida a de Broglie $p = h/\lambda$ con $p = mv$.

La integral de camino en MQ

Además, en el **límite clásico** ($\hbar \rightarrow 0$) obtenemos directamente que solamente hay un camino que contribuye, el que minimiza la acción, como **postula** el principio de Hamilton.

En efecto, la **aproximación de fase estacionaria** establece que la única contribución a la amplitud de probabilidad cuando $S \gg \hbar$ es la que corresponde al camino clásico, en el que la variación de la acción es

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} S[x(t)] \Big|_{\text{cl}} = 0 \quad (27)$$

La integral de camino en MQ

Finalmente vamos a descubrir otro resultado interesante que nos será útil después. Hemos escrito la amplitud de probabilidad $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ como una integral de camino,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS/\hbar}, \quad S = \int_{t_i}^{t_f} dt L. \quad (28)$$

Veamos ahora que el elemento de matriz del operador posición en la imagen de Heisenberg $\hat{x}(t)$ entre esos mismos estados, en un instante t_1 cualquiera entre t_i y t_f , es la integral de camino pesada por la función $x(t_1)$,

$$\langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) e^{iS/\hbar} \quad (29)$$

y, lo que es aún más interesante, el elemento de matriz del **producto ordenado temporal** de n operadores posición es la integral de camino del producto de funciones,

$$\langle x_f, t_f | T\{\hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n)\} | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) \cdots x(t_n) e^{iS/\hbar} \quad (30)$$

La integral de camino en MQ

Probémoslo. Nótese que la integral sobre todas las funciones $x(t)$ con extremos fijos la podemos denotar como

$$\int \mathcal{D}x \equiv \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} [dx] = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_1)=\bar{x}} [dx] \int_{x(t_1)=\bar{x}}^{x(t_f)=x_f} [dx] , \quad (31)$$

que hemos separado por conveniencia en dos trozos. También podemos separar

$$\int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_1} dt L + \int_{t_1}^{t_f} dt L , \quad (32)$$

así que

La integral de camino en MQ

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}x \, x(t_1) e^{iS/\hbar} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \left(\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_1)=\bar{x}} [dx] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_1} dt L \right\} \right) \bar{x} \left(\int_{x(t_1)=\bar{x}}^{x(t_f)=x_f} [dx] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} dt L \right\} \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \langle x_f, t_f | \bar{x}, t_1 \rangle \bar{x} \langle \bar{x}, t_1 | x_i, t_i \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | \bar{x}, t_1 \rangle \langle \bar{x}, t_1 | x_i, t_i \rangle \\
 &= \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle .
 \end{aligned} \tag{33}$$

Por otro lado, como los $x(t_k)$ son números, que conmutan, podemos reordenar de mayor a menor todos los tiempos $\{t_1, \dots, t_n\}$ de modo que $\bar{t}_1 > \dots > \bar{t}_n$ y encontrar trivialmente, iterando el procedimiento anterior, que

$$\int \mathcal{D}x \, x(t_1) \cdots x(t_n) e^{iS/\hbar} = \int \mathcal{D}x \, x(\bar{t}_1) \cdots x(\bar{t}_n) e^{iS/\hbar} = \langle x_f, t_f | T\{\hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n)\} | x_i, t_i \rangle . \tag{34}$$

Podríamos haber hecho toda la discusión de la sección anterior suponiendo un sistema de partículas descrito por un conjunto finito de coordenadas generalizadas $\{q_j(t)\}$ donde j va desde 1 hasta el número de grados de libertad.

Bastaría entonces cambiar la integral funcional $\int [dx]$ por $\int \prod_j [dq_j]$.

Si en cambio tenemos un **medio continuo** el sistema viene descrito por un **campo**, una función de las coordenadas espaciales y el tiempo. Consideraremos para empezar el caso más simple, un campo escalar,

$$\{q_j(t)\} \longrightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) . \quad (35)$$

Entonces la amplitud de transición, análoga a (24), desde una configuración inicial del campo $\phi_i(\mathbf{x})$ en t_i a otra final $\phi_f(\mathbf{x})$ en t_f es

$$\langle \phi_f(\mathbf{x}), t_f | \phi_i(\mathbf{x}), t_i \rangle = \int_{\phi(t_i, \mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})}^{\phi(t_f, \mathbf{x}) = \phi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L} \right\} \quad (36)$$

donde se ha introducido la densidad lagrangiana a partir de

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (37)$$

y se supone un potencial independiente de derivadas de campos con lo que el hamiltoniano es cuadrático en los momentos, que pueden integrarse como en (20):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) . \quad (38)$$

La medida de integración $\mathcal{D}\phi$ involucra de nuevo una constante complicada que no necesitaremos escribir explícitamente.

Ahora tomaremos $|\phi_i(\mathbf{x}), t_i = -\infty\rangle \equiv |0, -\infty\rangle$, $|\phi_f(\mathbf{x}), t_f = +\infty\rangle \equiv |0, +\infty\rangle$ (el **vacío**) como configuraciones inicial y final de los campos en $t \rightarrow \mp\infty$, respectivamente. Ésas serán nuestras condiciones de contorno en adelante. Entonces (36) se convierte en

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS/\hbar} , \quad S = \int d^4x \mathcal{L} . \quad (39)$$

También podemos hallar, en analogía con (30), los elementos de matriz de productos ordenados temporales de operadores de campos cuánticos como

$$\langle 0, +\infty | T\{\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)\} | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS/\hbar} . \quad (40)$$

A partir de ahora, denotaremos el vacío inicial simplemente como $|0\rangle \equiv |0, -\infty\rangle$. Si el **vacío es estable**, entonces al dejarlo evolucionar entre $-\infty$ y $+\infty$ seguiremos encontrando el mismo vacío, lo que en mecánica cuántica significa que ambos estados difieren a lo sumo en una fase:

$$|0, +\infty\rangle = e^{i\alpha} |0, -\infty\rangle \Rightarrow e^{-i\alpha} = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle . \quad (41)$$

Aplicando (39) obtenemos esa fase y podemos escribir

$$\langle 0 | T\{\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)\} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS/\hbar}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS/\hbar}} \quad (42)$$

[la normalización de la medida de integración se cancela entre numerador y denominador]

- ▷ Hemos expresado los elementos de matriz en el vacío de productos ordenados temporales de operadores de campos en términos de integrales de camino. Estos objetos se llaman **funciones de n puntos** o **funciones de Green** pues, como veremos, son funciones de Green $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ de operadores diferenciales.
- ▷ Los campos que aparecen en las expresiones anteriores no son en principio libres, sino sometidos a un $V(\phi)$. En el formalismo canónico (campos son operadores), las funciones de Green se obtienen escribiendo el miembro de la izqda en la imagen de interacción y aplicando el th de Wick a un desarrollo perturbativo.
- ▷ Calcularemos las funciones de Green en el formalismo de integrales de camino (campos son funciones), primero para campos libres y después en interacción. Para ello manipularemos el miembro de la derecha de (42). La ventaja es que, en principio, este lado de la ecuación está también definido más allá de la teoría de perturbaciones, lo que permite calcularlo con otros procedimientos, por ejemplo, discretizando el espaciotiempo en un **retículo** (*lattice*).
- ▷ Pero antes, tenemos que incidir en un detalle importante que hemos ignorado.

En el caso de **una partícula**, hemos visto en (24) que la amplitud de la transición entre x_i, t_i y x_f, t_f viene dada por

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}) \right\} \quad (43)$$

con la condición de contorno $x(t_i) = x_i, x(t_f) = x_f$, siendo $H = p^2 / (2m) + V(x)$, lo que es suficientemente general para nuestros propósitos.

Pero en **teoría cuántica de campos** las partículas son **creadas** (en una colisión o en una desintegración) en t_i y **destruidas** al ser observadas (detección) en t_f . El acto de creación puede representarse mediante una **fente** y el de destrucción por un sumidero, que puede verse también como la desaparición de la fuente. Lo que necesitamos conocer es la **amplitud de la transición vacío-vacío en presencia de una fuente** que llamaremos $J(t)$, es decir,

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \quad (t_f = -t_i \rightarrow \infty) . \quad (44)$$

Esta representación se debe a Schwinger (1969) y consiste en modificar el lagrangiano

$$L \longrightarrow L + \hbar J(t)x(t) . \quad (45)$$

La fuente $J \neq 0$ solamente entre t_i y t_f , siendo $T_i < t_i < t_f < T_f$. Entonces

$$\langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{T_i}^{T_f} dt (L + \hbar Jx) \right\} \quad (46)$$

que podemos separar en

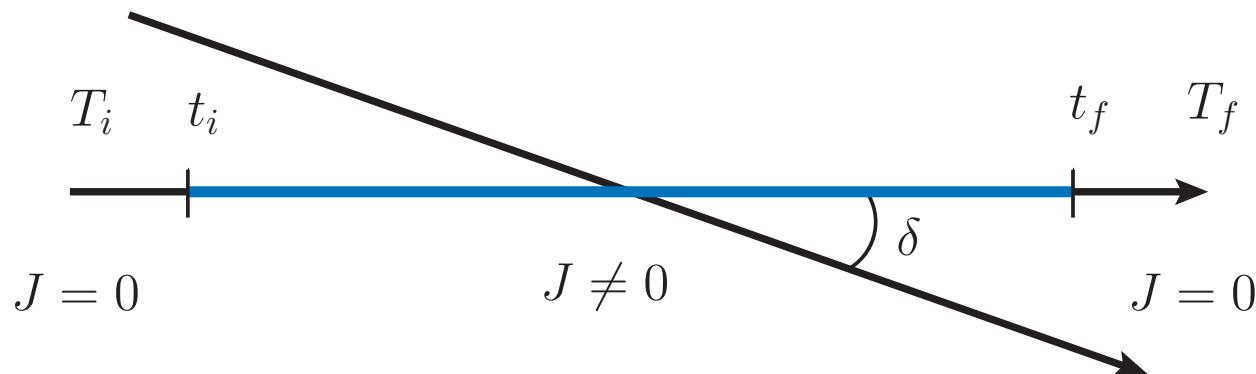
$$\langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J = \int dx' dx \langle x_f, T_f | x', t_f \rangle \langle x', t_f | x, t_i \rangle_J \langle x, t_i | x_i, T_i \rangle . \quad (47)$$

Ahora usamos (8) e introducimos un conjunto completo de autoestados de la energía $\varphi_n(x) = \langle x | E_n \rangle$ con lo que ...

$$\langle x_f, T_f | x', t_f \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}(T_f - t_f)} | x' \rangle = \sum_m \varphi_m(x_f) \varphi_m^*(x') e^{-iE_m(T_f - t_f)/\hbar} \quad (48)$$

$$\langle x, t_i | x_i, T_i \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}(t_i - T_i)} | x_i \rangle = \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^*(x_i) e^{-iE_n(t_i - T_i)/\hbar} . \quad (49)$$

Si tomamos el límite $T_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$ y $T_f \rightarrow +\infty e^{-i\delta}$, con un ángulo de rotación arbitrario $0 < \delta \leq \pi/2$, conseguimos que a las sumatorias anteriores solamente contribuya el estado con E_n más pequeño, E_0 , (**estado fundamental** \equiv **vacío**). Esto es así porque $\text{Im}T_i = i|T_i| \sin \delta$ y entonces el término $(i/\hbar)E_n T_i$ tiene una parte real negativa que produce un factor de supresión $e^{-(1/\hbar)E_n|T_i| \sin \delta}$. Idem para término T_f .



