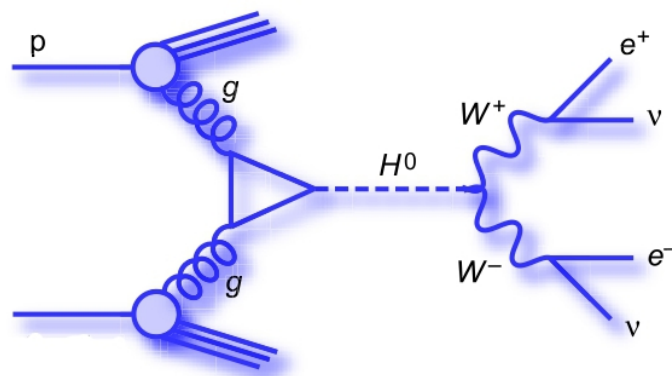


Teoría Cuántica de Campos

José Ignacio Illana*

*Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada*



*Email: jillana@ugr.es



Índice

1	Simetrías de Lorentz y Poincaré en Teoría Cuántica de Campos	1
1.1	Introducción	1
1.1.1	¿Por qué campos cuánticos?	1
1.1.2	Notación, unidades y convenciones	1
1.2	Grupos de Lie	2
1.3	Grupo de Lorentz	4
1.4	Representaciones tensoriales y espinoriales	7
1.5	Representaciones sobre campos	11
1.5.1	Campos escalares	12
1.5.2	Campos de Weyl, Dirac y Majorana	12
1.5.3	Campos vectoriales	14
1.6	Grupo de Poincaré	14
1.6.1	Representaciones sobre campos	15
1.6.2	Representaciones sobre estados de una partícula	15
2	Teoría Clásica de Campos	19
2.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange	19
2.2	Teorema de Noether	22
2.3	Campos escalares	26
2.3.1	Ecuación de Klein-Gordon	26
2.3.2	Campos complejos. Conservación de la carga	28
2.4	Campos espinoriales	29
2.4.1	Ecuación de Weyl	29
2.4.2	Ecuación de Dirac	31
2.4.3	Masa de Majorana	37
2.5	Campo electromagnético	37
2.5.1	Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell	37

2.5.2	Simetría gauge	38
2.5.3	Acoplamiento mínimo con la materia	40
3	Cuantización de campos libres	43
3.1	Campos escalares	43
3.1.1	Espacio de Fock	43
3.1.2	Campos complejos. Antipartículas	47
3.2	Campos de espín $\frac{1}{2}$	48
3.2.1	Campo de Dirac	48
3.2.2	Campo de Weyl sin masa	51
3.2.3	C, P, T	51
3.3	Campo electromagnético	54
3.3.1	Cuantización en el gauge de radiación	54
3.3.2	Cuantización covariante	57
3.3.3	C, P, T	60
4	Interacciones de campos y diagramas de Feynman	61
4.1	La matriz S	61
4.2	La fórmula de reducción de LSZ	62
4.3	Teoría de perturbaciones	65
4.4	Propagador de Feynman. Causalidad	68
4.5	Teorema de Wick	73
4.6	Diagramas de Feynman. Reglas de Feynman	74
5	Observables	93
5.1	Normalización de estados relativistas y no relativistas	93
5.2	Anchura de desintegración	94
5.3	Sección eficaz	96
5.4	Límite no relativista: potenciales de interacción	98
6	Procesos elementales en QED	101
6.1	El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED	101
6.2	Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	103
6.3	Comentarios	107
6.3.1	Sobre el propagador y los estados de polarización	107
6.3.2	Sobre los signos relativos entre diagramas	109
6.3.3	Sobre partículas idénticas	110

6.3.4	Sobre las polarizaciones de los bosones vectoriales	110
6.3.5	Sobre la simetría de <i>crossing</i> y las variables de Mandelstam	112
7	Introducción a las correcciones radiativas	115
7.1	Correcciones cuánticas: <i>Loops</i>	115
7.2	Divergencias ultravioletas	117
7.2.1	$\lambda\phi^n$	118
7.2.2	QED	120
7.3	Regularización dimensional	121
7.4	Renormalización de la QED	127
7.5	Teorema óptico. Resonancias	134
	Bibliografía	137

Tema 1

Simetrías de Lorentz y Poincaré en Teoría Cuántica de Campos

1.1 Introducción

1.1.1 ¿Por qué campos cuánticos?

La teoría cuántica de campos (TQC) surge al combinar la relatividad especial y la mecánica cuántica. Es posible escribir una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. De hecho fue él el primero en encontrar lo que hoy se conoce como ecuación de Klein-Gordon, pero la desechó por no describir correctamente la estructura fina del átomo de hidrógeno, así que se quedó con su límite no relativista.

Sin embargo, las ecuaciones de ondas (sean o no relativistas) no pueden explicar procesos en los que cambia el número de partículas. Además las ecuaciones de ondas relativistas sufren patologías, como la aparición de densidades de probabilidad negativa, la existencia de soluciones de energía negativa y la violación de causalidad (probabilidad no nula de encontrar partículas propagándose fuera del cono de luz).

La TQC proporciona un marco natural para manejar estados con un número arbitrario de partículas (espacio de Fock), da sentido a las soluciones de energía negativa (antipartículas), resuelve el problema de la causalidad (la propagación de una partícula fuera del cono de luz es indistinguible de la de su antipartícula viajando en dirección opuesta, y sus amplitudes se cancelan), explica la relación entre espín y estadística, y permite calcular observables (secciones eficaces, vidas medias, momentos magnéticos) con elevadísima precisión y de acuerdo con el experimento.

1.1.2 Notación, unidades y convenciones

Usaremos unidades naturales $\hbar = c = 1$. Entonces las siguientes magnitudes tienen las mismas dimensiones: $[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}$.

Una relación muy útil es:

$$\hbar c = 197.326\,9631(49) \text{ MeV fm} \Rightarrow 25 \text{ GeV}^{-2} \simeq 10^{-30} \text{ m}^2 = 10 \text{ mbarn} , \quad (1.1)$$

donde $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ (un Fermi, del orden del radio del protón) y $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Nuestra convención de signos para la *métrica de Minkowski* es

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.2)$$

Usaremos la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos, de modo que

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \quad (1.3)$$

donde se han usado índices *contravariantes* $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ e índices *covariantes* $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\vec{A}) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. En particular, $x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x})$ y

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (1.4)$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \quad \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (1.5)$$

Los índices griegos (μ, ν, \dots) toman valores 0,1,2,3. Reservaremos índices latinos (i, j, \dots) para las componentes espaciales. El cuadrimomento es entonces

$$p^\mu = i\partial^\mu = (p^0, \vec{p}) = (E, \vec{p}), \quad p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (1.6)$$

$$p^0 = i\partial^0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p^k = i\partial^k = i\frac{\partial}{\partial x_k} = -i\frac{\partial}{\partial x^k} = -i\partial_k \equiv -i\nabla^k. \quad (1.7)$$

Usaremos el sistema de unidades de Heaviside-Lorentz para el electromagnetismo, en el que la constante de estructura fina es

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = 1/137.035\,999\,11(46). \quad (1.8)$$

Así la unidad de carga eléctrica si $\hbar = c = 1$ es $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ (adimensional), las ecuaciones de Maxwell se escriben

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}, \quad (1.9)$$

y el potencial de Coulomb entre dos cargas $Q_1 = eq_1$ y $Q_2 = eq_2$ es

$$V(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r} = q_1 q_2 \frac{\alpha}{r}. \quad (1.10)$$

1.2 Grupos de Lie

Un *grupo* es un conjunto de elementos G , no necesariamente numerable, con una ley de composición interna que satisface las propiedades asociativa, existencia de un elemento neutro e , y existencia del elemento inverso a^{-1} de cada elemento a .

Los elementos g de un *grupo de Lie* dependen de forma continua y diferenciable de un conjunto de parámetros reales θ_a , $a = 1, \dots, N$, es decir $g(\theta)$, siendo el elemento neutro $g(0) = e$ y el elemento inverso $g^{-1}(\theta) = g(-\theta)$. N es la *dimensión del grupo*.

Un *subgrupo* es un subconjunto de G que también es grupo. Un *subgrupo invariante* H es tal que $\forall h \in H$ y $\forall g \in G$, $ghg^{-1} \in H$. Un *grupo simple* es aquel que no tiene ningún subgrupo invariante propio.^a Por ejemplo $SU(n)$ es simple y $U(n)$ no es simple.

Una *representación* R asigna a cada elemento g un operador lineal $D_R(g)$ de un espacio vectorial, $g \mapsto D_R(g)$, tal que: (i) $D_R(e) = \mathbb{1}$ (operador identidad), (ii) $D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2)$. En un espacio vectorial de dimensión finita, g está representado por una matriz $n \times n$, $[D_R(g)]^i_j$, que induce una transformación lineal del espacio vectorial cuya actuación sobre la base (ϕ^1, \dots, ϕ^n) viene dada por $\phi^i \mapsto [D_R(g)]^i_j \phi^j$.

Dos representaciones R y R' son *equivalentes* si $\exists S$ tal que $D_R(g) = S^{-1}D_{R'}(g)S$, $\forall g$. Es decir, están relacionadas mediante un cambio de base.

La representación R es *reducible* si deja invariante un subespacio no trivial. De lo contrario es *irreducible* (irrep). Se dice que R es *completamente reducible* si $\forall g$, $D_R(g)$ puede escribirse a bloques, es decir, si puede elegirse una base $\{\phi^i\}$ de forma que existan subespacios de vectores que no se mezclan con otros bajo la acción del grupo. En ese caso, R puede escribirse como *suma directa* de varias irreps: $D_R = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$

Si un elemento del grupo de Lie es infinitesimalmente próximo a la identidad entonces $D_R(\delta\theta) = \mathbb{1} - i\delta\theta_a T_R^a$. Los operadores $T_R^a = i\partial D_R/\partial\theta_a|_{\theta=0}$, con $a = 1, \dots, N$, son los *generadores del grupo* en la representación R . El número de generadores es la dimensión del grupo. Para una transformación arbitraria: $D_R(\theta) = \exp\{-i\theta_a T_R^a\}$. Nótese que si D_R es una *representación unitaria* (el inverso de cada elemento es su adjunto) entonces los generadores son hermíticos. Además toda representación unitaria es completamente reducible. Recordemos que en física los observables son operadores hermíticos.

Los generadores satisfacen el álgebra de Lie: $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, donde f^{abc} son las *constantes de estructura* del grupo, que son independientes de la representación. Para hallar la representación del grupo *basta con encontrar las representaciones del álgebra*. Si el grupo es *abeliano*, $[T^a, T^b] = 0$ y $\exp\{-i\alpha^a T^a\} \exp\{-i\beta^b T^b\} = \exp\{-i(\alpha^c + \beta^c)T^c\}$. Las irreps de un grupo abeliano son unidimensionales.

Los *operadores de Casimir* son aquellos que conmutan con todos los generadores. Son múltiplos de la identidad y la constante de proporcionalidad λ sirve para etiquetar las irreps. Por ejemplo, $SU(2)$ (grupo de las rotaciones en tres dimensiones) tiene tres generadores, los operadores momento angular J^k con $k = 1, 2, 3$, que satisfacen el álgebra de Lie $[J^k, J^l] = i\epsilon^{klm}J^m$ y un operador de Casimir, $\vec{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 = \lambda\mathbb{1}$, con $\lambda = j(j+1)$ y $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ etiquetando las irreps (cuya dimensión es $2j+1$). El tensor ϵ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita,

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación par de } (123), \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación impar de } (123), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Hablamos de *grupo compacto* si su variedad paramétrica es compacta. Por ejemplo, el grupo de las rotaciones es compacto pero el de las traslaciones no lo es. Si el grupo es compacto el parámetro que etiqueta cada irrep toma valores discretos (e.g. el espín j del grupo de las rotaciones) y si no es compacto toma valores continuos (e.g. el momento p de las traslaciones espaciales). *Las representaciones de dimensión finita de un grupo compacto son unitarias. Las representaciones de dimensión finita de un grupo no compacto simple*

^aUn subgrupo propio es uno no trivial, es decir, ni el formado solo por el elemento neutro, ni todo G .

no son unitarias.^b

El grupo de Lorentz, que repasaremos a continuación, es simple y no compacto. Sus representaciones de dimensión finita no son unitarias y sus representaciones unitarias son de dimensión infinita (espacio de Hilbert de una partícula).