Entonces,

$$\lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} e^{-i\delta} \langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J = \lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} e^{-i\delta} \varphi_0(x_f) \varphi_0^*(x_i) e^{-iE_0(T_f - T_i)/\hbar} \\ \times e^{iE_0(t_f - t_i)/\hbar} \int dx' dx \varphi_0^*(x') \varphi_0(x) \langle x', t_f | x, t_i \rangle_J \quad (50)$$

Si ahora tomamos $t_f = -t_i \rightarrow \infty$, de la expresión anterior obtenemos:

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J = \frac{\lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} e^{-i\delta} \langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J}{\lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty \\ T_f \rightarrow +\infty}} e^{-i\delta} \varphi_0(x_f) \varphi_0^*(x_i) e^{-iE_0(T_f - T_i)/\hbar}} \quad (51)$$

pues $\langle x, t | E_0 \rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} \langle x | E_0 \rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} \varphi_0(x)$ y la segunda línea de (50) vale

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \equiv \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \int dx' dx \langle E_0 | x', t_f \rangle \langle x', t_f | x, t_i \rangle_J \langle x, t_i | E_0 \rangle \quad (52)$$

El denominador de (51) es simplemente un factor numérico. El numerador es el término importante y viene dado por (46) tomando un límite de tiempos complejos:

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \propto \lim_{\substack{T_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta} \\ T_f \rightarrow +\infty e^{-i\delta}}} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{T_i}^{T_f} dt (L + \hbar Jx) \right\}. \quad (53)$$

Nótese que, en vez de hacer la [rotación de Wick](#), podríamos haber aislado igualmente la contribución del estado fundamental añadiendo al hamiltoniano en (48) y en (49) un término $-\frac{1}{2}i\epsilon x^2$ con $\epsilon > 0$. Esto es equivalente a añadir $+\frac{1}{2}i\epsilon x^2$ a L , así que tenemos alternativamente

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \propto \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(L + \hbar Jx + \frac{1}{2}i\epsilon x^2 \right) \right\} \quad (54)$$

donde ahora los tiempos se integran sobre la recta real y tomamos $\epsilon \rightarrow 0^+$ al final para lograr nuestro propósito sin alterar el lagrangiano. Ésta es la [prescripción de Feynman](#).

De forma análoga se procede si en vez de una partícula tenemos un campo.

Como comentario final es importante notar que la introducción de un término complejo apropiado en el lagrangiano hace posible que la [integral de camino \(42\)](#) sea **convergente**, lo que está relacionado con la ordenación temporal y la [causalidad](#).

Una versión simplificada del mismo tipo de integral es

$$\int_0^{\infty} dt e^{izt} = \frac{i}{z} \quad \text{si } \text{Im}z > 0, \quad (55)$$

que solamente es convergente si z tiene una parte imaginaria no nula y positiva, aunque sea pequeña.

Vamos ya a calcular las funciones de Green en el formalismo de integrales de camino, primero para campos libres y después en interacción.

Nota: En adelante, utilizaremos unidades naturales ($\hbar = 1$).

Definimos (en cuatro dimensiones) la **derivada funcional**, $\delta/\delta J(x)$, a partir de

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x - y) \quad \text{o bien} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x) . \quad (56)$$

Se trata de una generalización a funciones continuas de la regla para vectores,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_i . \quad (57)$$

Para hacer derivadas funcionales de funcionales más complicados basta con aplicar la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left\{ i \int d^4y J(y)\phi(y) \right\} = i\phi(x) \exp \left\{ i \int d^4y J(y)\phi(y) \right\} . \quad (58)$$

Y si el funcional depende de derivadas de la función J , integramos por partes antes de hacer la derivada funcional:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \partial_\mu J(y) V^\mu(y) = -\partial_\mu V^\mu(x) . \quad (59)$$

Cuantización funcional de campos escalares

Funcional generador

El objeto básico que necesitamos definir es el **funcional generador** de funciones de Green, $Z[J]$, que para la teoría de campos escalares es

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right\} \quad (60)$$

Nótese que $Z[0] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS}$ describe transiciones vacío-vacío (39), sin fuentes, mientras que en $Z[J]$ hemos añadido al lagrangiano \mathcal{L} un **término fuente** $J(x)\phi(x)$. Aunque no se escriba, en adelante **se supone implícitamente la prescripción de Feynman** para asegurar la convergencia, como hemos visto en el apartado anterior. Aplicando (58) es evidente que todas las funciones de Green se pueden generar a partir de $Z[J]$ tomando derivadas funcionales,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} \quad (61)$$

Cuantización funcional de campos escalares

Funcional generador

Equivalentemente,

$$\hat{Z}[J] \equiv \frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (62)$$

Veremos que nos resultará muy útil también definir el funcional generador $W[J]$:

$$W[J] \equiv -i \log \hat{Z}[J], \quad \hat{Z}[J] \equiv e^{iW[J]}, \quad (63)$$

que genera las **funciones de Green conectadas**, y el funcional **acción efectiva** a partir de la transformada de Legendre:

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi(x), \quad \varphi(x) \equiv \frac{\delta W}{\delta J(x)}, \quad (64)$$

que genera los **vértices propios de interacción**. También veremos que $W[J]$ y $\Gamma[\varphi]$ son los análogos a la energía libre y energía interna, resp., en mecánica estadística.

Consideremos ahora un campo escalar **libre** ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$). Entonces,

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + J\phi \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + J\phi \right] \right\} . \end{aligned} \quad (65)$$

Para calcular las funciones de Green pasemos al espacio de momentos,

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\phi}(p) , \quad J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{J}(p) \quad (66)$$

y recordemos que

$$\int d^4x e^{-i(p+p')x} = (2\pi)^4 \delta^4(p + p') . \quad (67)$$

Entonces la exponencial queda

$$\exp \left\{ i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} \tilde{\phi}(-p) (p^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{\phi}(p) + \tilde{J}(-p) \tilde{\phi}(p) \right] \right\} \quad (68)$$

La integral funcional puede reemplazarse por una integral sobre modos de Fourier, que podemos discretizar

$$\mathcal{D}\phi(x) \sim \prod_p \tilde{\phi}(p) \quad (69)$$

Las constantes de proporcionalidad son irrelevantes, pues se cancelan en el cociente (61). Ahora usaremos la siguiente identidad para integrales gaussianas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N dy_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N y_i A_{ij} y_j + \sum_i z_i y_i \right\} \\ = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N z_i (A^{-1})_{ij} z_j \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

donde A_{ik} es una matriz invertible. Identificando términos, regresando al continuo y eligiendo la normalización $Z_0[0] = 1$ obtenemos inmediatamente

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{J}(-p) \tilde{D}_F(p) \tilde{J}(p) \right\} \quad (71)$$

donde

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (72)$$

es el **propagador de Feynman** en el espacio de momentos. Volviendo al espacio de coordenadas tenemos que, para campos escalares **libres**,

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right\} \quad (73)$$

donde

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}_F(p) . \quad (74)$$

Comprobemos que el propagador se puede obtener aplicando (61) a (73),

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i)^2}{Z_0[0]} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = D_F(x_1 - x_2) . \quad (75)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 G_0^{(2)}(x_1, x_2) &= (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[-\frac{1}{2} \int d^4y D_F(x_2-y) J(y) - \frac{1}{2} \int d^4x J(x) D_F(x-x_2) \right] \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} \Big|_{J=0} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[-\int d^4x J(x) D_F(x-x_2) \right] \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} \Big|_{J=0} \\
 &= D_F(x_1-x_2) .
 \end{aligned} \tag{76}$$

Nótese que al hacer la primera derivada bajan dos términos, que hemos reagrupado. La segunda derivada da varios más, pero solamente cuando ésta actúa sobre el factor a la izquierda de $Z_0[J]$ obtenemos términos que sobreviven al tomar $J = 0$.

Del mismo modo podemos hallar el resto de las funciones de Green de la teoría de campos escalares libres. Hallemos como ejemplo la función de cuatro puntos.

Para abreviar la **notación**, en adelante:

$$\phi_1 \equiv \phi(x_1), \quad J_x \equiv J(x), \quad D_{x_4} \equiv D_F(x - x_4), \quad \text{etcétera}$$

y supondremos que se integra sobre los índices repetidos en cada bloque $\langle \dots \rangle$.

Entonces

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-i)^4 \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \frac{\delta}{\delta J_3} [-\langle J_x D_{x_4} \rangle] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} [-D_{34} + \langle J_x D_{x_4} \rangle \langle J_y D_{y3} \rangle] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} [D_{34} \langle J_x D_{x_2} \rangle + D_{24} \langle J_y D_{y3} \rangle + \langle J_x D_{x_4} \rangle D_{23}] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \Big|_{J=0} \\ &= D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23} . \end{aligned} \tag{77}$$

Deducimos ya fácilmente que

$$G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ si } n \text{ es impar} \quad (78)$$

y si n es par podemos expresarlas como productos de propagadores

$$G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum D_F(x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots D_F(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) \quad (79)$$

donde la suma se extiende sobre todas las formas distintas de agrupar en pares el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Este resultado es el [teorema de Wick](#), obtenido mediante integrales de camino.