1.3 Grupo de Lorentz

Se define como el grupo de las transformaciones lineales de coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad x^\mu = (t, x, y, z) \quad (1.12)$$

que dejan invariante la cantidad

$$x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (1.13)$$

Es por tanto isomorfo al grupo $O(1, 3)$. Formalmente,

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\rho x^\rho) (\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma) = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad (\forall x) \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = (\Lambda^T)_\rho^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (1.16)$$

Por otro lado, mirando la componente 00 de (1.15),

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \Lambda^0_0 \geq 1 \\ \Lambda^0_0 \leq -1 \end{cases} \quad (1.17)$$

y a partir de (1.16),

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (1.18)$$

Así que podemos distinguir cuatro tipos de transformaciones de Lorentz:

1. *Ortocronas* ($\Lambda^0_0 \geq 1$) *propias* ($\det \Lambda = +1$)

Forman grupo. Es isomorfo a $SO(1,3)$. En adelante llamaremos “grupo de Lorentz” a este grupo. Sus elementos son transformaciones continuas (grupo de Lie) que se pueden conectar con la identidad mediante sucesivas transformaciones infinitesimales. Sus elementos son *rotaciones* en las tres dimensiones espaciales y *boosts* (transformaciones de Lorentz *puras*). Véase figura 1.1. Estas últimas relacionan los sistemas de coordenadas de dos observadores inerciales (que se mueven con velocidad relativa constante).

Las demás transformaciones obviamente no forman grupo y se pueden escribir como producto de inversiones (transformaciones discretas) y transformaciones de Lorentz ortocronas propias Λ_P . Son las siguientes.

^bPero si no es simple pueden ser unitarias o no. Ejemplo de grupo no compacto no simple con representaciones de dimensión finita unitarias son las traslaciones espaciales en una dimensión; y con representaciones no unitarias son los *boosts* a lo largo de una dirección dada. Nótese que éste último es un subgrupo no invariante, no simple, del grupo de Lorentz, que es simple.

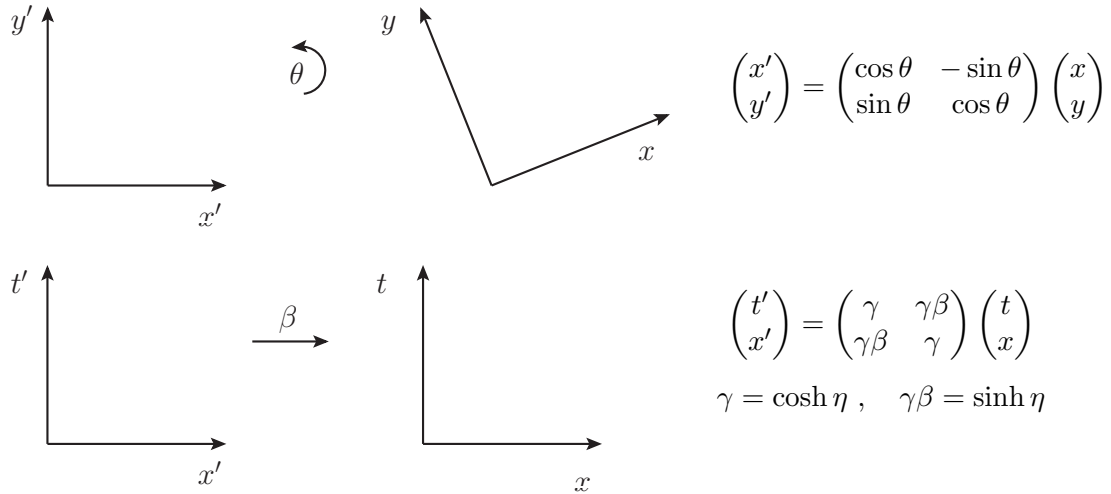


Figura 1.1: Rotaciones y boosts.

2. No ortocronas ($\Lambda^0_0 \leq -1$) propias ($\det \Lambda = +1$)

Transformaciones tipo $\Lambda_P \times \{\text{diag}(-, -, -, -), \text{diag}(-, -, +, +), \text{diag}(-, +, -, +), \text{diag}(-, +, +, -)\}$. Incluye a las inversiones totales, $\text{diag}(-, -, -, -)$.

3. Ortocronas ($\Lambda^0_0 \geq 1$) impropias ($\det \Lambda = -1$)

Transformaciones tipo $\Lambda_P \times \{\text{diag}(+, +, +, -), \text{diag}(+, +, -, +), \text{diag}(+, -, +, +), \text{diag}(+, -, -, -)\}$. Incluye a las inversiones espaciales, $\text{diag}(+, -, -, -)$.

4. No ortocronas ($\Lambda^0_0 \leq -1$) impropias ($\det \Lambda = -1$)

Transformaciones tipo $\Lambda_P \times \{\text{diag}(-, -, -, +), \text{diag}(-, -, +, -), \text{diag}(-, +, -, -), \text{diag}(-, +, +, +)\}$. Incluye a las inversiones temporales, $\text{diag}(-, +, +, +)$.

Veamos cuántos parámetros tiene el grupo de Lorentz (de transformaciones ortocronas propias). Tomando una transformación infinitesimal arbitraria $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, la ecuación (1.15) implica:

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) \\ &= g_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \mathcal{O}(\omega^2) \Rightarrow \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por tanto, ω es antisimétrica y tiene 6 parámetros independientes. Cualquier Λ puede escribirse como producto de rotaciones (R), que se pueden parametrizar con 3 ángulos $\theta \in [0, 2\pi]$ en torno a ejes x, y, z en sentido dextrógiro, y boosts (L), que se pueden parametrizar especificando las 3 componentes de la velocidad $\beta \in (-1, 1)$ a lo largo de los ejes x, y, z . En particular,

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & 0 & s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

$$L_x = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

con $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Conviene sustituir el parámetro de velocidad β por la *rapidity* $\eta \in (-\infty, \infty)$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (1.22)$$

que es un parámetro aditivo, como lo es también θ . Es decir, si hacemos dos *boosts* con *rapidities* η_A y η_B a lo largo de una *misma dirección* \hat{n} entonces $L_{\hat{n}}(\eta_A)L_{\hat{n}}(\eta_B) = L_{\hat{n}}(\eta_A + \eta_B)$. Esto es fácil de comprobar a partir de las propiedades de las funciones hiperbólicas, pues

$$\gamma = \cosh \eta, \quad \gamma\beta = \sinh \eta. \quad (1.23)$$

Halleemos el álgebra de los generadores para encontrar las irreps del grupo de Lorentz. Para ello tomemos transformaciones de Lorentz infinitesimales:

$$R_x(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\delta\theta \\ 0 & 0 & \delta\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^1 \Rightarrow J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$R_y(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\delta\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^2 \Rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$R_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta & 0 \\ 0 & \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\theta J^3 \Rightarrow J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$L_x(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\eta & 0 & 0 \\ \delta\eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^1 \Rightarrow K^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$L_y(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \delta\eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^2 \Rightarrow K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$L_z(\delta\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta\eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\eta K^3 \Rightarrow K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Nótese que, como la variedad paramétrica de los *boosts* no es compacta, sus generadores no son hermíticos ($(K^m)^\dagger = -K^m$). El álgebra de Lie es

$$[J^k, J^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} J^m, \quad [K^k, K^\ell] = -i\epsilon^{k\ell m} J^m, \quad [J^k, K^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} K^m \quad (k, \ell, m \in \{1, 2, 3\}) \quad (1.30)$$

Vemos que las rotaciones cierran álgebra, pues $SU(2)$ es un subgrupo del grupo de Lorentz. Sin embargo, los *boosts* no son un subgrupo. Conviene reescribir estos 6 generadores como

$$A^m = \frac{1}{2}(J^m + iK^m), \quad B^m = \frac{1}{2}(J^m - iK^m). \quad (1.31)$$

A^m y B^m son hermíticos y verifican el álgebra de Lie:

$$[A^k, A^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} A^m, \quad [B^k, B^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} B^m, \quad [A^k, B^\ell] = 0. \quad (1.32)$$

Es decir, el grupo de Lorentz es localmente isomorfo a $SU(2) \times SU(2)$ pues tienen el mismo álgebra. Esto nos permite etiquetar sus irreps como (j_1, j_2) , de dimensión $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Nótese que hemos encontrado irreps del grupo de Lorentz de dimensión finita, pero no son unitarias, porque no es compacto:

$$\Lambda = \exp\{-i(\theta^m J^m + \eta^m K^m)\} \equiv \exp\{-i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\}, \quad (1.33)$$

$$\Lambda^{-1} = \exp\{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\} \neq \Lambda^\dagger = \exp\{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} - \vec{\eta} \cdot \vec{K})\}. \quad (1.34)$$

Otra forma de escribir los generadores del grupo de Lorentz es la siguiente. Tomamos como parámetros los 6 elementos independientes de una matriz antisimétrica $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Los generadores son entonces las 6 componentes independientes del operador antisimétrico $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$,

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \quad (1.35)$$

(el factor $\frac{1}{2}$ compensa el hecho de que sumamos $\forall\mu, \nu$ en vez de $\forall\mu < \nu$) con

$$J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{k\ell m} J^{\ell m} \Rightarrow \begin{cases} J^1 = J^{23} = -J^{32} \\ J^2 = J^{31} = -J^{13} \\ J^3 = J^{12} = -J^{21} \end{cases} \quad (1.36)$$

$$K^k = J^{0k} = -J^{k0}. \quad (1.37)$$

Los parámetros se relacionan con ángulos y *rapidities* mediante

$$\theta^k = \frac{1}{2}\epsilon^{k\ell m}\omega^{\ell m} \Rightarrow \begin{cases} \theta^1 = \omega^{23} = -\omega^{32} = \omega_{23} = -\omega_{32} \\ \theta^2 = \omega^{31} = -\omega^{13} = \omega_{31} = -\omega_{13} \\ \theta^3 = \omega^{12} = -\omega^{21} = \omega_{12} = -\omega_{21} \end{cases} \quad (1.38)$$

$$\eta^k = \omega^{0k} = -\omega^{k0} = -\omega_{0k} = \omega_{k0}. \quad (1.39)$$

y los generadores pueden escribirse de forma covariante como

$$(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\sigma - g^{\nu\rho}\delta^\mu{}_\sigma). \quad (1.40)$$

El álgebra de Lie de estos generadores es:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}). \quad (1.41)$$

1.4 Representaciones tensoriales y espinoriales

Lo que acabamos de ver es la representación en cuatro dimensiones del grupo de Lorentz, que nos ha servido para definir el grupo. Podemos plantearnos si es irreducible (lo es) y si es su representación no trivial de dimensión más pequeña (veremos que no lo es). Se llama *representación vectorial* del grupo de Lorentz:

$$\mathbf{4}: \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \left[\exp\{-i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K})\} \right]^\mu{}_\nu = \left[\exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right\} \right]^\mu{}_\nu \quad (1.42)$$

Un cuadrivector V^μ (ó V_μ) es un vector del espacio vectorial invariante e irreducible sobre el que actúa Λ ,

$$V^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \quad V_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu. \quad (1.43)$$

Nótese que $\Lambda^\mu{}_\nu$ y $\Lambda_\mu{}^\nu$ son representaciones equivalentes, pues están relacionadas mediante una transformación de semejanza $S = g_{\mu\nu}$,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} \Lambda_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu}. \quad (1.44)$$

Con frecuencia se identifica el término representación con el de espacio de representación. Así, diremos que V^μ y V_μ son irreps equivalentes. V_μ es el vector asociado al V^μ en el espacio dual, así que la matriz $\Lambda_\mu{}^\nu$ es la inversa de $\Lambda^\mu{}_\nu$. En efecto, usando (1.15):

$$\Lambda_\tau{}^\nu \Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda_\tau{}^\nu g^{\mu\rho} \Lambda_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu} = \Lambda_\tau{}^\nu g_{\nu\sigma} \Lambda_\rho{}^\sigma g^{\mu\rho} = g_{\tau\rho} g^{\mu\rho} = \delta_\tau^\mu. \quad (1.45)$$

Pueden construirse representaciones de dimensiones mayores mediante el producto tensorial $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \dots$. Se llaman *representaciones tensoriales* y sus vectores son *tensores* con varios índices (su número se llama *rango*). Así, un tensor de dos índices (contravariantes) $T^{\mu\nu}$ se transforma como:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4}: \quad T^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} T^{\mu'\nu'}. \quad (1.46)$$

La representación producto tensorial es reducible. En particular, si $T^{\mu\nu}$ es simétrico (antisimétrico) su transformado también es simétrico (antisimétrico). Además, su traza es invariante (*escalar*).^c De hecho, los tensores de rango dos pueden escribirse como suma directa de subespacios invariantes e irreducibles:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{9}, \quad (1.47)$$

de modo que cualquier tensor de rango dos puede descomponerse en

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T + A^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu \quad (\text{traza}), \quad (1.49)$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (\text{parte antisimétrica}), \quad (1.50)$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T \quad (\text{parte simétrica de traza nula}). \quad (1.51)$$

Por el mismo razonamiento de antes, $T^{\mu\nu}$, $T^\mu{}_\nu$, $T_\mu{}^\nu$ y $T_{\mu\nu}$ son representaciones (reducibles) equivalentes del grupo de Lorentz. Un ejemplo de tensor de rango dos es el tensor $g_{\mu\nu}$ que además es invariante, por definición de transformación de Lorentz (1.15).