Las funciones de Green admiten una representación gráfica sencilla en términos de **diagramas de Feynman**. Así, el propagador de Feynman es:

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2) = \text{---} \quad (80)$$

y todas las funciones de Green de la teoría libre se expresan como productos de propagadores, como por ejemplo:

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array} \quad (81)$$

El propagador de Feynman $D_F(x - y) = G_0^{(2)}(x, y)$ es, en efecto, una función de Green del operador de Klein-Gordon pues

$$(\square_x + m^2)D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x - y) \quad (82)$$

Las condiciones de contorno está fijadas por la integral de camino y especificadas por la prescripción $i\epsilon$ de Feynman. Por tanto, podemos interpretar $D_F(x - y)$ como la amplitud de probabilidad de que una **señal** se propague libremente desde y hasta x . Las posibles señales son las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (83)$$

Las soluciones son modos de **energía positiva (negativa)**, $p^0 = \pm E_p$ con $E_p \equiv +\sqrt{m^2 + p^2}$, que llamamos **partículas (antipartículas)** de masa m ,

$$\phi(x) \sim e^{-ipx} \quad (p^0 > 0), \quad \phi(x) \sim e^{+ipx} \quad (p^0 < 0). \quad (84)$$

- ▷ Las partículas (antipartículas) se propagan hacia delante (atrás) en el tiempo.
- ▷ Hay de hecho dos maneras de propagar un número cuántico (ej. una carga Q) desde y hasta x : crear una partícula de carga Q en y y destruirla en x , o bien, crear una antipartícula con carga opuesta $-Q$ en x y destruirla en y .
- ▷ Por definición, en el primer caso $x^0 > y^0$, y por tanto en el segundo $x^0 < y^0$.
- ▷ Si $\phi = \phi^*$ no distinguimos ambas señales: partícula = antipartícula.

Por tanto:

- ▷ El diagrama de Feynman que representa a $G_0^{(2)}(x_1, x_2)$ (80) expresa la propagación libre de una partícula entre dos puntos x_1 e x_2 .
- ▷ La función de Green $G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (81) expresa las posibles transiciones libres de una partícula entre cuatro puntos.

Nótese que éste último es un objeto bastante **desconectado**. De hecho, el espacio de posiciones no el marco más apropiado para describir la propagación de partículas con cuadrimomento p bien definido.

Conviene por eso introducir la transformada de Fourier:

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{i(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n)} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (85)$$

Como las funciones de Green sólo dependen de diferencias $x_i - x_j$, debido a la invariancia bajo traslaciones, su transformada de Fourier sólo dependerá de $n - 1$ momentos, pues será proporcional a $\delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ que implica $p_1 + \cdots + p_n = 0$. Por eso definiremos,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{i(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n)} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (86)$$

Así por ejemplo representaremos el propagador libre en el espacio de momentos mediante el diagrama

$$\tilde{G}_0^{(2)}(p, -p) \equiv \tilde{D}_F(p) = \begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (87)$$

En efecto, haciendo el cambio de variables $x = x_1 + x_2$, $y = x_1 - x_2$,

$$\begin{aligned}\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1x_1+p_2x_2)} D_F(x_1 - x_2) &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y e^{\frac{i}{2}(p_1+p_2)x} e^{\frac{i}{2}(p_1-p_2)y} D_F(y) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int d^4y e^{ip_1y} D_F(y) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4y e^{i(p_1-p)y} \tilde{D}_F(p) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \tilde{D}_F(p_1)\end{aligned}\tag{88}$$

donde se ha sustituido

$$(2\pi)^4 \delta^4(k) = \int d^4x e^{ikx}, \quad D_F(y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipy} \tilde{D}_F(p).\tag{89}$$

Veremos que en presencia de interacciones aparecerán también otras funciones de Green conectadas que representaremos en el espacio de momentos mediante diagramas de la forma

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \text{Diagrama} \quad (90)$$

Estas funciones de Green representan amplitudes de **scattering** de estados de momentos entrantes p_1, \dots, p_j a estados de momentos salientes $-p_{j+1}, \dots, -p_n$.

El funcional generador (60) nos permite encontrar las funciones de Green de una teoría de campos escalares arbitraria tomando derivadas funcionales (61). Hemos podido expresar después el funcional generador para la teoría libre ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$) de forma muy sencilla (73) en términos del propagador de Feynman, gracias a que las integrales son gaussianas (el lagrangiano es cuadrático en los campos) y las hemos podido calcular exactamente.

Consideremos ahora que exista una interacción, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, donde $\mathcal{L}_I = -V(\phi)$ es una función polinómica de los campos. Para manipular el funcional generador, usemos la notación abreviada introducida antes de (77) y la derivada funcional (58),

$$\phi_x e^{i\langle J\phi \rangle} = \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} \right) e^{i\langle J\phi \rangle} . \quad (91)$$

Lo mismo vale para cualquier función de ϕ . Así que

$$\exp \left\{ -i \int d^4x V(\phi_x) \right\} e^{i\langle J\phi \rangle} = \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} \right) \right\} e^{i\langle J\phi \rangle} . \quad (92)$$

Este **truco** nos permite escribir

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0 - V(\phi) + J\phi] \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x V(\phi) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] \right\} \\
 &= \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_x} \right) \right\} Z_0[J] \\
 &= \exp \left\{ -i \int d^4z V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right) \right\} e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \tag{93}
 \end{aligned}$$

Esto nos abre las puertas a un tratamiento **perturbativo** de la interacción desarrollando en serie la exponencial de la izquierda. Tomaremos como ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 . \tag{94}$$

Entonces

$$\exp \left\{ -i \int d^4z V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right) \right\} = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (95)$$

A orden λ^0 , $Z[J]$ es obviamente $Z_0[J]$. Hallemos el siguiente orden paso a paso:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} = i \langle J_x D_{xz} \rangle e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \quad (96)$$

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right)^2 e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} = [D_F(0) - \langle J_x D_{xz} \rangle^2] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right)^3 e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} &= \frac{1}{i} \left[-2 \langle J_x D_{xz} \rangle D_F(0) - \left(D_F(0) - \langle J_x D_{xz} \rangle^2 \right) \langle J_x D_{xz} \rangle \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \\ &= \frac{1}{i} \left[-3 \langle J_x D_{xz} \rangle D_F(0) + \langle J_x D_{xz} \rangle^3 \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} &= - \left[-3 D_F^2(0) + 3 \langle J_x D_{xz} \rangle^2 D_F(0) + 3 \langle J_x D_{xz} \rangle^2 D_F(0) \right. \\ &\quad \left. - \langle J_x D_{xz} \rangle^4 \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \\ &= \left[3 D_F^2(0) - 6 \langle J_x D_{xz} \rangle^2 D_F(0) + \langle J_x D_{xz} \rangle^4 \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \end{aligned} \quad (99)$$

Representado $D_F(0)$ mediante un **loop cerrado** e introduciendo también diagramas de Feynman con **fuentes** (\times) e **interacciones** en un punto (\bullet),

$$D_F(0) = \text{Diagrama de un círculo simple}$$

$$D_F^2(0) = \text{Diagrama de dos círculos que se tocan en un punto central}$$

$$\langle J_x D_{xz} \rangle^2 D_F(0) = \text{Diagrama de un círculo con un punto central conectado a dos cruces horizontales en la base}$$

$$\langle J_x D_{xz} \rangle^4 = \text{Diagrama de un punto central conectado a cuatro cruces en los cuadrantes (arriba-abajo y izquierda-derecha)}$$

la expresión (93) a primer orden de teoría de perturbaciones queda:

$$Z[J] = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(3 \text{Diagrama de dos círculos que se tocan} - 6 \text{Diagrama de un círculo con punto y cruces} + \text{Diagrama de punto central con cuatro cruces} \right) \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \quad (100)$$

Tomando $J = 0$ eliminamos la contribución de los diagramas con patas externas:

$$Z[0] = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(3 \text{ (diagrama de dos bucles)} \right) \right] \quad (101)$$

Vemos, por tanto, que el diagrama de vacío no contribuye al funcional generador normalizado $\hat{Z}[J]$, que es la cantidad relevante para hallar las funciones de Green (61):

$$\hat{Z}[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]} = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(-6 \text{ (diagrama de bucle con patas)} + \text{ (diagrama de cruce con patas)} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} . \quad (102)$$

De hecho puede demostrarse que los **diagramas de vacío** no contribuirán al funcional generador normalizado, y por tanto, **no contribuirán a las funciones de Green**, a todo orden en teoría de perturbaciones.

Ya podemos calcular las distintas funciones de Green a partir de (61) y (102):

Puesto que hay que tomar dos derivadas y luego hacer $J = 0$, a la función de Green de dos puntos solamente pueden contribuir los diagramas en (102) con un máximo de dos fuentes. Por tanto, a primer orden en teoría de perturbaciones:

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(x_1, x_2) &= - \left. \frac{\delta^2 \widehat{Z}}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} \\
 &= G_0^{(2)}(x_1, x_2) + \frac{i\lambda}{4!} (-6) D_F(0) \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} \int d^4z \langle J_x D_{xz} \rangle^2 e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \Big|_{J=0}
 \end{aligned} \tag{103}$$

Hallando

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta J_2} (\dots) &= \int d^4z \left[2D_{2z} \langle J_x D_{xz} \rangle - \langle J_x D_{xz} \rangle^2 \langle J_x D_{x2} \rangle \right] e^{-\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \\
 \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} (\dots) \Big|_{J=0} &= \int d^4z 2D_{1z} D_{2z}
 \end{aligned} \tag{104}$$

tenemos el propagador libre (80) más una corrección,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} D_F(0) \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) \quad (105)$$

o diagramáticamente:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---} - \frac{i\lambda}{2} \int d^4z \text{---}\bullet\text{---}\bigcirc\text{---}\bullet\text{---} \quad (106)$$

En el espacio de momentos, recordando (74) y (86), obtenemos el propagador libre (87) más una corrección:

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \tilde{D}_F(p) - \frac{i\lambda}{2} D_F(0) \tilde{D}_F(p) \tilde{D}_F(p) \quad (107)$$

donde se ha hecho el cambio de variables $z_1 = x_1 - z$, $z_2 = x_2 - z$ en

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2)} d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) \\
 &= \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z e^{i(p_1 + p_2)z} e^{i(p_1z_1 + p_2z_2)} D_F(z_1) D_F(z_2) \\
 &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) .
 \end{aligned} \tag{108}$$

Introduciendo

$$-iB \equiv -\frac{i\lambda}{2} D_F(0) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(q) , \tag{109}$$

tenemos que

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p) (-iB) \tilde{D}_F(p) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{110}$$

Diagramáticamente la corrección se escribe como:

$$\begin{array}{c} \text{diagram: a horizontal arrow with momentum } p \text{ entering from the left and exiting to the right. A loop is attached to the top of the arrow, with momentum } q \text{ circulating clockwise.} \end{array} = \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p) \tag{111}$$

Podemos **resumar** todas correcciones de este tipo al propagador,

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{diagram: a horizontal arrow with momentum } p \text{ entering from the left and exiting to the right.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram: a horizontal arrow with momentum } p \text{ entering from the left and exiting to the right. A loop is attached to the top of the arrow, with momentum } q \text{ circulating clockwise.} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram: a horizontal arrow with momentum } p \text{ entering from the left and exiting to the right. Two loops are attached to the top of the arrow, with momentum } q \text{ circulating clockwise.} \end{array} + \dots \\
 &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p)(-iB)\tilde{D}_F(p) + \dots \\
 &= \tilde{D}_F(p) \left[1 + (-iB\tilde{D}_F(p)) + (-iB\tilde{D}_F(p))^2 + \dots \right] \\
 &= \tilde{D}_F(p) \frac{1}{1 + iB\tilde{D}_F(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{B}{p^2 - m^2}} \right) = \frac{i}{p^2 - m^2 - B} , \tag{112}
 \end{aligned}$$

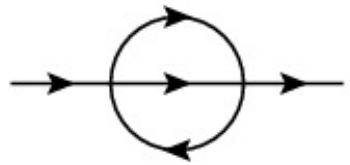
Vemos que suponen una **corrección a la masa**,

$$m^2 \rightarrow m^2 + B . \tag{113}$$

Esta corrección (109) es de hecho **infinita**, y tiene que interpretarse mediante la **regularización** y **renormalización** de la teoría, según veremos.

Nota:

A órdenes superiores hay también otras correcciones, como por ejemplo a $\mathcal{O}(\lambda^2)$



(que, a diferencia de B , depende de p^2). Esto nos obligará a a definir la

masa física m como el polo del propagador cuando $p^2 = m^2$.

El término de orden λ^0 nos da la función de Green de cuatro puntos de la teoría libre $G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (81). A orden λ tenemos dos contribuciones en (102) y ambas sobreviven a cuatro derivadas respecto a J cuando hacemos $J = 0$. La primera es:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i\lambda}{4!}(-6)D_F(0)\frac{\delta^4}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4}\int d^4z\langle J_x D_{xz}\rangle^2 e^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y\rangle}\Big|_{J=0} \\
 & = -\frac{i\lambda}{4!}(-6)(-2)D_F(0)\int d^4z [D_{12}D_{3z}D_{4z} + D_{13}D_{2z}D_{4z} + D_{14}D_{2z}D_{3z} \\
 & \quad + D_{23}D_{1z}D_{4z} + D_{24}D_{1z}D_{3z} + D_{34}D_{1z}D_{2z}]. \quad (114)
 \end{aligned}$$

La segunda contribución es:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta^4}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4}\int d^4z\langle J_x D_{xz}\rangle^4 e^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y\rangle}\Big|_{J=0} \\
 & = -\frac{i\lambda}{4!}24\int d^4z D_{1z}D_{2z}D_{3z}D_{4z}. \quad (115)
 \end{aligned}$$

Diagramáticamente:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3 \left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left[12 \times 6 \left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) + 24 \left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) \right] \quad (116)$$

donde los diagramas entre paréntesis denotan cualquiera de las posibles combinaciones topológicamente equivalentes de los cuatro puntos, que son 3 en (81) y 6 en (114). Nótese que contiene diagramas desconectados, formados por la combinación de diagramas de dos puntos.

Veamos ahora que el funcional generador $W[J]$ definido en (63) genera sólo funciones de Green conectadas,

$$-iG_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = (-i)^{n+1} \frac{\delta^n \log Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (117)$$

con lo que también podemos construir $Z[J]$ a partir de objetos más simples mediante

$$\log Z[J] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (118)$$

Lo comprobaremos para las funciones de dos y cuatro puntos:^a

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2} = -i \frac{\delta}{\delta J_1} \left(\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J_2} \right) = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J_1} \frac{\delta Z}{\delta J_2} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_1 \delta J_2} \quad (119)$$

^aUna demostración general es intrincada. Puede encontrarse, por ejemplo, en H. Osborn, [Advanced Quantum Field Theory](#), p. 26 [www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/AQFTNotes.pdf].

Así que

$$-iG_c^{(2)}(x_1, x_2) = - \left. \frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2} \right|_{J=0} = i \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = -iG^{(2)}(x_1, x_2) \quad (120)$$

pues ya es una función de Green conectada. Y si seguimos derivando (119):

$$\begin{aligned} -iG_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left. \frac{\delta^4 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} \right|_{J=0} \\ &= i \left[G^{(2)}(x_1, x_2) G^{(2)}(x_3, x_4) + G^{(2)}(x_1, x_3) G^{(2)}(x_2, x_4) \right. \\ &\quad \left. + G^{(2)}(x_1, x_4) G^{(2)}(x_2, x_3) - G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \right] \quad (121) \end{aligned}$$

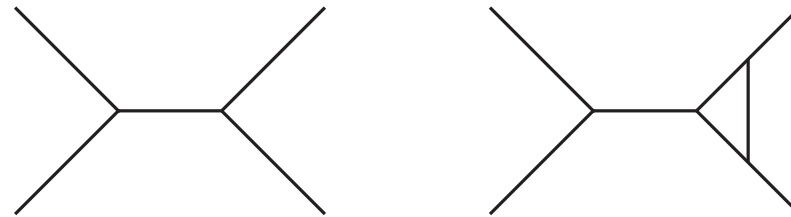
Sustituyendo los desarrollos en perturbativos de $G^{(2)}(x_1, x_2)$ (106) y $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (116) es fácil darse cuenta de que los diagramas desconectados se cancelan y sólo sobrevive, a orden λ , el diagrama conectado:

$$G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{i\lambda}{4!} 24 \int d^4z \quad \begin{array}{c} \bullet & & \bullet \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \\ & / & \diagdown \\ \bullet & & \bullet \end{array} \quad (122)$$

como queríamos comprobar. En el espacio de momentos,

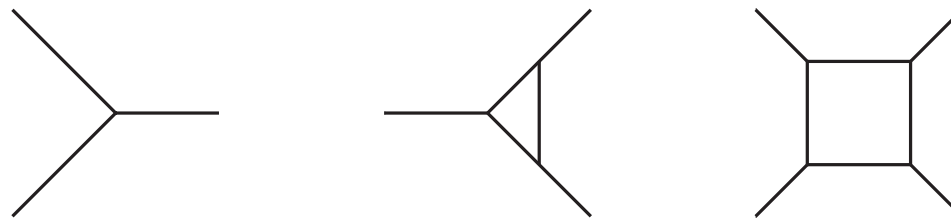
$$\tilde{G}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i\lambda \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(p_3) \tilde{D}_F(p_4) . \quad (123)$$

Todavía podemos llegar más lejos a la hora de definir bloques más simples con los que construir el funcional generador. Nótese que encontraremos diagramas conectados que se pueden desconectar en otros dos si cortamos solamente una línea interna. Los llamaremos **reducibles a una partícula**. Por ejemplo (en la teoría $\lambda\phi^3$):



(124)

En cambio, otros diagramas conectados, que llamaremos **irreducibles a una partícula** (1PI), no se desconectan en dos si cortamos una línea interna. Por ejemplo:



(125)

Parece evidente que sería conveniente trabajar sólo con diagramas 1PI, para lo que tenemos que encontrar el correspondiente generador, que llamaremos Γ .

Empezaremos definiendo

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (126)$$

y supondremos que la relación entre φ y J es invertible, de modo que podemos escribir $\varphi = \varphi[J]$ y $J = J[\varphi]$. Introducimos la [transformada de Legendre](#) de $W[J]$,

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \langle J\varphi \rangle \quad (127)$$

en la que formalmente se [reemplaza](#) J por φ , pues en efecto Γ no depende de J :

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta J(x)} \right|_{\varphi} = \frac{\delta W}{\delta J(x)} - \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \quad (128)$$

y además tenemos, aplicando la regla de la cadena, que

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} &= \frac{\delta W}{\delta\varphi(x)} - J(x) - \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \\
 &= \int d^4y \frac{\delta W}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} - J(x) - \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \\
 &= \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} - J(x) - \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} = -J(x) , \tag{129}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} . \tag{130}$$

Pues bien, vamos a comprobar que $\Gamma[\varphi]$ genera los diagramas 1PI, mediante

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv i \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1) \cdots \delta\varphi(x_n)} \right|_{\varphi=0} . \tag{131}$$

Para ello conviene introducir la notación:

$$G_c^{(n)}(J; x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \quad (132)$$

$$\Gamma^{(n)}(\varphi; x_1, \dots, x_n) \equiv i \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)} \quad (133)$$

lo que significa que:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = G_c^{(n)}(J; x_1, \dots, x_n) \Big|_{J=0} \quad (134)$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Gamma^{(n)}(\varphi; x_1, \dots, x_n) \Big|_{\varphi=0} . \quad (135)$$

Para lograr nuestro propósito escribamos $\delta/\delta J(x)$ en función de $\delta/\delta \varphi(y)$:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} = \int d^4 y \frac{\delta \varphi(y)}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} = \int d^4 y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} = i \int d^4 y G_c^{(2)}(J; x, y) \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} . \quad (136)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \delta^4(x - z) &= \frac{\delta J(z)}{\delta J(x)} = i \int d^4y G_c^{(2)}(J; x, y) \frac{\delta J(z)}{\delta \varphi(y)} = -i \int d^4y G_c^{(2)}(J; x, y) \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(y) \delta \varphi(z)} \\ &= - \int d^4y G_c^{(2)}(J; x, y) \Gamma^{(2)}(\varphi; y, z) . \end{aligned} \quad (137)$$

Por tanto,

$$G_c^{(2)} = -\Gamma^{(2)^{-1}} . \quad (138)$$

Representando diagramáticamente

$$G_c^{(n)} = \begin{array}{c} | 2 \\ \text{---} \circ W \text{---} 3 \\ \text{---} n \end{array} \quad \Gamma^{(n)} = \begin{array}{c} | 2 \\ \text{---} \circ \Gamma \text{---} 3 \\ \text{---} n \end{array} \quad (139)$$

la expresión (138) se escribe

$$\boxed{\text{---} \bigcirc W \text{---} = \left(\text{---} \bigcirc \Gamma \text{---} \right)^{-1}} \quad (140)$$

Ahora nótese que hacer una derivada $-i\delta/\delta J(x)$ añade una línea externa a $G_c^{(n)}$ (132):

$$-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \text{---} \bigcirc W \text{---} = \text{---} \bigcirc W \text{---} \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \quad (141)$$

y que hacer una derivada $\delta/\delta\varphi(y)$ añade una línea externa a $\Gamma^{(n)}$ (133):

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \text{---} \bigcirc \Gamma \text{---} = \text{---} \bigcirc \Gamma \text{---} \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \quad (142)$$

Además (136) nos dice que

$$-i \frac{\delta}{\delta J(x)} = x \text{---} \textcircled{W} \text{---} y \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \quad (143)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{W} \text{---} &= -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \\ &= \text{---} \textcircled{W} \text{---} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \\ &= \text{---} \textcircled{W} \text{---} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\text{---} \textcircled{\Gamma} \text{---} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (144)$$