Una irrep importante de cualquier grupo de Lie es la *representación adjunta*, cuya dimensión es igual al número de generadores, que se construye a partir de las constantes de estructura,

$$(T_{\text{adj}}^a)^{bc} = -if^{abc}. \quad (1.52)$$

Esta representación no es en general antisimétrica (pues f^{abc} es antisimétrico en los dos primeros índices pero no siempre en el segundo y el tercero). Puede comprobarse que,

^cEn efecto, $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma} = T$, donde se ha usado (1.15).

en general, las constantes de estructura satisfacen el álgebra de Lie del grupo usando la identidad de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (1.53)$$

sustituyendo $A = T^a$, $B = T^b$, $C = T^c$, lo que implica

$$f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} = 0. \quad (1.54)$$

En el caso del grupo de Lorentz, que es localmente isomorfo a $SU(2) \times SU(2)$, la representación adjunta es precisamente la de los tensores antisimétricos A^ρ_σ , que son combinaciones lineales de la base de generadores $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$ de la ecuación (1.40). (Las constantes de estructura de $SU(n)$ son antisimétricas en los tres índices.)

Es interesante ver cómo se transforman las irreps del grupo de Lorentz bajo el *subgrupo de las rotaciones*. En general, son representaciones reducibles que se pueden escribir como suma directa de varias irreps del grupo de las rotaciones, etiquetadas cada una de ellas por un valor del espín j (recordemos que su dimensión es $2j + 1$). Así,

$$V^\mu = (V^0, \vec{V}) \in \mathbf{4} \text{ bajo el grupo de Lorentz,} \quad (1.55)$$

$$V^\mu \in 0 \oplus 1 \text{ etiquetadas por } j = 0, 1 \text{ bajo el grupo de las rotaciones,} \quad (1.56)$$

i.e. V^0 es un escalar bajo rotaciones (espín 0) y \vec{V} un 3-vector (espín 1). Por otro lado,

$$T^{\mu\nu} \in \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{9} \text{ bajo Lorentz} \quad (1.57)$$

$$= (0 \oplus 1) \otimes (0 \oplus 1) = 0 \oplus (1 \oplus 1) \oplus (0 \oplus 1 \oplus 2) \text{ bajo rotaciones,} \quad (1.58)$$

donde se ha usado que el producto directo de irreps del grupo de las rotaciones es

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2 + 1| \oplus \cdots \oplus |j_1 + j_2|. \quad (1.59)$$

De modo que,

$$\mathbf{1}: \quad T \in 0 \quad (\text{es también un escalar bajo rotaciones}) \quad (1.60)$$

$$\mathbf{6}: \quad A^{\mu\nu} \in 1 \oplus 1 \quad \begin{cases} A^{0i} \\ \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A^{jk} \end{cases} \quad (\text{dos 3-vectores independientes bajo rotaciones que se mezclan bajo Lorentz}) \quad (1.61)$$

Por ejemplo, el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ contiene a los 3-vectores campo eléctrico $E^i = -F^{0i}$ y campo magnético $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F^{jk}$. Otro ejemplo son los propios generadores (1.36,1.37).

$$\mathbf{9}: \quad S^{\mu\nu} \in 0 \oplus 1 \oplus 2 \quad \begin{cases} S^{00} \\ S^{0i} \\ S^{ij} \text{ con } \sum_i S^{ii} = -S^{00} \end{cases} \quad (1.62)$$

En general, un tensor $T^{\mu\nu\rho\cdots}$ con N índices contiene espines $j = 0, 1, \dots, N$.

Como curiosidad, un tensor antisimétrico de rango 4, $A^{\mu\nu\rho\sigma}$, solo tiene una componente independiente, $A^{\mu\nu\rho\sigma} = a\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, y es por tanto un invariante pues

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mapsto \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = (\det \Lambda) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.63)$$

Hemos visto que la representación vectorial y todas las representaciones tensoriales del grupo de Lorentz contienen representaciones de espín j entero ($0, 1, \dots$) bajo el grupo de las rotaciones. Estrictamente, las representaciones de j semientero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) no son válidas, pues para ellas $R^j(0) \neq R^j(2\pi) = -1$. Sin embargo, como los observables en mecánica cuántica son cuadráticos en la función de onda, un signo menos global es admisible y podemos aceptarlas. El grupo de las rotaciones físicamente relevante no es entonces $SO(3)$ sino $SU(2)$ (ambos tienen el mismo álgebra y, por tanto, las mismas irreps). La representación fundamental de $SU(2)$ (grupo de las matrices 2×2 unitarias de determinante unidad) tiene $j = \frac{1}{2}$ (dimensión 2) y se llama *representación espinorial* o *espinor*. Sus generadores son

$$J^k = \frac{1}{2}\sigma^k, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{matrices de Pauli}). \quad (1.64)$$

Todas las representaciones de $SU(2)$ pueden obtenerse a partir del producto tensorial de espinores. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1. \quad (1.65)$$

Del mismo modo, las representaciones (j_1, j_2) del grupo de Lorentz pueden construirse a partir del producto tensorial de las *representaciones espinoriales* $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, que tienen dimensión $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = 2$. Sus vectores se llaman *espinores de Weyl* $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$, $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$ y tienen dos componentes. Por razones que veremos pronto se denominan *left-handed* y *right-handed*. Hallemos su forma explícita:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \quad \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \Rightarrow \vec{J} = \vec{A} + \vec{B}, \quad \vec{K} = -i(\vec{A} - \vec{B}) \quad (1.66)$$

y recordando (1.33) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \psi_L : \quad \vec{A} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \\ \Lambda_L = \exp \left\{ (-i\vec{\theta} - \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \psi_R : \quad \vec{A} = 0, \quad \vec{B} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2} \\ \Lambda_R = \exp \left\{ (-i\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Nótese que $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ son *representaciones conjugadas*:

$$\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 = \Lambda_R. \quad (1.69)$$

Para comprobarlo, úsese que $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^{i*}$. Podemos entonces definir el *espinor conjugado* de ψ_L , que se transforma como un ψ_R , del siguiente modo:

$$\psi_L^c \equiv i\sigma^2 \psi_L^* \in (0, \frac{1}{2}) \quad (\text{se introduce } i \text{ por convenio}) \quad (1.70)$$

pues $\sigma^2 \psi_L^* \mapsto \sigma^2 (\Lambda_L \psi_L)^* = \sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R (\sigma^2 \psi_L^*)$. Entonces tenemos que definir *consistentemente* el conjugado de ψ_R , que se transforma como un ψ_L del siguiente modo, usando $\sigma^{2*} = -\sigma^2$,

$$\psi_R^c \equiv -i\sigma^2 \psi_R^* \in (\frac{1}{2}, 0). \quad (1.71)$$

Es importante notar que las *representaciones espinoriales son complejas*, ya que

$$\psi_L \mapsto \exp \left\{ (-i\vec{\theta} - \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \psi_L, \quad (1.72)$$

$$\psi_R \mapsto \exp \left\{ (-i\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \psi_R, \quad (1.73)$$

de modo que, aunque ψ_L y ψ_R sean reales en un sistema de referencia no lo serán en otro. Sin embargo, en la representación vectorial y sus representaciones tensoriales de rango superior se puede imponer la condición $V_\mu^* = V_\mu$, $T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu}$, etc., que es consistente para cualquier sistema de referencia pues Λ_ν^μ es real.

Por cierto, la representación espinorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tiene dimensión compleja 4. Sus vectores están compuestos por dos espinores de Weyl independientes $((\psi_L)_\alpha, (\xi_R)_\beta)$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$. Puede verse que

$$\xi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad \text{y} \quad \xi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$$

se transforman como cuadvectores contravariantes donde

$$\xi_L \equiv -i\sigma^2 \xi_R^*, \quad \psi_R \equiv i\sigma^2 \psi_L^*, \quad \sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma}).$$

1.5 Representaciones sobre campos

Un campo es una función de las coordenadas con propiedades de transformación bien definidas bajo el grupo de Lorentz. En general, si las coordenadas se transforman

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{infinitesimalmente: } x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu) \quad (1.74)$$

un campo $\phi(x)$ (que puede tener o no índices Lorentz u otros) se transforma

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x'). \quad (1.75)$$

Nuestro objetivo es construir teorías de campos invariantes Lorentz. Para hallar las representaciones del grupo de Lorentz en este espacio de funciones tenemos que comparar $\phi(x)$ con su *transformación infinitesimal* $\phi'(x) = \phi'(x' - \delta x)$:

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &\equiv \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \delta x) - \phi(x) \\ &= \phi'(x') - \delta x^\rho \partial_\rho \phi(x) - \phi(x) \\ &= \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma x^\sigma \partial_\rho \phi(x) \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_\phi^{\mu\nu} \phi(x), \end{aligned} \quad (1.76)$$

donde $J_\phi^{\mu\nu}$ son los generadores de la *representación infinito-dimensional* del grupo de Lorentz sobre el campo ϕ . En el penúltimo paso hemos aproximado $\partial_\rho \phi'(x)$ por $\partial_\rho \phi(x)$, pues difieren a siguiente orden en δx , y en el último hemos escrito

$$\delta x^\rho = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma x^\sigma, \quad (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(g^{\mu\rho} \delta_\sigma^\nu - g^{\nu\rho} \delta_\sigma^\mu). \quad (1.77)$$

1.5.1 Campos escalares

Bajo transformaciones de Lorentz, los *campos escalares* cumplen

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (1.78)$$

Entonces, a partir de (1.76),

$$\delta\phi(x) = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho \phi(x) \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\phi(x) \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow L^{\mu\nu} = -(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (1.80)$$

Recordando que $p^\mu = i\partial^\mu$, vemos que los generadores son $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$. En particular, el generador de las rotaciones es el *momento angular orbital*, como era de esperar:

$$L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}L^{jk} = \epsilon^{ijk}x^j p^k. \quad (1.81)$$

Nótese que las representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz *sí* pueden ser unitarias y *ésta es unitaria* porque los $L^{\mu\nu}$ son hermíticos.

1.5.2 Campos de Weyl, Dirac y Majorana

Bajo transformaciones de Lorentz, los *campos de Weyl* cumplen

$$\psi_L(x) \mapsto \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x), \quad \psi_R(x) \mapsto \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x). \quad (1.82)$$

Entonces, a partir de (1.76) y centrándonos en $\psi_L(x)$,

$$\begin{aligned} \delta\psi_L(x) &= (\Lambda_L - \mathbb{1})\psi_L(x) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho \psi_L(x) \\ &= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu}\psi_L(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi_L(x) \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_L^{\mu\nu}\psi_L(x), \end{aligned} \quad (1.83)$$

donde hemos aplicado (1.79) al segundo sumando y hemos sustituido

$$\Lambda_L - \mathbb{1} \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu} = -i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K}), \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (1.84)$$

Por tanto, los generadores en la representación de campos de Weyl son $J_L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S_L^{\mu\nu}$. En particular, los generadores de las rotaciones (momento angular total) son $J_L^i = L^i + S^i$, que tiene *dos contribuciones*: la orbital, $L^i = \epsilon^{ijk}x^j p^k$, y la debida al espín, $S^i = \frac{1}{2}\sigma^i$. Los generadores de los *boosts* son $J_L^{0k} = L^{0k} - \frac{i}{2}\sigma^k$, que no son hermíticos, y por tanto la representación infinito-dimensional del grupo de Lorentz en campos de Weyl ψ_L *no es unitaria*.