Ahora usaremos el siguiente resultado para matrices:

$$\frac{d}{d\lambda}(MM^{-1}) = 0 \Rightarrow -\frac{d}{d\lambda}M^{-1} = M^{-1}\frac{dM}{d\lambda}M^{-1}, \quad (145)$$

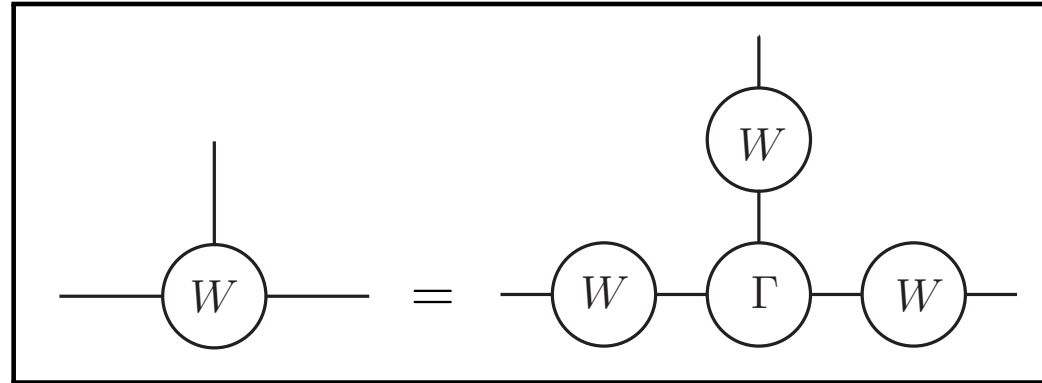
que en un número infinito de dimensiones puede generalizarse a:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \left(-\Gamma^{(2)}(\varphi; x, z) \right)^{-1} &= \int d^4u d^4v \Gamma^{(2)}(\varphi; x, u)^{-1} \frac{\delta\Gamma^{(2)}(\varphi; u, v)}{\delta\varphi(y)} \Gamma^{(2)}(\varphi; v, z)^{-1} \\ &= \int d^4u d^4v G^{(2)}(\varphi; x, u) \Gamma^{(3)}(\varphi; u, v, y) G^{(2)}(\varphi; v, z) \end{aligned} \quad (146)$$

es decir,

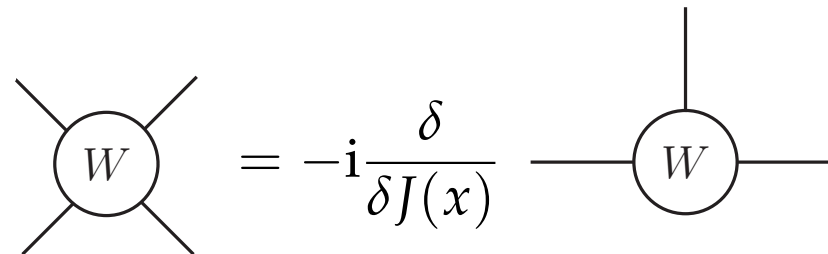
$$\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \left(- \text{---} \textcircled{\Gamma} \text{---} \right)^{-1} = \text{---} \textcircled{\Gamma} \text{---} \textcircled{W} \text{---} \quad (147)$$

Así que (144) queda:



(148)

Este procedimiento puede extenderse a un número mayor de puntos de forma directa. Por ejemplo, para $n = 4$:



(149)

aplicando la regla de la cadena y usando (141) o (143), según convenga, sobre (148) tenemos:

The diagrammatic equation (150) is enclosed in a rectangular box. On the left side of the box, there is a vertex labeled 'W' represented by a circle with four external lines extending from its corners. This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign, there are three terms separated by plus signs. The first term is a diagram with three vertices: a 'W' vertex on the left with two external lines, a central 'Gamma' vertex, and a 'W' vertex on the right with two external lines. A single vertical line extends upwards from the top of the 'Gamma' vertex to a 'W' vertex. The second term is the text '(otros dos)'. The third term is a diagram with three vertices: a 'W' vertex on the left with two external lines, a central 'Gamma' vertex, and a 'W' vertex on the right with two external lines. A single vertical line extends downwards from the bottom of the 'Gamma' vertex to a 'W' vertex. To the right of the box, the equation is labeled (150).

Sustituyendo ahora las $G_c^{(3)}$ de (148) habremos logrado escribir $G_c^{(4)}$ en términos de vértices $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(3)}$ y del propagador $\Gamma^{(2)-1}$. Procediendo iterativamente, se puede hacer lo mismo para cualquier $G_c^{(n)}$.

Como ocurre con las funciones de Green, los vértices propios dependen sólo de diferencias $x_i - x_j$ y, por eso, en el espacio de momentos se definen extrayendo de la transformada de Fourier un factor global de conservación de momento:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \quad (151)$$

El propagador y los vértices propios se calculan orden a orden en teoría de perturbaciones (TP), según hemos visto en apartados anteriores, a partir del propagador libre y los vértices de interacción a nivel árbol.

Para hallar las funciones de Green de n puntos, de lo visto anteriormente (107, 123) se deducen las siguientes reglas de Feynman en el espacio de momentos para una teoría de campos escalares reales con $V(\phi) = \frac{\lambda}{N!}\phi^N$:

1. Dibujar todos los diagramas con n líneas externas conectadas en vértices de N patas.
2. Imponer conservación de cuadrimomento en cada vértice.
3. Asociar un factor $(-i\lambda)$ a cada vértice. El número de vértices de cada diagrama determina el orden de la TP.
4. Asociar a cada línea de momento p un factor $\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.
5. Integrar sobre los cuadrimomentos q que no queden fijados por la conservación de cuadrimomento en cada vértice (uno por cada **loop**) con medida $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
6. Multiplicar por el factor de simetría correspondiente.

Veamos que el desarrollo en **loops** es un **desarrollo en potencias de \hbar** , es decir en correcciones cuánticas, así que la aproximación a nivel árbol (cero **loops**) coincide con el **límite clásico**. Para comprobarlo, reinsertaremos las constantes \hbar en la integral de camino, que aparecen normalizando la acción en $e^{iS/\hbar}$. El funcional generador es entonces

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L} + \hbar J(x)\phi(x)] \right\} . \quad (152)$$

Las dos fuentes de potencias de \hbar en las funciones de Green son entonces:

- Por cada propagador hay un factor \hbar , pues insertando \hbar en (65-72):

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x D_{xy} J_y \rangle \right\} \Rightarrow \tilde{D}_F(p) = \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (153)$$

- Por cada vértice de interacción hay un factor \hbar^{-1} , pues:

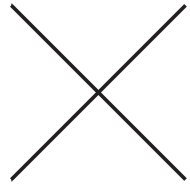
$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\} Z_0[J] . \quad (154)$$

Definimos el número de **loops** L como el número de cuadrimomentos no fijados por la regla de conservación del momento, sobre los que tenemos que integrar para calcular la contribución a la función de Green correspondiente. Así, en un diagrama con I líneas internas y V vértices tenemos

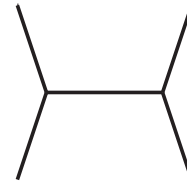
$$L = I - (V - 1) = I - V + 1 . \quad (155)$$

En efecto, tenemos I cuadrimomentos circulando por las líneas internas, sobre los que imponemos $V - 1$ restricciones (una por cada vértice, excepto la global que corresponde a conservación del cuadrimomento total).

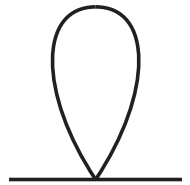
Veamos algunos ejemplos:



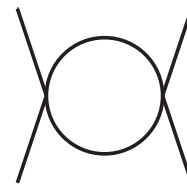
$$L = 0 - 1 + 1 = 0$$



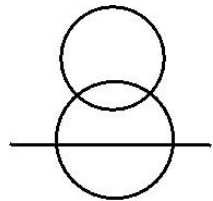
$$L = 1 - 2 + 1 = 0$$



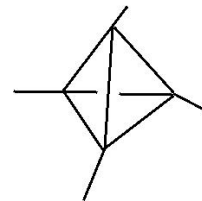
$$L = 1 - 1 + 1 = 1$$



$$L = 2 - 2 + 1 = 1$$



$$L = 7 - 4 + 1 = 4$$



$$L = 6 - 4 + 1 = 3$$

(156)

Nótese que normalmente L coincide con el número de lazos en el diagrama de Feynman. Pero no siempre, como se ve en el último ejemplo, en el que hay 4 lazos pero $L = 3$.

Aplicando ahora que cada propagador conlleva una potencia de \hbar y cada vértice una de \hbar^{-1} vemos que un diagrama conexo con L **loops** es de orden

$$\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1} . \quad (157)$$

Por tanto, fijado el número de patas externas, el desarrollo en **loops** corresponde a un desarrollo en potencias de \hbar .

Otro comentario importante es que en *teorías con un único acoplamiento*, el **desarrollo perturbativo en ese acoplamiento** y el **desarrollo en loops coinciden**, si fijamos el número de líneas externas. La razón es que en ese caso existe una relación entre L y V . Por ejemplo, en la teoría $\lambda\phi^4$ cada vértice tiene cuatro patas, así que

$$4V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V - E/2 + 1, \quad (158)$$

siendo E el número de patas externas e I el de líneas internas. Esta relación viene de que $4V$ es el número total de líneas que confluyen en vértices, pero las que corresponden a líneas internas cuentan dos veces. Es fácil comprobar que esta relación se cumple en todos los ejemplos de (156), excepto para el primero de la columna de la derecha, en el que los vértices tienen tres patas, pues corresponden a una teoría $\lambda\phi^3$ y la relación es entonces

$$3V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V/2 - E/2 + 1. \quad (159)$$

Veamos que en el límite clásico la acción y el funcional Γ coinciden. Partiendo de (152), en unidades naturales:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left[S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right] \right\} , \quad (160)$$

sabemos que sólo debe contribuir la **fase estacionaria** en el límite clásico (**despreciando loops**), correspondiente a

$$\left. \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_J} = -J(x) \quad (161)$$

es decir,

$$Z[J]_{\text{cl}} \sim \exp \left\{ i \left[S[\phi_J] + \int d^4x J(x)\phi_J(x) \right] \right\} . \quad (162)$$

Por tanto, recordando que $W[J] = -i \log Z[J]$, tenemos

$$W[J]_{\text{cl}} = S[\phi_J] + \int d^4x J(x)\phi_J(x) \equiv \Gamma[\varphi]_{\text{cl}} + \langle J\varphi \rangle , \quad \varphi(x) = \frac{\delta W[J]_{\text{cl}}}{\delta J(x)} = \phi_J(x) . \quad (163)$$

es decir, en el límite $\hbar \rightarrow 0$, $\varphi = \phi_J$ es el **campo clásico** y Γ es la **acción clásica**:

$$S[\varphi] = \Gamma[\varphi]_{cl} , \tag{164}$$

que verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Diremos entonces que

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \langle J\varphi \rangle , \quad \varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \tag{165}$$

es una **acción efectiva**, que coincide con $S[\varphi]$ en el límite clásico. Veremos más adelante que $\Gamma[\varphi]$ verifica una ecuaciones (análogas a las de Euler-Lagrange) a nivel cuántico, llamadas ecuaciones de **Schwinger-Dyson**.