Del mismo modo, puede verse que para el $\psi_R(x)$,

$$\delta\psi_R(x) = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}\psi_R(x), \quad J_R^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S_R^{\mu\nu}, \quad (1.85)$$

donde

$$\Lambda_R - \mathbb{1} \equiv -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S_R^{\mu\nu} = -i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K}), \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (1.86)$$

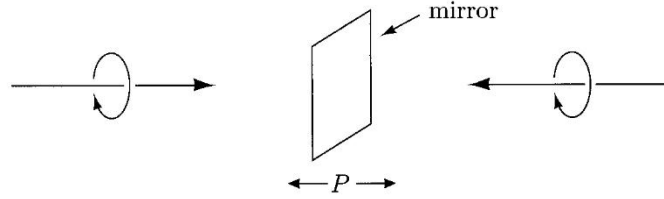


Figura 1.2: La reflexión de un vector y un pseudovector apuntando perpendicularmente a un espejo ilustran una transformación de paridad en esa dirección.

Sus generadores de las rotaciones, $J_R^i = L^i + S^i$, son los mismos que para el $\psi_L(x)$. Los generadores de los *boosts* son $J_R^{0k} = L^{0k} + \frac{i}{2}\sigma^k$, que no son hermíticos, y por tanto la representación infinito-dimensional del grupo de Lorentz en campos de Weyl ψ_R no es unitaria tampoco.

Nótese que bajo una inversión de las coordenadas espaciales (figura 1.2), que llamamos transformación de *paridad* (la hemos excluido en nuestra definición de grupo de Lorentz),

$$(t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x}) \Rightarrow \vec{\beta} \mapsto -\vec{\beta} \Rightarrow \vec{J} \mapsto \vec{J}, \quad \vec{K} \mapsto -\vec{K} \Rightarrow \vec{A} \leftrightarrow \vec{B} \quad (1.87)$$

Esto significa que la representación (j_1, j_2) del grupo de Lorentz no es una representación válida si incluimos la paridad, a no ser que $j_1 = j_2$, pues el transformado bajo paridad de un vector de (j_1, j_2) es un vector de (j_2, j_1) . En particular, los espinores de Weyl, ya sean de $(\frac{1}{2}, 0)$ o de $(0, \frac{1}{2})$, no forman subespacios invariantes bajo paridad.

Sin embargo, podemos definir el *campo de Dirac*, de cuatro componentes complejas:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

que bajo transformaciones de Lorentz (ortocronas, propias), $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$,

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x') = \Lambda_D \psi(x), \quad \Lambda_D = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

y bajo paridad, $x^\mu = (t, \vec{x}) \mapsto \tilde{x}^\mu = (t, -\vec{x})$,

$$\psi(x) \mapsto \psi'(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \psi_R(\tilde{x}) \\ \psi_L(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi(\tilde{x}). \quad (1.90)$$

El *conjugado de carga* de un espinor de Dirac es otro espinor de Dirac,

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_R^* \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \psi^* \quad (1.91)$$

y, por supuesto, $(\psi^c)^c = \psi$. Nótese que las coordenadas x^μ no cambian bajo conjugación de carga.

Los campos de Dirac y no los de Weyl son los objetos básicos en las teorías de campos invariantes bajo paridad, como la QED y la QCD.

Finalmente, un *espinor de Majorana* es un espinor de Dirac en el que ψ_L y ψ_R no son independientes sino que

$$\psi_R = \zeta i\sigma^2 \psi_L^* \Rightarrow \psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \zeta i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix}, \quad |\zeta|^2 = 1. \quad (1.92)$$

Tiene dos grados de libertad, como un espinor de Weyl, pero es *autoconjugado de carga*,

$$\psi_M^c = \begin{pmatrix} \zeta^* \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = \zeta^* \psi_M. \quad (1.93)$$

1.5.3 Campos vectoriales

Bajo transformaciones de Lorentz, los *campos vectoriales* cumplen

$$V^\mu(x) \mapsto V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x). \quad (1.94)$$

Entonces, a partir de (1.76) y (1.79),

$$\delta V^\mu(x) = (\Lambda^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu) V^\nu(x) - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} V^\mu(x) \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J_V^{\rho\sigma} V^\mu(x). \quad (1.95)$$

Si escribimos, como antes, $J_V^{\rho\sigma} = L^{\rho\sigma} + S_V^{\rho\sigma}$, vemos que

$$\Lambda^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (S_V^{\rho\sigma})^\mu_\nu = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu \Rightarrow S_V^{\rho\sigma} = J^{\rho\sigma}. \quad (1.96)$$

1.6 Grupo de Poincaré

El *grupo de Poincaré* incluye las transformaciones de Lorentz y las traslaciones espacio-temporales,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (1.97)$$

Si tomamos una traslación infinitesimal $a^\mu = \epsilon^\mu$,

$$\begin{aligned} x'^\mu &\equiv (\mathbb{1} - i\epsilon_\rho P^\rho) x^\mu \Rightarrow \delta x^\mu = \epsilon^\mu = -i\epsilon_\rho P^\rho x^\mu \\ &\Rightarrow P^\rho = i\partial^\rho. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Así que los generadores de las traslaciones son las 4 componentes del *operador cuadrimento* P^μ . La traslación (1.97) se escribe, por tanto, $\exp\{-ia_\mu P^\mu\}$.

El álgebra de Poincaré, escrita en forma covariante, es

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (1.99)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \quad (1.100)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (1.101)$$

La última línea corresponde al álgebra del subgrupo de Lorentz (1.41). Las traslaciones son también un subgrupo. Conviene explicitar las relaciones de conmutación entre los generadores de las traslaciones y los de rotaciones y *boosts*:

$$[P^0, J^k] = 0, \quad (1.102)$$

$$[P^k, J^\ell] = i\epsilon^{k\ell m} P^m, \quad (1.103)$$

$$[P^0, K^k] = iP^k, \quad (1.104)$$

$$[P^k, K^\ell] = iP^0 \delta^{k\ell}. \quad (1.105)$$

Así que, como el hamiltoniano es $H = P^0$ (generador de las traslaciones temporales), tenemos que $[H, P^k] = [H, J^k] = 0$ pero $[H, K^k] \neq 0$. Esto no significa que solo momento lineal y momento angular total son cantidades conservadas, porque K^i depende explícitamente del tiempo de tal forma que

$$\frac{d}{dt}K^k = i[H, K^k] + \frac{\partial}{\partial t}K^k = 0. \quad (1.106)$$

Así que también hay cantidades conservadas asociadas a los *boosts*, como veremos al estudiar el teorema de Noether en el siguiente tema.

1.6.1 Representaciones sobre campos

Ya hemos visto que los campos forman representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz, con generadores

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (1.107)$$

donde $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$ y $S^{\mu\nu}$ depende de si el campo es escalar, espinorial, etc. Hallemos ahora la representación de las traslaciones. Para ello, imponemos que para cualquier componente, ya sea tensorial o espinorial del campo, se cumple

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu. \quad (1.108)$$

Entonces, haciendo una traslación infinitesimal $a^\mu = \epsilon^\mu$,

$$\delta\phi(x) = \phi'(x' - \epsilon) - \phi(x) = \phi'(x') - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (1.109)$$

Por tanto, comparando esta expresión con

$$\phi'(x' - \epsilon) = \exp\{-i(-\epsilon_\mu)P^\mu\}\phi'(x') \Rightarrow \delta\phi(x) = i\epsilon_\mu P^\mu \phi(x) \quad (1.110)$$

tenemos que

$$P^\mu = i\partial^\mu. \quad (1.111)$$

Para ver que lo que hemos obtenido es consistente, podemos comprobar la regla de conmutación (1.100) usando la representación sobre campos de los generadores del grupo de Lorentz (1.107) y de las traslaciones (1.111) y teniendo en cuenta que $S^{\mu\nu}$ es independiente de las coordenadas espaciotemporales y por tanto conmuta con ∂^μ ,

$$\begin{aligned} [P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= [P^\mu, L^{\rho\sigma}] = [i\partial^\mu, i(x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho)] \\ &= -(g^{\mu\rho} \partial^\sigma - g^{\mu\sigma} \partial^\rho) = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \end{aligned} \quad (1.112)$$

donde hemos aplicado la regla $[A, BC] = [A, B]C + A[B, C]$ y sustituido $[\partial^\mu, x^\nu] = g^{\mu\nu}$.

1.6.2 Representaciones sobre estados de una partícula

Ya hemos visto todo lo que necesitamos para construir lagrangianos de campos invariantes bajo Poincaré. Cuando cuanticemos los campos veremos que estos crean y destruyen partículas (y antipartículas). Es conveniente entonces identificar el espacio de Hilbert de estados de una partícula, invariante bajo Poincaré, es decir, irreps del grupo de Poincaré

etiquetadas por sus operadores de Casimir cuyos vectores vienen especificados por números cuánticos que son autovalores de un conjunto de generadores que conmuten entre sí,

$$|\psi\rangle = |\vec{p}, j_3, \dots\rangle$$

Estas irreps tienen que ser unitarias, para que los productos escalares entre estados sean invariantes bajo cambios de sistema de referencia,

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|\psi_2\rangle$$

Por lo tanto, las transformaciones de Poincaré \mathcal{P} vienen representadas por operadores unitarios en este espacio, y sus generadores J^i (rotaciones), K^i (*boosts*) y P^μ (traslaciones) por operadores hermíticos.

Como el grupo de Poincaré no es compacto sus representaciones unitarias son de dimensión infinita. Por tanto el espacio de Hilbert de estados de una partícula tiene dimensión infinita. Sin embargo las representaciones bajo las que se transforman nuestros campos no son necesariamente unitarias. Así que es importante no confundir las representaciones de los campos con las representaciones de los espacios de Hilbert de una partícula.

El grupo de Poincaré tiene dos operadores de Casimir:

$$m^2 = P_\mu P^\mu \quad \text{y} \quad W_\mu W^\mu, \quad (1.113)$$

donde W^μ es el *cuadrivector de Pauli-Lubanski* definido por

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma. \quad (1.114)$$

Ambos operadores conmutan, pues

$$\begin{aligned} [W^\mu, P^\alpha] &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [J_{\nu\rho} P_\sigma, P^\alpha] \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (J_{\nu\rho} [P_\sigma, P^\alpha] + [J_{\nu\rho}, P^\alpha] P_\sigma) \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (g_\rho^\alpha P_\nu - g_\nu^\alpha P_\rho) P_\sigma \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} P_\nu P_\sigma + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} P_\rho P_\sigma = 0. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Además $m^2 = P_\mu P^\mu$ y $W_\mu W^\mu$ son invariantes Lorentz. Por tanto, son operadores de Casimir (conmutan con P^ρ y $J^{\rho\sigma}$) y podemos usar sus autovalores para etiquetar las irreps y calcularlos en el sistema de referencia que queramos. Tenemos que distinguir dos casos (**clasificación de Wigner**):

Caso $m \neq 0$

Usemos el sistema de referencia en reposo, $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} W^0 &= 0 \\ W^i &= -\frac{m}{2}\epsilon^{ijk0} J^{jk} = \frac{m}{2}\epsilon^{ijk} J^{jk} = mJ^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_\mu W^\mu = -m^2 j(j+1). \quad (1.116)$$

Es decir, las irreps están etiquetadas por m, j y los vectores por $|j_3 = -j \dots j\rangle$, donde j es el espín. Vemos que las partículas masivas de espín j tienen $2j+1$ grados de libertad. Esto es así porque, una vez que hemos hecho un *boost* para llevar la partícula masiva al sistema de referencia en el que su cuadrimomento es $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, tenemos total libertad para rotar en tres dimensiones el sistema. Decimos que el grupo SU(2) es su *grupo de Lorentz pequeño* (conjunto de transformaciones de Lorentz que dejan invariante una elección dada de p^μ).

Caso $m = 0$

No existe el sistema de referencia en reposo. Podemos elegir uno en el que $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, que describe una partícula sin masa que se mueve en la dirección del eje z . Entonces,

$$\left. \begin{aligned} -W^0 &= W^3 = \omega J^3 \\ W^1 &= \omega(J^1 + K^2) \\ W^2 &= \omega(J^2 - K^1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_\mu W^\mu = -\omega^2[(J^1 + K^2)^2 + (J^2 - K^1)^2]. \quad (1.117)$$

En este caso el grupo pequeño son las *rotaciones en el plano perpendicular a la dirección del movimiento* (el plano (x, y) en nuestra elección), que es $SO(2)$, cuyas irreps son unidimensionales (grupo abeliano) y se etiquetan por un número $h \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots\}$ llamado *helicidad* (proyección del momento angular en la dirección del movimiento):^d

$$h = \hat{p} \cdot \vec{J}. \quad (1.118)$$

Nótese que $h = j_3$ en nuestra elección de dirección del movimiento, con $j_3 = \pm j$. Las irreps h y $-h$ son *distintas* (no se mezclan bajo transformaciones de Poincaré), aunque en las teorías simétricas bajo paridad las partículas sin masa correspondientes reciben el mismo nombre y se dice que están en dos estados distintos de helicidad. Así se habla de fotón ($m = 0, j = 1$) dextrógiro/levógiro si $h = \pm 1$. También decimos que el fotón es una partícula sin masa de espín 1, aunque en realidad no existe el estado con $j_3 = 0$. Del mismo modo, veremos que los campos de Weyl sin masa ψ_L y ψ_R ($m = 0, j = \frac{1}{2}$) tienen helicidad $h = -\frac{1}{2}$, $h = +\frac{1}{2}$, respectivamente y representan a partículas distintas si la teoría no es simétrica bajo paridad (e.g. en el modelo estándar si los neutrinos no tienen masa el neutrino es ν_L y el ν_R podría no existir).

Y para terminanr este tema introductorio, dos comentarios finales:

- ▷ Siempre podemos hablar de helicidad como la proyección del momento angular en la dirección del movimiento, pero solamente es una cantidad invariante bajo transformaciones de Poincaré para partículas sin masa. A veces se usa el término *quiralidad*, que tiene que ver con si la partícula se transforma bajo la representación *left-handed* o la *right-handed* del grupo de Lorentz. La quiralidad coincide con la helicidad para partículas sin masa.
- ▷ Encajar representaciones unitarias del grupo de Poincaré (las partículas) en una teoría de campos no es trivial. Por ejemplo, el vector V_μ describe tanto espín 0 como espín 1 (sobran grados de libertad).
 - Para construir una teoría unitarios de campos de espín 1 con masa tenemos que elegir cuidadosamene el lagrangiano para que no se excite la componente de espín 0.
 - Y para campos de espín 1 sin masa tenemos que elegir un lagrangiano que solo propague los estados con polarización transversa (helicidades *left* y *right*). Esto se logra introduciendo la *invariancia gauge*, un especie de simetría conectada con la conservación de la carga y que es además el origen de las interacciones.

^dLos elementos de $SO(2)$ en la irrep h vienen dados por $R(\theta) = \exp\{-ih\theta\}$.

Tema 2

Teoría Clásica de Campos

2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Vamos a repasar primero el principio básico de la mecánica clásica para un sistema de N partículas en el formalismo lagrangiano. Este sistema tiene $3N$ grados de libertad descritos por un conjunto de coordenadas $q_i(t), i = 1, 2, \dots, 3N$.

El *lagrangiano* L es una función de las q_i y de sus derivadas respecto del tiempo \dot{q}_i , $L = L(q, \dot{q})$. Generalmente, $L(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q)$ (término cinético menos potencial). Supondremos que el sistema es conservativo, de modo que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. La *acción* S se define como

$$S = \int dt L(q, \dot{q}). \quad (2.1)$$

El *principio de mínima acción* establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q_{\text{in}} = q(t_{\text{in}})$ y otro final $q_{\text{fin}} = q(t_{\text{fin}})$ *fijos* (figura 2.1) es un extremo (generalmente un mínimo) de la acción:

$$\delta S = \delta \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} dt \delta L(q, \dot{q}) = 0. \quad (2.2)$$

Podemos desarrollar

$$\delta L = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right], \quad (2.3)$$

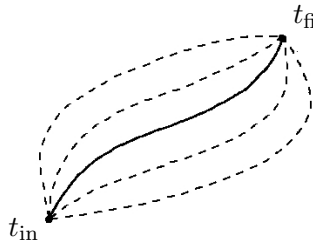


Figura 2.1: Posibles caminos $q_i(t)$ que puede seguir un sistema en el espacio de las coordenadas entre un instante inicial t_{in} y otro final t_{fin} .

donde se ha usado que

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dq_i}{dt} \right) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \delta q_i \quad (2.4)$$

siendo α un conjunto discreto de parámetros tal que $q_i = q_i(\alpha, t)$ es suficientemente suave de modo que las derivadas respecto a α y respecto a t conmutan, pues podemos discretizar ambas variaciones. Por otro lado, integrando por partes:^a

$$\int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} - \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i. \quad (2.5)$$

Por tanto,

$$\delta S = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fin}}} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad (\text{Ecuaciones de Euler-Lagrange}) \quad (2.7)$$

Recordemos también que en el formalismo hamiltoniano el objeto básico es

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.8)$$

Diferenciando esta expresión obtenemos

$$dH = \sum_i \left\{ \dot{q}_i dp_i + p_i dq_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) \right\} \quad (2.9)$$

$$= \sum_i \{ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \} \quad (2.10)$$

donde se han usado las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.7) y la definición de momento en (2.8). Esto demuestra que el hamiltoniano H es una función de p y q . La expresión anterior conduce a:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad (\text{ecuaciones de Hamilton}) \quad (2.11)$$

Definiendo ahora el *corchete de Poisson* de dos variables dinámicas cualesquiera f_1 y f_2

$$[f_1, f_2]_P = \sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right\} \quad (2.12)$$

es fácil comprobar que

$$[q_r, p_s]_P = \delta_{rs} \quad (2.13)$$

y las ecuaciones de Hamilton pueden reescribirse como

$$\dot{q}_r = [q_r, H]_P, \quad \dot{p}_r = [p_r, H]_P \quad (2.14)$$

^aEn efecto: $\int_a^b dt u \frac{dv}{dt} = [uv]_a^b - \int_a^b dt v \frac{du}{dt}$.

y en general para cualquier variable dinámica f se tiene

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = [f, H]_P + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.15)$$

donde $\partial f/\partial t$ aparece si f depende explícitamente del tiempo.

Supongamos ahora que, en vez de un sistema con un número finito de grados de libertad, tenemos un *medio continuo*. Entonces el sistema viene descrito por un campo $\phi(x)$,

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}) = \phi(x) \quad (2.16)$$

y su dinámica por un lagrangiano,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.17)$$

En adelante, llamaremos lagrangiano a la *densidad lagrangiana* \mathcal{L} . La acción es entonces

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.18)$$

El principio de mínima acción se escribe:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0, \quad (2.19)$$

donde la condición de contorno ahora no es que $q_i(t_{\text{in}})$ y $q_i(t_{\text{fin}})$ fijos sino que los campos permanecen constantes en el infinito, pues

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \int d^4x \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \quad (2.20)$$

y se ha usado el *teorema de Stokes*,

$$\int_V d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = \int_\Sigma dA n_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \quad (2.21)$$

(n^μ es el vector normal a la superficie) y la mencionada condición de contorno

$$\delta \phi|_\Sigma = 0. \quad (2.22)$$

Así que tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \quad (\text{Ecuación de Euler-Lagrange para el campo } \phi). \quad (2.23)$$

Nótese que si se añade al lagrangiano un término de la forma (derivada total)

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu(\phi) \quad (2.24)$$

las ecuaciones de movimiento no cambian debido a la condición de contorno de que los campos sean constantes en el infinito, pues usando de nuevo el teorema de Stokes,

$$\int_V d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_\Sigma dA n_\mu K^\mu, \quad (2.25)$$

se añade una constante a la acción y la ecuación (2.2) queda inalterada.

En el formalismo hamiltoniano definimos el *momento conjugado del campo* ϕ ,

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \quad (2.26)$$

y la densidad hamiltoniana (o simplemente hamiltoniano),

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.27)$$

siendo,

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x). \quad (2.28)$$

2.2 Teorema de Noether

Vamos a discutir la relación existente entre *simetrías continuas* y *leyes de conservación* en teoría clásica de campos.

Una transformación infinitesimal *global*, i.e. con $|\epsilon^a| \ll 1$ independiente de las coordenadas, de los campos ϕ_i de lo que depende la acción $S(\phi)$ se escribe

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') \equiv \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \quad (2.29)$$

y para las coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x), \quad (2.30)$$

donde “ a ” puede ser un índice, dos, ... o ninguno. Decimos que esta transformación es una *simetría* si deja invariantes las ecuaciones del movimiento, i.e. si la acción no varía:

$$S(\phi) \mapsto S(\phi') = S(\phi). \quad (2.31)$$

Entonces, a primer orden en δx ,

$$0 = S(\phi') - S(\phi) = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x)], \quad (2.32)$$

donde se ha usado

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x, \quad \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \cdots \\ \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x)^2. \quad (2.33)$$

Ahora bien, como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \mathcal{O}(\delta x)^2 \quad (2.34)$$

y $\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$, la ecuación (2.32) queda

$$0 = \int d^4x \{ \delta \mathcal{L}(x) + \partial_\mu [\delta x^\mu \mathcal{L}(x)] \}. \quad (2.35)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(x) &= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i) \right] \\ &= \sum_i \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] \right\}\end{aligned}\quad (2.36)$$

y a partir de

$$\phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x'^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} \quad (2.37)$$

tenemos

$$\phi'_i(x) = \phi_i(x^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x) - \epsilon^a A_a^\mu \partial_\mu \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} \quad (2.38)$$

de modo que

$$\delta\phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x) = -\epsilon^a [A_a^\mu \partial_\mu \phi_i(x) - F_{i,a}] \quad (2.39)$$

Por tanto, si $\phi = \phi_{\text{cl}}$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, (2.35) queda

$$0 = \int d^4x \partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \right] \quad (2.40)$$

y sustituyendo δx^μ de (2.30) y $\delta\phi$ de (2.39) tenemos

$$0 = \epsilon^a \int d^4x \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}), \quad (2.41)$$

donde

$$j_a^\mu(\phi) \equiv \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} [A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)] - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x) \quad (2.42)$$

Supongamos por un momento que hacemos una transformación *local*, $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, sobre esta acción invariante solo bajo transformaciones globales. Entonces no quedará invariante sino que

$$S(\phi') = S(\phi) + \int d^4x [\epsilon^a(x) K_a(\phi) - (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi)] + \mathcal{O}(\partial\partial\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.43)$$

donde el coeficiente $K_a(\phi)$ es cero, porque en el caso particular de ϵ^a constantes la invariancia global implica $\int d^4x K_a(\phi) = 0$, para cualquier ϕ . Veamos por qué hemos llamado precisamente $-j_a^\mu(\phi)$ al otro coeficiente. Si los $\epsilon^a(x)$ van suficientemente rápido a cero en el infinito, podemos deducir del teorema de Stokes que

$$\int d^4x \partial_\mu (\epsilon^a j_a^\mu(\phi)) = 0 \Rightarrow - \int d^4x (\partial_\mu \epsilon^a) j_a^\mu(\phi) = \int d^4x \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi) \quad (2.44)$$

de donde

$$S(\phi') - S(\phi) = \int d^4x \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi). \quad (2.45)$$

Ahora bien, si tomamos en particular $\phi = \phi_{\text{cl}}$, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es un extremo de la acción, la ecuación anterior expresa una variación lineal de la acción en torno a ese extremo y por tanto se anula. Es decir,

$$0 = \int d^4x \epsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}). \quad (2.46)$$

Como esto ocurre para cualquier $\epsilon^a(x)$, tenemos que

$$\partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\text{cl}}) = 0, \quad (2.47)$$

es decir, $j_a^\mu(\phi_{\text{cl}})$ son *corrientes conservadas*. Así que (2.41) no solo implica que la integral se anula, sino también el integrando.