Llegado a este punto conviene hacer un comentario importante. En teoría cuántica de campos trabajamos en el espacio de Minkowski $x = (t, \mathbf{x})$, que es el **espacio físico**. Hemos visto que para que nuestras integrales de camino sean **convergentes** hemos tenido que hacer una rotación de Wick que implica integrar sobre tiempos t complejos (no físicos): $T_i \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$, $T_f \rightarrow \infty e^{-i\delta}$.

Pues bien, nótese que para $\delta = \pi/2$, es decir, $T_i \rightarrow i\infty$, $T_f \rightarrow -i\infty$, estamos en la práctica haciendo **teoría de campos en el espacio Euclídeo** $\tilde{x} = (it, \mathbf{x}) \equiv (\tau, \mathbf{x})$, pues en ese caso estamos integrando τ entre $-\infty$ y ∞ y podemos definir la **acción Euclídea**,

$$S_E \equiv \int d^4\tilde{x} \mathcal{L}(\tilde{x}) = \int d^4\tilde{x} \left[\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) \right] \quad (166)$$

que está relacionada con la acción de Minkowski mediante $S = iS_E$.

El integrando es **definido positivo**, así que el **funcional generador Euclídeo**,

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -S_E[\phi] - \int d^4\tilde{x} J\phi \right\} \quad (167)$$

tiene sentido, pues la integrales de camino convergen, debido a la supresión exponencial del primer factor. Las **funciones de Green Euclídeas** son entonces

$$G_E^{(n)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(\tilde{x}_1) \cdots \phi(\tilde{x}_n) e^{-S_E}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}} = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(\tilde{x}_1) \cdots J(\tilde{x}_n)} \right|_{J=0} . \quad (168)$$

Nótese que

$$G_E^{(n)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = i^n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) . \quad (169)$$

Resumiendo, el formalismo de integrales de camino está bien definido solamente en el espacio Euclídeo, en el que el tiempo t es imaginario. Para obtener cantidades físicas tenemos que hacer una prolongación analítica, $t \rightarrow \tau = it$, que cambia la geometría de Minkowski a la geometría Euclídea.

Por otro lado, el funcional generador de las funciones de Green Euclídeas (167) tiene la misma forma que la **función de partición** de un sistema macroscópico cuyas fluctuaciones estadísticas vengan dadas por un campo continuo, lo que pone de manifiesto la conexión entre la TQC y la mecánica estadística.

Por ejemplo, para un material ferromagnético la energía libre F tiene una expresión similar a W_E (pero en tres dimensiones), reemplazando $\phi(\mathbf{x})$ por un campo de espines fluctuantes $s(\mathbf{x})$ y $J(\mathbf{x})$ por un campo magnético externo $H(\mathbf{x})$. El papel de $\varphi(\mathbf{x}) = \delta W[J] / \delta J(\mathbf{x})$ lo juega la magnetización $M(\mathbf{x})$. Las funciones de Green correspondientes son las **correlaciones** entre espines,

$$\langle s(\mathbf{x}_1)s(\mathbf{x}_2) \rangle = G_E^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \text{etc.} \quad (170)$$

De hecho existe una clara analogía entre los **potenciales termodinámicos** y los funcionales generadores que hemos definido.

Recordemos que las dos primeras leyes de la termodinámica se engloban en

$$\delta Q \equiv TdS = dU + PdV \quad (171)$$

de donde

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S. \quad (172)$$

Entropía S y temperatura T son conjugadas. También lo son presión P y volumen V . En vez de expresar el estado del sistema en función de la **energía interna** $U = U(S, V)$, a veces resulta conveniente usar otros potenciales termodinámicos que dependen de las otras variables. Para ello se usan transformadas de Legendre:

$$F(T, V) = U(S, V) - \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V S \Rightarrow F = U - TS \quad (\text{energía libre}). \quad (173)$$

Nota: También se introducen otros dos potenciales que no necesitamos recordar aquí:

$$H(S, P) = U(S, V) - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S V \Rightarrow H = U + PV \quad (\text{entalpía}),$$

$$G(T, P) = F(T, V) - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S V \Rightarrow G = F + PV \quad (\text{energía de Gibbs}).$$

La mecánica estadística establece la conexión entre la microfísica y la termodinámica. Se parte del hamiltoniano $\mathcal{H}(\phi; T, V)$ donde ϕ son variables dinámicas microscópicas y la dependencia explícita en T describe una teoría efectiva. Entonces la función de partición del sistema está relacionada con la termodinámica mediante

$$Z = \sum_{\{\phi\}} e^{-\mathcal{H}/(kT)} = e^{-F/(kT)}. \quad (174)$$

Vemos ya las analogías entre teoría de campos en el espacio Euclídeo y mecánica estadística que habíamos anunciado:

$$Z[J] = e^{iW[J]/\hbar} = e^{-W_E[J]/\hbar} \quad \leftrightarrow \quad Z = e^{-F/(kT)} \quad (175)$$

$$(\hbar \leftrightarrow kT) \quad (176)$$

$$W_E[J] = \Gamma_E[\varphi] + \langle J\varphi \rangle \quad \leftrightarrow \quad F(T) = U(S) - TS \quad (177)$$

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma_E}{\delta\varphi(x)} \quad \leftrightarrow \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \quad (178)$$

$$\varphi(x) \quad \leftrightarrow \quad S. \quad (179)$$

Por ejemplo:

$$J(x) = \text{campo magnético externo } H(x) \quad (180)$$

$$\varphi(x) = \text{magnetización } M(x) . \quad (181)$$

Cuantización funcional de campos fermiónicos

En el formalismo canónico los campos son operadores que verifican reglas de anticonmutación:

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{x^0=y^0} = 0 . \quad (182)$$

(En realidad no solamente lo hacen a tiempos iguales.) En el formalismo funcional los campos son números complejos. Para considerar campos fermiónicos tendremos que introducir cantidades complejas anticonmutantes: [variables de Grassmann](#).

Los generadores θ_i del **álgebra de Grassmann** ($i = 1, \dots, n$) obedecen:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 . \quad (183)$$

Por tanto,

$$\theta_i^2 = 0 \quad (184)$$

y cualquier función $f(\theta_i)$ contendrá un número finito de términos, pues ha de ser lineal en las θ_i . Por ejemplo, para un álgebra unidimensional ($n = 1$),

$$f(\theta) = a + b\theta , \quad a, b \in \mathbb{C} . \quad (185)$$

Podemos introducir la **derivada** respecto a una variable de Grassmann a partir de

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_1 \theta_2) = \delta_{i1} \theta_2 - \delta_{i2} \theta_1 \quad (186)$$

que cumple:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j + \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{ij} - \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{ij} \quad (187)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0. \quad (188)$$

Así, para un álgebra unidimensional:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, \theta \right\} = 1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 = 0. \quad (189)$$

Para introducir la *integral*, la invariancia bajo traslaciones requiere que

$$\int d\theta \theta = \int d\theta (\theta + \theta_0) \quad (190)$$

en analogía con la integración definida ordinaria sobre una función lineal $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x + x_0) . \quad (191)$$

Por tanto,

$$\int d\theta = 0 , \quad \int d\theta \theta = 1 \quad (192)$$

donde hemos normalizado la integral de modo que

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a + b\theta) = b . \quad (193)$$

Recordemos que también teníamos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} (a + b\theta) = b . \quad (194)$$

Así que derivación e integración coinciden! Nótese también que, si integramos respecto a varias variables de Grassmann el orden es importante porque

$$d\theta_i d\theta_j = -d\theta_j d\theta_i . \quad (195)$$

Vamos ahora a trabajar con dos variables de Grassmann independientes, η y $\bar{\eta}$,

$$\int d\eta = \int d\bar{\eta} = 0 , \quad \int d\eta \eta = \int d\bar{\eta} \bar{\eta} = 1 . \quad (196)$$

Como $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, tenemos que

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta \quad (197)$$

y, por tanto

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 . \quad (198)$$

Para generalizar esta fórmula a más dimensiones comencemos con dos dimensiones:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = (\bar{\eta}_1 \quad \bar{\eta}_2). \quad (199)$$

(Al final vamos a necesitar un número infinito de ellas, $\eta(x)$ y $\bar{\eta}(x)$)

Hemos elegido el vector $\bar{\eta}$ como un vector fila para que

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \quad (200)$$

y entonces

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \quad (201)$$

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \quad (202)$$

y aplicando las reglas de integración,

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta}_1d\bar{\eta}_2d\eta_1d\eta_2 \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = 1 \quad (203)$$

como en el caso unidimensional.

Ahora veamos el efecto de un cambio de variables:

$$\eta = M\alpha, \quad \bar{\eta} = \bar{\alpha}N \quad (204)$$

donde M y N son matrices 2×2 y α y $\bar{\alpha}$ son dos nuevas parejas de variables de Grassmann independientes. Primero comprobemos que, si bien para variables ordinarias el cambio de variables supondría multiplicar por un jacobiano:

$$x = My \quad \Rightarrow \quad dx_1 dx_2 = (\det M) dy_1 dy_2 \quad (205)$$

en el caso de variables de Grassmann se obtiene:

$$\eta = M\alpha \quad \Rightarrow \quad d\eta_1 d\eta_2 = (\det M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (206)$$

En efecto, como

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 &= (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) \\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 \\ &= (\det M) \alpha_1\alpha_2, \end{aligned} \quad (207)$$

para lograr que se preserve la integral:

$$1 = \int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 \quad (208)$$

tenemos que imponer (206). Entonces, volviendo a nuestra integral (203),

$$1 = (\det NM)^{-1} \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} NM \alpha} . \quad (209)$$

Así que si $A \equiv NM$ obtenemos

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} A \alpha} = \det A . \quad (210)$$

Este resultado nos será muy útil en el caso infinito-dimensional para cuantizar funcionalmente los campos de gauge.

Lo que nos interesa para tratar campos fermiónicos es un **álgebra de Grassmann infinito-dimensional**, cuyos generadores $\theta(x)$ obedecen:

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = 0, \quad (211)$$

$$\frac{\partial \theta(x)}{\partial \theta(y)} = \delta^4(x - y), \quad (212)$$

$$\int d\theta(x) = 0, \quad \int d\theta(x) \theta(x) = 1. \quad (213)$$

Los campos fermiónicos $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ son variables de Grassmann independientes, igual que α y $\bar{\alpha}$ en el caso anterior, y las integrales como (210) son integrales funcionales.