Si definimos las *cargas*

$$Q_a \equiv \int d^3x j_a^0(t, \vec{x}) \quad (2.48)$$

vemos que la conservación de la corriente $j_a^\mu(x)$ implica que la carga Q_a se conserva, i.e. es independiente del tiempo, pues

$$\partial_t Q_a = \int d^3x \partial_0 j_a^0(t, \vec{x}) = - \int d^3x \partial_i j_a^i(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.49)$$

ya que los campos decrecen suficientemente rápido en el infinito (de nuevo el teorema de Stokes).

Las simetrías pueden ser *internas*, si no cambian las coordenadas, i.e. $A_a^\mu(x) = 0$, o *espaciotemporales*. La conservación de la carga eléctrica, el isospín, el número bariónico, etc., son consecuencias de las primeras. Veamos ahora todos los ejemplos de las segundas: invariancias bajo traslaciones espaciotemporales, rotaciones y *boosts*.

Traslaciones espaciotemporales

Vienen dadas por las siguientes transformaciones de coordenadas y campos (cualquier componente, si tienen alguna):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \epsilon^a = \epsilon^\nu, \quad A_a^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \quad (2.50)$$

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') = \phi_i(x) \Rightarrow F_{i,a}(\phi, \partial\phi) = 0. \quad (2.51)$$

Por tanto, hay cuatro corrientes conservadas que conforman el *tensor energía-momento*,

$$\theta^\mu_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu \theta^\mu_\nu = 0 \quad (2.52)$$

y cuatro “cargas” que permanecen constantes, la *energía* y las tres componentes del *momento*,

$$P_\nu = \int d^3x \theta^0_\nu = \int d^3x \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^0 \mathcal{L} \right]. \quad (2.53)$$

Es decir, la invariancia bajo traslaciones espaciotemporales implica la conservación del cuadrimento,

$$\partial_t P^\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.54)$$

Nótese que el P_0 definido en (2.53) coincide con el Hamiltoniano, definido en (2.28).

Rotaciones y boosts

Consideremos por simplicidad un campo escalar. Las transformaciones de Lorentz son de la forma

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu\delta_\rho^\nu)x_\nu \Rightarrow \epsilon^a = \omega^{\rho\sigma} = -\omega^{\sigma\rho},$$

$$A_a^\mu(x) = \frac{1}{2}(\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu\delta_\rho^\nu)x_\nu \quad (2.55)$$

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow F_a(\phi) = 0. \quad (2.56)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} j_{\rho\sigma}^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{1}{2}(\delta_\rho^\nu x_\sigma - \delta_\sigma^\nu x_\rho)\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\delta_\rho^\mu x_\sigma - \delta_\sigma^\mu x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{1}{2}(\partial_\rho\phi x_\sigma - \partial_\sigma\phi x_\rho) - \frac{1}{2}(\delta_\rho^\mu x_\sigma - \delta_\sigma^\mu x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}(\theta_\rho^\mu x_\sigma - \theta_\sigma^\mu x_\rho), \quad \partial_\mu j_{\rho\sigma}^\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Es decir, el siguiente tensor contiene seis corrientes conservadas:

$$T^{\mu\rho\sigma} \equiv -(\theta^{\mu\rho}x^\sigma - \theta^{\mu\sigma}x^\rho), \quad \partial_\mu T^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (2.58)$$

y hay seis cargas o constantes del movimiento,

$$M^{\rho\sigma} = \int d^3x T^{0\rho\sigma} = \int d^3x (x^\rho\theta^{0\sigma} - x^\sigma\theta^{0\rho}), \quad \partial_t M^{\rho\sigma} = 0. \quad (2.59)$$

de las cuales M^{ij} (momento angular) se deben a la invariancia bajo rotaciones y M^{0i} a la invariancia bajo *boosts*. Conviene ahora hacer dos comentarios:

1. Nótese que la ecuación (2.58) implica que el tensor energía-momento debe ser simétrico, pues $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$ y

$$0 = \partial_\mu(x^\rho\theta^{\mu\sigma} - x^\sigma\theta^{\mu\rho}) = x^\rho\partial_\mu\theta^{\mu\sigma} - x^\sigma\partial_\mu\theta^{\mu\rho} + \theta^{\mu\sigma}\delta_\mu^\rho - \theta^{\mu\rho}\delta_\mu^\sigma = \theta^{\rho\sigma} - \theta^{\sigma\rho}. \quad (2.60)$$

Como el $\theta^{\mu\nu}$ definido en (2.52) no es necesariamente simétrico, hay que añadirle una derivada total de la forma $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$, con $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, para que

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad \partial_\mu\tilde{\theta}^{\mu\nu} = \partial_\mu\theta^{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0 \quad (2.61)$$

y como

$$\int d^3x \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} = \int d^3x \partial_i f^{i 0\nu} = 0 \Rightarrow P^\nu = \int d^3x \tilde{\theta}^{0\nu} = \int d^3x \theta^{0\nu}, \quad (2.62)$$

las cargas conservadas son las mismas, siempre que los campos, de los que depende f , se anulen suficientemente rápido en el infinito.

2. Estamos acostumbrados a la conservación del momento angular ($\partial_t M^{ij} = 0$) pero no a la conservación de cantidades asociadas a los *boosts* ($\partial_t M^{0i} = 0$). En efecto, en mecánica cuántica,

$$K^k = M^{0k} = P^k t - \int d^3x x^k \theta^{00} = M^{0k}(t) \quad (\text{imagen de Heisenberg}) \quad (2.63)$$

y, como vimos en (1.106), $\partial_t M^{0k} \equiv dM^{0k}/dt = i[H, K^k] + \partial K^k/\partial t = i^2 P^k + P^k = 0$. Sin embargo, a diferencia de energía, momento y momento angular, estas cantidades conservadas no sirven para etiquetar estados, ya que los operadores que representan a los generadores de los *boosts* no siempre son hermíticos y además no conmutan con el hamiltoniano. Nótese que estos K^k son la representación de los generadores en el espacio infinitodimensional de campos escalares y que, a diferencia de los operadores matriciales 4×4 introducidos en el primer tema, dependen de las coordenadas espaciotemporales.

2.3 Campos escalares

2.3.1 Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos para empezar un campo escalar real, $\phi(x) = \phi^*(x)$. Una acción que describa una dinámica no trivial del campo debe contener derivadas, $\partial_\mu \phi$. Los índices Lorentz deben estar contraídos, pues la acción es un escalar. La acción más sencilla es

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (2.64)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para ϕ es entonces la *ecuación de Klein-Gordon*,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \Rightarrow (\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (2.65)$$

Sus soluciones son ondas planas, $e^{\pm ipx}$, con $px \equiv p_\mu x^\mu$ y $p^2 \equiv p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2$. El parámetro m es la masa, que por definición tomaremos $m > 0$. La solución más general de la ecuación de Klein-Gordon es por tanto,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^* e^{ipx}) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \quad (2.66)$$

La normalización de los campos se ha elegido por conveniencia. Vemos que entre las soluciones hay *modos de energía positiva* (e^{-ipx}) y *modos de energía negativa* (e^{+ipx}), cuya interpretación surgirá solo al cuantizar el campo. El signo de la acción se ha elegido de modo que obtengamos un hamiltoniano definido positivo:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \Rightarrow \mathcal{H} = \Pi_\phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] > 0. \quad (2.67)$$

El tensor energía-momento es directamente simétrico,

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.68)$$

y, en efecto, $\mathcal{H} = \theta^{00}$. En cuanto a las cargas conservadas asociadas a las rotaciones,

$$M^{ij} = \int d^3x (x^i \theta^{0j} - x^j \theta^{0i}) = \frac{i}{2} \int d^3x [\phi L^{ij} \partial_0 \phi - \partial_0 \phi L^{ij} \phi], \quad (2.69)$$

donde se ha usado la definición de L^{ij} en (1.80) y se ha integrado por partes con $i \neq j$,

$$\int d^3x \partial^j [\phi x^i \partial_0 \phi] = 0 \Rightarrow \int d^3x \partial^j \phi x^i \partial_0 \phi = - \int d^3x \phi x^i \partial^j \partial_0 \phi, \quad (2.70)$$

$$\int d^3x \partial^j [\partial_0 \phi x^i \phi] = 0 \Rightarrow \int d^3x \partial^j \partial_0 \phi x^i \phi = - \int d^3x \partial_0 \phi x^i \partial^j \phi. \quad (2.71)$$

Si definimos el producto escalar de dos campos reales como

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \equiv \frac{i}{2} \int d^3x \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2, \quad f \overleftrightarrow{\partial} g \equiv f \partial g - \partial f g, \quad (2.72)$$

tenemos que

$$M^{ij} = \langle \phi | L^{ij} | \phi \rangle, \quad (2.73)$$

que es lo que uno esperaría, pues L^{ij} es la representación del operador J^{ij} sobre el espacio vectorial de los campos. Veamos que $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ es independiente del tiempo *si* ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, lo que está de acuerdo con que M^{ij} es una cantidad conservada. En efecto,

$$\begin{aligned} \partial_0 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle &= \frac{i}{2} \int d^3x \partial_0 [\phi_1 \partial_0 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \phi_2] \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 + \phi_1 \partial_0^2 \phi_2 - \partial_0^2 \phi_1 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 \} \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ \phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \nabla^2 \phi_1 \phi_2 - m^2 \phi_1 \phi_2 + m^2 \phi_1 \phi_2 \} \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ -\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \} = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde se ha usado

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi_{1,2} = 0 &\Rightarrow \partial_0^2 \phi_{1,2} = \nabla^2 \phi_{1,2} - m^2 \phi_{1,2} \\ \int d^3x \nabla \cdot (\phi_{1,2} \nabla \phi_{2,1}) = 0 &\Rightarrow \int d^3x \phi_{1,2} \nabla^2 \phi_{2,1} = - \int d^3x \nabla \phi_{1,2} \cdot \nabla \phi_{2,1}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Análogamente, podemos escribir

$$P^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu} = \langle \phi | i\partial^\mu | \phi \rangle. \quad (2.76)$$

En efecto, usando de nuevo la ecuación de Klein-Gordon e integrando por partes,

$$\begin{aligned} P^0 &= \langle \phi | i\partial^0 | \phi \rangle = \langle \phi | i\partial_0 | \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \partial_0^2 \phi - (\partial_0 \phi)^2] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \nabla^2 \phi - m^2 \phi^2 - (\partial_0 \phi)^2] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 + (\partial_0 \phi)^2] = \int d^3x \theta^{00}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} P^i &= \langle \phi | i\partial^i | \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \partial^i \partial_0 \phi - \partial_0 \phi \partial^i \phi] \\ &= \int d^3x \partial^i \phi \partial_0 \phi = \int d^3x \theta^{i0} = \int d^3x \theta^{0i}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Y también,

$$M^{0i} = \langle \phi | L^{0i} | \phi \rangle = \int d^3x (x^0 \theta^{0i} - x^i \theta^{00}). \quad (2.79)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
M^{0i} &= \langle \phi | L^{0i} | \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi(x^0 \partial^i - x^i \partial^0) \partial_0 \phi - \partial_0 \phi (x^0 \partial^i - x^i \partial^0) \phi] \\
&= \int d^3x \left\{ x^0 \partial_0 \phi \partial^i \phi + \frac{x^i}{2} [\phi \partial_0^2 \phi - (\partial_0 \phi)^2] \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ x^0 \partial_0 \phi \partial^i \phi - \frac{x^i}{2} [(\partial_0 \phi)^2 - \phi \nabla^2 \phi + m^2 \phi^2] \right\}. \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Nótese que, como habíamos anticipado, $L^{\mu\nu}$ y $i\partial^\mu$ son operadores hermíticos, por lo que tenemos una representación unitaria de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Así que $M^{\mu\nu}$ y P^μ son cantidades reales.