Por analogía con el caso de campos escalares, recordando que el lagrangiano libre de Dirac es

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (214)$$

definimos el funcional generador para el campo de Dirac libre como

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\psi}(i\partial - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] \right\} \quad (215)$$

donde $\bar{\eta}(x)$ representa a la fuente de $\psi(x)$ y $\eta(x)$ representa a la fuente de $\bar{\psi}(x)$.

Para simplificar la expresión conviene introducir la notación:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x Q(\bar{\psi}, \psi) \right\} \quad (216)$$

$$Q(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta, \quad S^{-1} = i\partial - m. \quad (217)$$

Usando los valores ψ_m y $\bar{\psi}_m$ que minimizan $Q(\bar{\psi}, \psi)$,

$$\psi_m = -S\eta, \quad \bar{\psi}_m = -\bar{\eta}S \quad (218)$$

es fácil mostrar que

$$Q(\bar{\psi}_m, \psi_m) \equiv Q_m = -\bar{\eta}S\eta \quad (219)$$

$$Q(\bar{\psi}, \psi) = Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi - \psi_m). \quad (220)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\bar{\eta}S\eta + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi - \psi_m) \right] \right\} \\ &= \det(-iS^{-1}) \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y) \right\}, \end{aligned} \quad (221)$$

donde se ha extraído fuera de la integral funcional el segundo término de la exponencial y se ha usado (210) extendida a infinitas dimensiones con $A = -iS^{-1}$. Este factor puede absorberse en la normalización de la integral funcional de modo que $Z_0[0, 0] = 1$.

Veamos qué significa extender (210) a un número infinito de dimensiones. Se trata de pasar de un vector α con componentes α_i a una función $\alpha(x)$, de modo que

$$\alpha_i \rightarrow \alpha(x) \quad (222)$$

$$\sum_i \alpha_i \rightarrow \int d^4x \alpha(x) \quad (223)$$

$$\bar{\alpha}\alpha = \sum_i \bar{\alpha}_i \alpha_i = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \delta_{ij} \alpha_j \rightarrow \int d^4x d^4y \bar{\alpha}(x) \delta^4(x-y) \alpha(y) = \int d^4x \bar{\alpha}(x) \alpha(x) \quad (224)$$

$$\bar{\alpha}M\alpha = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i M_{ij} \alpha_j \rightarrow \int d^4x d^4y \bar{\alpha}(x) M(x,y) \alpha(y) \equiv \int d^4x \bar{\alpha}M\alpha, \quad (225)$$

ya que podemos escribir

$$\alpha_i = \sum_j \delta_{ij} \alpha_j \rightarrow \alpha(x) = \int d^4y \delta^4(x-y) \alpha(y) \quad (226)$$

$$(M\alpha)_i = \sum_j M_{ij} \alpha_j \rightarrow (M\alpha)(x) = \int d^4y M(x,y) \alpha(y). \quad (227)$$

Finalmente, si escribimos:

$$S_F(x) = iS(x) , \quad S^{-1} = i\partial - m . \quad (228)$$

obtenemos una expresión análoga a (73):

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) \right\} \quad (229)$$

Veamos que

$$S_F(x) = (i\partial + m)D_F(x) , \quad D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \quad (230)$$

En efecto, recordando (82):

$$S^{-1}S = (i\partial - m)(-iS_F) = (i\partial - m)(i\partial + m)(-iD_F) = i(\square + m^2)D_F(x) = \delta^4(x) . \quad (231)$$

Por tanto, en el espacio de momentos:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \longrightarrow \quad (232)$$

Es muy **importante** notar que, aunque para escalares $\tilde{D}_F(p) = \tilde{D}_F(-p)$, para fermiones $\tilde{S}_F(p) \neq \tilde{S}_F(-p)$.

Podemos encontrar las funciones de Green tomando derivadas del funcional generador respecto de las fuentes:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \cdots \bar{\psi}(y_n) \} | 0 \rangle = \frac{(-i)^{2n}}{Z[0,0]} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta \eta(y_i)} \prod_{j=1}^n \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_j)} Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta = \bar{\eta} = 0} \quad (233)$$

donde solamente sobreviven el mismo número de derivadas respecto a η y $\bar{\eta}$ cuando al final hacemos $\eta = \bar{\eta} = 0$.

Usando nuestra notación abreviada, comprobemos que recuperamos que el propagador es la función de Green de dos puntos para el campo libre:

$$\begin{aligned}
 S_F(x - y) &= -\frac{\delta}{\delta\eta(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] = -\frac{\delta}{\delta\eta_y} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_x} e^{-\langle \bar{\eta}_1 S_{12} \eta_2 \rangle} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta\eta_y} [-\langle S_{x2} \eta_2 \rangle e^{-\langle \bar{\eta}_1 S_{12} \eta_2 \rangle}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = S_{xy} .
 \end{aligned} \tag{234}$$

Nótese que, aunque no los hayamos escrito explícitamente, los campos fermiónicos y las fuentes llevan un índice espinorial $\alpha = 1, \dots, 4$ y el propagador lleva dos.

Si los campos fermiónicos sufren interacciones, $\mathcal{L}_I(\bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0$, podemos generalizar (93) y escribir:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right\} Z_0[\eta, \bar{\eta}] \quad (235)$$

donde $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ viene dado por (229). Un resultado importante que se puede mostrar es que un loop cerrado de fermiones contribuye con **signo contrario** que uno de escalares.

Pruébese comparando los siguientes diagramas para interacciones $\bar{\psi}\psi\phi$ y ϕ^3 , respectivamente:



$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (236)$$

Campo electromagnético

El lagrangiano de Maxwell determina la dinámica del campo electromagnético (en ausencia de fuentes) en términos de un campo vectorial A_μ :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (237)$$

Este lagrangiano es **invariante gauge**, es decir, bajo transformaciones **locales** de la forma:

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Omega(x). \quad (238)$$

Esto significa que A_μ hace una **descripción redundante** del campo electromagnético, pues la clase de vectores A_μ que se pueden conectar con un A_μ^Ω fijo mediante transformaciones Ω dan lugar al mismo campo electromagnético. Es decir podemos agrupar todos los A_μ en clases A_μ^Ω ,

$$A_\mu(x) \sim A_\mu^\Omega(x), \quad \Omega(x). \quad (239)$$

Campo electromagnético

Entonces, si para cuantizar el electromagnetismo (electrodinámica cuántica, QED) simplemente consideramos el funcional generador

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu) \right\} \quad (240)$$

donde la integración funcional se hace sobre **todos** los A_μ estaremos haciendo contaje múltiple (infinitas veces) de los caminos posibles, que claramente conduce a una $Z[J]$ y, derivando respecto a J , unas funciones de Green infinitas.

Este problema está conectado con la imposibilidad de definir un propagador para el fotón. Recordemos que para conseguirlo debemos fijar un gauge, lo que podemos conseguir añadiendo a \mathcal{L}_0 un término de **gauge fixing** \mathcal{L}_{GF} ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (241)$$

e imponiendo el gauge de Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$.

Campo electromagnético

Entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \\ &\Rightarrow \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu A_\mu = 0 \\ &\Rightarrow \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu = 0\end{aligned}\quad (242)$$

y el propagador del fotón en el espacio de momentos es (excepto por un factor i) el inverso de

$$-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu . \quad (243)$$

Nótese que este operador es invertible gracias a que hemos introducido el término de **gauge fixing**, pues $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ es singular (tiene autovalor nulo k^μ).

Campo electromagnético

Hallando el inverso de (243) obtenemos

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \zeta) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (244)$$

donde se ha incluido la prescripción de Feynman que ya hemos discutido. Los resultados físicos no dependerán de ζ , aunque el propagador sí depende. Para facilitar los cálculos se puede elegir el llamado R_ζ gauge más apropiado. Los más usuales son:

$$\zeta = 1 : \text{ gauge de 't Hooft-Feynman} \quad (245)$$

$$\zeta = 0 : \text{ gauge de Landau} \quad (246)$$

$$\zeta \rightarrow \infty : \text{ gauge unitario.} \quad (247)$$

Pues bien, veamos que en el formalismo de cuantización funcional el término de **gauge-fixing** es necesario para evitar el conteo múltiple (infinito) de configuraciones en el generador funcional.

Campo electromagnético

Recordando (239) podemos separar

$$\int \mathcal{D}A_\mu = \int \mathcal{D}\Omega \int \mathcal{D}A_\mu^\Omega \quad (248)$$

donde el primer factor es el responsable de la divergencia del funcional generador. Nos gustaría integrar sobre un solo representante A_μ^Ω de cada clase de campos conectados mediante una transformación de gauge Ω . Para ello, imponemos una condición de gauge:

$$\boxed{F[A_\mu] = 0} \quad (249)$$

donde $F[A_\mu]$ es un funcional cualquiera de A_μ , por ejemplo $F[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu$ en el gauge de Lorenz, y usamos que integrar sobre los campos de una clase es equivalente a integrar sobre todos los campos con la restricción de que cumplan la condición de gauge (249):

Campo electromagnético

$$\begin{aligned}\mathcal{D}A_\mu^\Omega &= \mathcal{D}A_\mu \delta(A_\mu \sim A_\mu^\Omega) \\ &= \mathcal{D}A_\mu \delta[F[A_\mu]] \det M\end{aligned}\quad (250)$$

donde hemos escrito una función delta simbólica en la primera igualdad de (250) y hemos introducido

$$M(x, y) = \left. \frac{\delta F[A_\mu(x)]}{\delta \Omega(y)} \right|_{F=0}, \quad (251)$$

de la misma forma que

$$\delta(x - x_0) = \delta(f(x)) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{f(x_0)=0}, \quad (252)$$

como es bien conocido.

Campo electromagnético

Consideremos ahora una clase de condiciones de gauge de la forma

$$F[A_\mu] - C(x) = 0 \quad (253)$$

donde $C(x)$ es una función arbitraria, independiente de A_μ . Nótese que $\det M$ es independiente de $C(x)$. Podemos usar esto para **reemplazar la función delta** de (250) por un funcional de F promediando sobre C de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A_\mu^\Omega &= \int \mathcal{D}A_\mu \delta[F[A_\mu] - C(x)] \det M \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \det M \int \mathcal{D}C \delta[F[A_\mu] - C(x)] G[C] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu G[F[A_\mu]] \det M \end{aligned} \quad (254)$$

donde $G[C]$ es un funcional arbitrario y se ha ignorado un factor de normalización irrelevante. La elección habitual es

$$G[C] = \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x C^2(x) \right\} . \quad (255)$$

Campo electromagnético

Es interesante notar que, salvo un factor de normalización, esta elección cumple

$$G[C] \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \delta[C] . \quad (256)$$

Por tanto, si nos restringimos a los campos A_μ que verifiquen la condición de gauge, nuestra integral de camino ya no será redundante y habremos descontado el factor infinito $\int d\Omega$ de (248) reemplazando

$$\int \mathcal{D}A_\mu \rightarrow \int \mathcal{D}A_\mu \det M \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x F^2[A_\mu] \right\} . \quad (257)$$

Ahora viene el **truco**. Podemos convertir el determinante anterior en una integral funcional gaussiana sobre variables de Grassmann infinito-dimensionales al estilo de (210):

$$\det M = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) M(x, y) \eta(y) \right\} \quad (258)$$

donde se han renombrado las variables de (210) de modo que $\bar{\alpha}\alpha \equiv i\bar{\eta}\eta$ y se ha absorbido el factor i en la (irrelevante) normalización de la integral funcional.

Campo electromagnético

Así que finalmente, en el funcional generador hemos de reemplazar

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_0 \right\} \rightarrow \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L} \right\} \quad (259)$$

donde no solamente hemos añadido a \mathcal{L}_0 un término de **gauge-fixing** \mathcal{L}_0 sino también un término de **Faddeev-Popov** \mathcal{L}_{FP} , de modo que

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right\} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\tilde{\xi}} F^2[A_\mu] - \bar{\eta} M \eta \end{aligned} \quad (260)$$

Los campos auxiliares $\eta(x)$ y $\bar{\eta}(x)$ se llaman **fantasmas de Faddeev-Popov**. Son campos escalares (no tienen índices espinoriales) pero, sin embargo, anticonmutan (tienen estadística de Fermi), así que **no son físicos** y nunca aparecerán como campos externos sino en **loops** en diagramas de Feynman.*

* Debido a su carácter anticonmutante, un **loop** cerrado de fantasmas introduce un signo $(-)$.

Campo electromagnético

De hecho, en una **teoría gauge abeliana**, como la QED, **los fantasmas se pueden ignorar** completamente pues no se acoplan al campo A_μ y su contribución a $Z[J]$ consiste simplemente en cambiar su normalización. Solamente hay que añadir al \mathcal{L}_0 un término de **gauge-fixing**, que en el gauge de Lorenz es

$$F[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 . \quad (261)$$

Sin embargo, en una **teoría gauge no abeliana**, como el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles (EWSM) y fuertes (cromodinámica cuántica, QCD), los fantasmas contribuyen a los **loops**. Veamos esto. Consideremos un lagrangiano de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \tilde{W}_{\mu\nu} \tilde{W}^{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} \quad (262)$$

Campo electromagnético

que es invariante bajo transformaciones de gauge

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \mapsto U\tilde{W}_{\mu\nu}U^\dagger, \quad U = \exp\{-iT_a\omega^a\} \quad (263)$$

donde $\{T_a\}$ son los N generadores del grupo de simetrías con álgebra de Lie:

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (f_{abc} \text{ totalmente antisimétricas}) \quad (264)$$

y se ha introducido la notación:

$$\tilde{W}_\mu \equiv T_a W_\mu^a \quad (265)$$

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv T_a W_{\mu\nu}^a = D_\mu \tilde{W}_\nu - D_\nu \tilde{W}_\mu = \partial_\mu \tilde{W}_\nu - \partial_\nu \tilde{W}_\mu - ig[\tilde{W}_\mu, \tilde{W}_\nu] \quad (266)$$

$$\Rightarrow W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf_{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (267)$$

y la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\tilde{W}_\mu. \quad (268)$$

Campo electromagnético

Los N campos de gauge $\{W_\mu^a\}$ se transforman

$$\begin{aligned}\tilde{W}_\mu(x) &\mapsto U\tilde{W}_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \\ \Rightarrow W_\mu^a &\mapsto W_\mu^a - f_{abc}W_\mu^b\omega^c - \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a\end{aligned}\quad (269)$$

que coincide con el caso abeliano (238) reemplazando $f_{abc} = 0$, $W_\mu^a \rightarrow W_\mu$ y $\omega^a \rightarrow -g\Omega$. La condición de gauge es ahora:

$$F[W_\mu^a] = 0, \quad \forall a = 1, \dots, N \quad (270)$$

y en el gauge de Lorenz:

$$F[W_\mu^a] = \partial^\mu W_\mu^a \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{GF}} = -\sum_a \frac{1}{2\zeta_a} (\partial^\mu W_\mu^a)^2. \quad (271)$$

Entonces, en este gauge,

$$F[W_\mu^a] \mapsto F[W_\mu^a] - f_{abc}\partial^\mu(W_\mu^b\omega^c) - \frac{1}{g}\square\omega^a \quad (272)$$

Campo electromagnético

y el determinante de Faddeev-Popov es por tanto:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= \frac{\delta F[W_\mu^a]}{\delta \omega^b} = f_{abc} (\partial^\mu W_\mu^c + W_\mu^c \partial^\mu) - \frac{1}{g} \delta_{ab} \square \\
 &= -\frac{1}{g} \left(\delta_{ab} \square - g f_{abc} W_\mu^c \partial^\mu \right)
 \end{aligned} \tag{273}$$

donde hemos usado la condición de gauge $\partial^\mu W_\mu^c = 0$. Podemos ahora extraer el factor g^{-1} redefiniendo los fantasmas de Faddeev-Popov $\eta = \{\eta^a\}$ y $\bar{\eta} = \{\bar{\eta}^a\}$ con $a = 1, \dots, N$ de modo que

$$\begin{aligned}
 \det M &= \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -i \int d^4x \bar{\eta}^a (\delta_{ab} \square - g f_{abc} W_\mu^c \partial^\mu) \eta^b \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \int d^4x [\partial^\mu \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^a - g f_{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) \eta^b W_\mu^c] \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{FP}} \right\}
 \end{aligned} \tag{274}$$

Campo electromagnético

donde se ha vuelto a usar la condición de gauge y que las derivadas totales se anulan. Nótese que el lagrangiano de Faddeev-Popov contiene **interacciones de fantasmas con campos de gauge** que podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = (\partial^\mu \bar{\eta}^a) (\partial_\mu \eta^a - g f_{abc} \eta^b W_\mu^c) = (\partial^\mu \bar{\eta}^a) (D_\mu^{\text{adj}})_{ab} \eta^b \quad (275)$$

donde se ha introducido la derivada covariante en la irrep adjunta del grupo:

$$D_\mu^{\text{adj}} = \partial_\mu - ig T_c^{\text{adj}} W_\mu^c, \quad (T_c^{\text{adj}})_{ab} = -if_{abc}. \quad (276)$$

Así que en el caso de un grupo no abeliano se introducen tantos fantasmas η y $\bar{\eta}$ como generadores tenga el grupo y, a diferencia del caso abeliano, en general no se pueden integrar sin consecuencias, pues se acoplan a los bosones de gauge, aunque sólo aparecen en líneas internas, concretamente no hay que olvidarlos en **loops** (interaccionan por parejas).**

** Existe un gauge muy particular, el **gauge axial**, en el que se pueden desacoplar las interacciones entre fantasmas y bosones de gauge y por tanto ignorar sus contribuciones. El precio a pagar es un propagador muy complicado para los bosones de gauge.

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson son la versión cuántica de las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange. Constituyen las ecuaciones de movimiento para las funciones de Green y juegan un papel muy importante para estudiar las leyes de conservación que se derivan de las simetrías de la teoría.

Se obtienen a partir de una observación muy simple: la integral de una derivada total es cero. Aplicando esto sobre el funcional generador tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \exp \left\{ iS[\phi] + i \int d^4x J\phi \right\} \\ &= i \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} + J \right) \exp \left\{ iS[\phi] + i \int d^4x J\phi \right\} \end{aligned} \quad (277)$$

de donde, usando que

$$\phi(x) e^{i\langle J\phi(x) \rangle} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} e^{i\langle J\phi \rangle} \Rightarrow \int \mathcal{D}\phi G[\phi] e^{i\langle J\phi \rangle} = G \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \int \mathcal{D}\phi e^{i\langle J\phi \rangle} \quad (278)$$

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva

como ya hicimos en (92), podemos escribir:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ i & \delta J \end{bmatrix} + J \right) Z[J] = 0 \quad (279)$$

Esta es la relación de Schwinger-Dyson, que es independiente de la teoría de perturbaciones y es el punto de partida para obtener ecuaciones integrales que relacionan diversas funciones de Green **a base de tomar derivadas** con respecto a los campos. Desarrollando en serie, también se puede usar para reproducir la teoría de perturbaciones.

La estrategia será convertir la expresión (279) para $Z[J]$ en expresiones para $W[J]$ y para $\Gamma[\varphi]$.

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva

Consideremos por ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$:

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right), \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (280)$$

Entonces

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -(\square + m^2)\phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (281)$$

y la relación de Schwinger-Dyson (279) implica:

$$-(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z}{\delta J} - \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)^3 Z + JZ = 0. \quad (282)$$

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva

Recordando que

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad (283)$$

tenemos

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z}{\delta J} = Z \frac{\delta W}{\delta J} \quad (284)$$

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)^3 Z = Z \left[\left(\frac{\delta W}{\delta J} \right)^3 - 3i \frac{\delta W}{\delta J} \frac{\delta^2 W}{\delta J^2} - \frac{\delta^3 W}{\delta J^3} \right]. \quad (285)$$

Usando lo anterior, sustituyendo

$$\varphi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)}, \quad (286)$$

y dividiendo por Z , la expresión (282) queda:

$$(\square + m^2)\varphi = J - \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 + \frac{i\lambda}{4} \frac{\delta \varphi^2}{\delta J} + \frac{\lambda}{3!} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta J^2}. \quad (287)$$

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y acción efectiva

Los dos primeros términos de la derecha nos dan las **ecuaciones de movimiento clásicas** en presencia de una fuente externa J , **modificadas** por los dos términos siguientes, que son las **correcciones cuánticas**. Si no hay interacciones no hay correcciones, pero si $\lambda \neq 0$ entonces tenemos una fuerza “efectiva” que viene dada por menos la derivada del potencial clásico corregida por otros términos.

De hecho podemos hallar la **acción efectiva** $\Gamma[\varphi]$ a partir de

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)}, \quad (288)$$

despejando J de (287), haciendo un desarrollo en derivadas funcionales,

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = -(\square + m^2)\varphi - \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 + \dots \quad (289)$$

de donde

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \mathcal{O}(\hbar) \right) \quad (290)$$