Finalmente, podemos generalizar la acción de Klein-Gordon para incluir interacciones del campo escalar introduciendo un potencial $V(\phi)$,

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] - V(\phi) \right\}. \quad (2.81)$$

Términos proporcionales a ϕ^3, ϕ^4, \dots en el potencial dan lugar a contribuciones no lineales en las ecuaciones de movimiento, que corresponden a auto-interacciones del campo:^b

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.82)$$

2.3.2 Campos complejos. Conservación de la carga

Supongamos ahora un campo escalar complejo,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (2.83)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son dos campos reales con la misma masa m . Entonces

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2) + \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2) \\
&= \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (2.84)
\end{aligned}$$

Está claro que la ecuación de Klein-Gordon para ϕ es la misma que (2.65), pues tanto la parte real como la imaginaria la satisfacen. La solución más general es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^* e^{ipx}) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \quad (2.85)$$

La acción de este campo complejo es invariante bajo las transformaciones globales de simetría del grupo $U(1)$,

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{-i\theta} \phi(x), \quad \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = e^{i\theta} \phi^*(x) \quad (2.86)$$

^bAñadir un término lineal $c^3 \phi$ al potencial es equivalente a reparametrizar $\phi \rightarrow \phi - c^3/m^2$, que conduce a la misma dinámica.

lo que significa que existe una corriente conservada asociada (tomar $\phi_i = (\phi, \phi^*)$):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu \Rightarrow A_a^\mu(x) = 0 \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) \mapsto \phi'(x) &= \phi(x) - i\theta\phi(x) \\ \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) &= \phi^*(x) + i\theta\phi^*(x) \end{aligned} \Rightarrow \epsilon^a = \theta, \quad \begin{aligned} F_{\phi,a} &= -i\phi \\ F_{\phi^*,a} &= i\phi^* \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} F_{\phi,a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} F_{\phi^*,a} = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi. \quad (2.89)$$

La carga conservada es

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi = \langle \phi | \phi \rangle, \quad \partial_t Q = 0, \quad (2.90)$$

consistente con que el generador de las simetrías $e^{-i\theta}$ es el operador identidad y definiendo el producto escalar de dos campos complejos ϕ_A y ϕ_B como

$$\langle \phi_A | \phi_B \rangle \equiv i \int d^3x \phi_A^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_B. \quad (2.91)$$

2.4 Campos espinoriales

2.4.1 Ecuación de Weyl

Consideremos espinores de Weyl ψ_R y ψ_L . Entonces

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (2.92)$$

con $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$, son cuadvectores Lorentz. Para demostrar esto recordemos que

$$\psi_R \mapsto \exp \left\{ (-i\vec{\theta} + \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \psi_R. \quad (2.93)$$

Consideremos, por ejemplo, un *boost* infinitesimal de *rapidity* η en la dirección x ,

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^1}{2} \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^1}{2} \psi_R \\ &\Rightarrow \begin{aligned} \psi_R^\dagger \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + \eta \delta^{i1} \psi_R^\dagger \psi_R, \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.94)$$

pues $\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$. Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo ese *boost* igual que un cuadvector v^μ ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Consideremos ahora una rotación infinitesimal θ alrededor del eje z ,

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + i\theta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \sigma^\mu \psi_R - i\theta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^3}{2} \psi_R$$

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \psi_R \\ \Rightarrow \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R - \theta \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R + \theta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R, \end{aligned} \quad (2.96)$$

pues $\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k$. Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo esa rotación igual que un cuadvivector v^μ ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Y análogamente para $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$.

Concentrémonos en ψ_L . Podemos construir la acción más sencilla para estos campos,^c

$$S = i \int d^4x \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (2.98)$$

El factor i se introduce para que el lagrangiano sea hermítico. Hallemos sus ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando ψ_L y ψ_L^* como campos independientes:

$$\begin{aligned} [\psi_L^*] : \quad i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L &= 0 \\ [\psi_L] : \quad -i\partial_\mu \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0. \quad (2.99)$$

Esta *ecuación de Weyl* para ψ_L es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon *sin masa* para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_L = \sigma^i \partial_i \psi_L \Rightarrow \partial_0^2 \psi_L = \nabla^2 \psi_L \Rightarrow \square \psi_L = 0 \quad (2.100)$$

y además aporta información sobre la helicidad de los distintos modos del campo. Si tomamos un *modo de energía positiva (negativa)* de ψ_L ,

$$\psi_L(x) = u_L e^{-ipx} \quad (u_L e^{ipx}) \quad (2.101)$$

con u_L un espinor constante y $p^\mu = (E, \vec{p})$ donde $E = |\vec{p}|$ (masa cero), recordando que

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow (\hat{p} \cdot \vec{J}) u_L = \frac{1}{2} \hat{p} \cdot \vec{\sigma} u_L \equiv h u_L \quad (2.102)$$

vemos que

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) u_L e^{\mp ipx} = \mp i(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_L e^{\mp ipx} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \hat{p} u_L = -u_L, \quad (2.103)$$

lo que significa que los modos de ψ_L son todos de *helicidad negativa* $h = -\frac{1}{2}$. Por otro lado, el tensor energía-momento es

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} \partial^\nu \psi_L - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \psi_L, \quad (2.104)$$

^cAcabamos de probar que $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \mapsto \Lambda^\mu_\rho \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho \psi_L = \psi_L^\dagger \Lambda^\mu_\rho \bar{\sigma}^\rho \psi_L$, pues Λ y $\bar{\sigma}$ actúan en distintos espacios. Por otro lado, $\partial_\mu \mapsto \Lambda_\mu^\sigma \partial_\sigma$. Entonces, el siguiente término es un escalar Lorentz pues usando (1.15):

$$\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \mapsto \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\mu^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho g_\rho^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L.$$

donde se ha usado que para los campos que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange (2.99) el lagrangiano $\mathcal{L} = 0$. El hamiltoniano es $\mathcal{H} = \theta^{00} = i\psi_L^\dagger \partial^0 \psi_L$. Además la acción es invariante bajo transformaciones globales de simetría del grupo $U(1)$,

$$\psi_L \mapsto e^{-i\theta} \psi_L, \quad (2.105)$$

así que existe una corriente conservada

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} i\psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.106)$$

y una carga conservada

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi_L^\dagger \psi_L, \quad \partial_t Q = 0. \quad (2.107)$$

Análogamente puede verse que la *ecuación de Weyl para ψ_R* es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \Rightarrow (\partial_0 + \sigma^i \partial_i) \psi_R = 0, \quad (2.108)$$

que es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R \Rightarrow \partial_0^2 \psi_R = \nabla^2 \psi_R \Rightarrow \square \psi_R = 0. \quad (2.109)$$

Los modos de ψ_R tienen *helicidad positiva* $h = \frac{1}{2}$. El tensor energía-momento, la corriente y la carga conservada correspondientes son, respectivamente,

$$\theta^{\mu\nu} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial^\nu \psi_R, \quad j^\mu = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad Q = \int d^3x \psi_R^\dagger \psi_R. \quad (2.110)$$

2.4.2 Ecuación de Dirac

Nótese que, bajo una transformación de Lorentz,

$$\psi_L \mapsto \Lambda_L \psi_L, \quad \psi_R \mapsto \Lambda_R \psi_R, \quad \text{y } \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = \Lambda_R^\dagger \Lambda_L = \mathbb{1}. \quad (2.111)$$

Por tanto, $\psi_L^\dagger \psi_R$ y $\psi_R^\dagger \psi_L$ son escalares Lorentz.

Bajo paridad ($\psi_L \leftrightarrow \psi_R$) las siguientes combinaciones hermíticas se transforman:

$$\begin{aligned} (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (\text{escalar}) \\ i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto -i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (\text{pseudoescalar}) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Así que el *lagrangiano de Dirac*,

$$\mathcal{L}_D = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (2.113)$$

es invariante bajo paridad. El lagrangiano de Weyl no lo es. Hallemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} [\psi_L^*] : & \quad i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0 \\ [\psi_L] : & \quad -i\partial_\mu \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu - m\psi_R^\dagger = 0 \\ [\psi_R^*] : & \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0 \\ [\psi_R] : & \quad -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu - m\psi_L^\dagger = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L, \end{aligned} \quad (2.114)$$

que es la *ecuación de Dirac* en términos de espinores de Weyl. Nótese que ψ_L y ψ_R ya no son autoestados de helicidad y que las dos componentes de ψ_L y también las de ψ_R satisfacen una ecuación de Klein-Gordon de masa m , pues

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R &\Rightarrow (i\sigma^\nu \partial_\nu) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m i\sigma^\nu \partial_\nu \psi_R \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \psi_L = m^2 \psi_L \\ &\Rightarrow (\square + m^2) \psi_L = 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

donde se ha usado (2.108) y la identidad $\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Lo mismo ocurre para ψ_R ,

$$(\square + m^2) \psi_R = 0. \quad (2.116)$$

Es conveniente introducir el *campo de Dirac*, de 4 componentes,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad (\text{representación quirál}) \quad (2.117)$$

y definir las *matrices gamma de Dirac*,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{representación quirál}), \quad (2.118)$$

que satisfacen el *álgebra de Clifford*,

$$\{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.119)$$

La ecuación de Dirac queda entonces

$$(i\rlap{-}/\partial - m)\psi = 0, \quad \rlap{-}/A \equiv \gamma^\mu A_\mu. \quad (2.120)$$

También podemos escribir el lagrangiano de Dirac de forma compacta introduciendo

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{espinor adjunto}). \quad (2.121)$$

En la representación quirál, $\bar{\psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ y

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\rlap{-}/\partial - m)\psi. \quad (2.122)$$

También se define la matriz $\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ que es

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{representación quirál}) \quad (2.123)$$

Por tanto, los operadores

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (2.124)$$

proyectan sobre los espinores de Weyl ψ_L y ψ_R , respectivamente,

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Pueden elegirse otras representaciones,

$$\psi'(x) = U\psi(x), \quad \gamma'^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{\dagger}, \quad \bar{\psi}'(x) = \psi'^{\dagger}(x)\gamma'^0, \quad (2.126)$$

donde U es una matriz unitaria constante. De este modo,

$$\mathcal{L}_D = \psi'^{\dagger}U\gamma^0(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)U^{\dagger}\psi' = \bar{\psi}'(i\gamma'^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi', \quad (2.127)$$

tiene la misma forma que el lagrangiano original. Además el álgebra de Clifford permanece invariante, $\{\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu}\} = 2g^{\mu\nu}$. Una representación que se usa con frecuencia es la *representación estándar* o *representación de Dirac*, que se obtiene a partir de la quiral mediante

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

El campo y las matrices de Dirac quedan

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.130)$$

La representación de Dirac resulta cómoda en el límite no relativista, mientras que la quiral es más conveniente en el límite ultrarrelativista.

La solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas,

$$\psi(x) \equiv u(\vec{p})e^{-ipx} \text{ (modos de energía positiva } E > 0), \quad (2.131)$$

$$\psi(x) \equiv v(\vec{p})e^{ipx} \text{ (modos de energía negativa } -E < 0), \quad E = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \quad (2.132)$$

Aplicando (2.120) a estas soluciones tenemos

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (2.133)$$

Hallemos ahora la forma explícita de estas soluciones en la representación quiral:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_L(\vec{p}) \\ u_R(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} v_L(\vec{p}) \\ v_R(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Tomemos primero el caso $m \neq 0$. Entonces, en el sistema de referencia en reposo,

$$p^{\mu} = (m, 0, 0, 0) \\ (\not{p} - m)u(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 - 1)u(0) = 0 \Rightarrow u_L(0) = u_R(0), \quad (2.135)$$

$$(\not{p} + m)v(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 + 1)v(0) = 0 \Rightarrow v_L(0) = -v_R(0). \quad (2.136)$$

Entonces, centrándonos en el *espinor de energía positiva* $u(\vec{p})$, podemos elegir

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m} \xi^{(s)}, \quad s \in \{1, 2\}, \quad \xi^{(r)\dagger}\xi^{(s)} = \delta_{rs}, \\ \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Las soluciones para \vec{p} arbitrario se hallan haciendo un *boost* en la dirección $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$,

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_L^{(s)}(0) \\ e^{+\frac{1}{2}\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

Desarrollando las exponenciales,

$$\begin{aligned} e^{\pm\eta\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \eta^{2k} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \eta^{2k+1} \\ &= \cosh \eta \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \sinh \eta = \frac{1}{m} (E \pm \vec{p}\cdot\vec{\sigma}), \end{aligned} \quad (2.139)$$

donde se ha sustituido

$$\cosh \eta = \gamma = \frac{E}{m}, \quad \sinh \eta = \gamma\beta = \frac{|\vec{p}|}{m} \quad (2.140)$$

e insertando

$$(p\sigma) = p_\mu\sigma^\mu = E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \quad (p\bar{\sigma}) = p_\mu\bar{\sigma}^\mu = E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}, \quad (2.141)$$

obtenemos

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} u_L^{(s)}(0) \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} \xi^{(s)} \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})} \xi^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Otra forma de escribir estas soluciones es

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+|\vec{p}|} \left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E-|\vec{p}|} \left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) \right] \xi^{(s)} \\ \left[\sqrt{E+|\vec{p}|} \left(\frac{1+\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E-|\vec{p}|} \left(\frac{1-\hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) \right] \xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

donde se ha usado,

$$e^{\pm\frac{\eta}{2}\hat{p}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh \frac{\eta}{2} \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma} \sinh \frac{\eta}{2} = e^{\frac{\eta}{2}} \left(\frac{1 \pm \hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) + e^{-\frac{\eta}{2}} \left(\frac{1 \mp \hat{p}\cdot\vec{\sigma}}{2} \right) \quad (2.144)$$

$$e^{\pm\frac{\eta}{2}} = \sqrt{\cosh \eta \pm \sinh \eta} = \sqrt{\gamma \pm \gamma\beta} = \sqrt{\frac{E \pm |\vec{p}|}{m}}. \quad (2.145)$$

Si hacemos el *límite ultrarrelativista* ($E \gg m$), $p^\mu \rightarrow (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\vec{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(1)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{(1)} \end{pmatrix} \\ u^{(2)}(\vec{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1-\sigma^3)\xi^{(2)} \\ (1+\sigma^3)\xi^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.146)$$

vemos que $u^{(1)}$ solo tiene componente *right-handed* y $u^{(2)}$ solo tiene componente *left-handed*, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida (quiralidad), como corresponde a campos de *masa nula*.

Si repetimos el procedimiento para el *espinor de energía negativa* $v(\vec{p})$ obtenemos

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} v_L^{(s)}(0) \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})} v_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} \eta^{(s)} \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})} \eta^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \eta^{(r)\dagger} \eta^{(s)} = \delta_{rs}, \quad (2.147)$$

o bien

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E + |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}}{2} \right) \right] \eta^{(s)} \\ - \left[\sqrt{E + |\vec{p}|} \left(\frac{1 + \hat{p} \cdot \vec{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\vec{p}|} \left(\frac{1 - \hat{p} \cdot \vec{\sigma}}{2} \right) \right] \eta^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Resulta conveniente elegir (véase discusión al final de §3.2.1)

$$\eta^{(s)} = -i\sigma^2 \xi^{(s)*} \Rightarrow \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

Entonces, en el *límite ultrarrelativista* ($E \gg m$), $p^\mu \rightarrow (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\vec{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \eta^{(1)} \\ -(1 + \sigma^3) \eta^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^{(2)}(\vec{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \eta^{(2)} \\ -(1 + \sigma^3) \eta^{(2)} \end{pmatrix} = -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

lo que significa que $v^{(1)}$ solo tiene componente *left-handed* y $v^{(2)}$ solo tiene componente *right-handed*, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida y *masa nula*.

Introduciendo ahora los correspondientes espinores adjuntos,^d

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0, \quad (2.151)$$

que satisfacen las ecuaciones de Dirac,

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0, \quad (2.152)$$

pueden demostrarse las siguientes *relaciones de ortonormalidad*,

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 2m \delta_{rs}, \quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = -2m \delta_{rs} \quad (2.153)$$

$$u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}} \delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}} \delta_{rs}, \quad (2.154)$$

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0 \quad (2.155)$$

y las *relaciones de completitud*,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\vec{p}) \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(\vec{p}) \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m. \quad (2.156)$$

Es importante notar que las 16 matrices,

$$\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.157)$$

^dÚsese la identidad $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

son linealmente independientes y forman una base para las matrices 4×4 . Así que se pueden definir los siguientes *bilineales fermiónicos* con propiedades de transformación bien definidas (covariantes) bajo transformaciones de Lorentz,

$$\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \quad (2.158)$$

Puede comprobarse también que las transformaciones de Lorentz del campo de Dirac ψ pueden escribirse, en cualquier representación de las matrices gamma, de la forma

$$\psi \mapsto \exp\left\{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}\psi, \quad \text{i.e. } J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.159)$$

(Basta comprobar que $J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ satisface el álgebra de Lorentz (1.41).)

Una simetría global interesante que posee el lagrangiano de Dirac *sin masa* es la *simetría quirral*,

$$\psi_L \mapsto e^{-i\theta_L}\psi_L, \quad \psi_R \mapsto e^{-i\theta_R}\psi_R \quad (\theta_L \text{ y } \theta_R \text{ independientes}), \quad (2.160)$$

que, en términos del espinor de Dirac, puede escribirse

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi, \quad \psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi \quad (\alpha \text{ y } \beta \text{ independientes}). \quad (2.161)$$

En efecto, haciendo transformaciones infinitesimales,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\alpha}\psi = \begin{pmatrix} (1-i\alpha)\psi_L \\ (1-i\alpha)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = \theta_L \equiv \alpha \quad (2.162)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi = \begin{pmatrix} (1+i\beta)\psi_L \\ (1-i\beta)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_R = -\theta_L \equiv \beta. \quad (2.163)$$

Como

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi \Rightarrow \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}e^{i\alpha} \quad (2.164)$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \bar{\psi} \mapsto \psi^\dagger e^{i\beta\gamma_5}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 e^{-i\beta\gamma_5} = \bar{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}, \quad (2.165)$$

$$\text{pues } \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (2.166)$$

la invariancia del lagrangiano bajo ambas transformaciones independientes es clara:

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \mapsto i\bar{\psi}e^{i\alpha}\not{\partial}e^{-i\alpha}\psi = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = \mathcal{L} \quad (2.167)$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5}\psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \mapsto i\bar{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{-i\beta\gamma_5}\psi = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = \mathcal{L}. \quad (2.168)$$

Hay por tanto dos corrientes conservadas,

$$j_V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{corriente vectorial}), \quad j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad (\text{corriente axial}). \quad (2.169)$$

Si $m \neq 0$ solo la corriente vectorial se conserva. Basta usar la ecuación de Dirac para comprobarlo:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \Rightarrow \begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= m\psi \\ -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu &= m\bar{\psi}, \quad \text{pues } \gamma^0\gamma^\mu\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_\mu j_V^\mu &= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = 0 \\ \Rightarrow \partial_\mu j_A^\mu &= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}\not{\partial}\gamma_5\psi + i\bar{\psi}\not{\partial}\gamma_5\psi = 2i\bar{\psi}\not{\partial}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (2.171)$$

2.4.3 Masa de Majorana

Un campo de Majorana es un campo de Dirac autoconjugado,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \zeta i \sigma^2 \psi_L^*, \quad |\zeta|^2 = 1. \quad (2.172)$$

Es evidente que ψ_M puede tener masa a pesar de estar generado por un solo espinor de Weyl. Basta con escribir

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi_M = 0 \Rightarrow i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R = i\zeta m \sigma^2 \psi_L^* \quad (2.173)$$

que conduce a una ecuación de Klein-Gordon con masa para ψ_L ,

$$(\square + m^2)\psi_L = 0 \quad (2.174)$$

independientemente de que ψ_R venga o no dado por ψ_L . No escribiremos el lagrangiano clásico para ψ_M porque su término de masa sería proporcional a

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_M \psi_M &= (\psi_L^\dagger, -i\zeta^* \psi_L^T \sigma^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\zeta \sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \\ &= i\zeta \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^* - i\zeta^* \psi_L^T \sigma^2 \psi_L = -i\zeta^* \psi_L^T \sigma^2 \psi_L + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.175)$$

que es nulo a no ser que las componentes de ψ_M sean tratadas como cantidades anticonmutantes (variables de Grassmann) pues

$$i\psi_L^T \sigma^2 \psi_L = \psi_L^1 \psi_L^2 - \psi_L^2 \psi_L^1. \quad (2.176)$$

Pero lo más interesante es que, si bien el lagrangiano de Dirac es invariante bajo el grupo U(1) de transformaciones globales

$$\psi_L \mapsto e^{-i\alpha} \psi_L, \quad \psi_R \mapsto e^{-i\alpha} \psi_R, \quad (2.177)$$

esta simetría no pueden tenerla los campos de Majorana pues las componentes *left* y *right* están conjugadas según (2.172). Esto significa que un campo de Majorana no puede tener cargas U(1), como la carga eléctrica, el número bariónico o el número leptónico. ¿Es el neutrino un fermión de Majorana?

2.5 Campo electromagnético

2.5.1 Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell

El campo electromagnético viene descrito por el cuadvivector A^μ . Definiendo el tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} vienen dados por

$$E^i = -F^{0i} = -\partial_t A^i - \nabla^i A^0, \quad B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk} = (\nabla \times \vec{A})^i, \quad (2.178)$$

de donde $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$, pues $\epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} = \delta^{jl} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kl}$.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al *lagrangiano de Maxwell*,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (2.179)$$

que también puede escribirse $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$, obtenemos las ecuaciones de movimiento (*ecuaciones de Maxwell* en el vacío)

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E}} \quad (2.180)$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell se obtienen a partir del *tensor dual* $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, cuya cuatridivergencia es nula, pues $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$, así que

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}} \quad (2.181)$$

2.5.2 Simetría gauge

El lagrangiano de Maxwell es simétrico bajo transformaciones *locales* $\theta = \theta(x)$ de la forma

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (\text{transformación de gauge U(1)}). \quad (2.182)$$

La existencia de esta *simetría local* implica que $A_\mu(x)$ hace una descripción *redundante* del campo electromagnético, pues podemos usar la libertad de elección de gauge para restringir $A_\mu(x)$.

Solemos llamar “simetría” a una transformación que deja invariante el lagrangiano (o más bien la acción), pero aunque la invariancia gauge implica la existencia de una simetría global, con consecuencias físicas como la conservación de la carga (teorema de Noether), *la invariancia gauge no es una simetría del sistema físico* (los estados no se transforman).

Recordemos que la invariancia gauge es necesaria para poder describir partículas sin masa de espín 1 (dos grados de libertad) mediante campos vectoriales de cuatro componentes (dos de ella son espúreas). La simetría gauge es en realidad una *libertad* gauge.

Podemos tomar $A_0(x) = 0$ eligiendo

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int^t dt' A_0(t', \vec{x}), \quad (2.183)$$

pues así $A'_0(x) = A_0(x) - A_0(x) = 0$. Podemos también hacer otra transformación, que no cambia la componente A_0 ,

$$A'_\mu(x) \mapsto A''_\mu(x) = A'_\mu(x) - \partial_\mu \theta(\vec{x}), \quad \theta(\vec{x}) \equiv - \int \frac{d^3 y}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial A'^i(t, \vec{y})}{\partial y^i}. \quad (2.184)$$

Aunque no lo parezca, esta θ no depende de t , pues

$$E^i = -F^{0i} = -\partial^0 A^i + \partial^i A^{0\theta} = -\partial^0 A^i \quad (2.185)$$

y como $\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 0$ *en ausencia de fuentes* tenemos que $\partial_0 \partial_i A^i = 0$ y por tanto $\partial_0 \theta = 0$. Así que también $A''_0(x) = 0$. Veamos qué consecuencias tiene esta transformación de gauge:

$$\nabla^2 \theta(\vec{x}) = - \int d^3 y \frac{\partial A'^i(t, \vec{y})}{\partial y^i} \nabla_x^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = \frac{\partial A'^i(x)}{\partial x^i} = \nabla \cdot \vec{A}', \quad (2.186)$$

donde se ha usado que

$$\nabla_x^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \right) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.187)$$

así que

$$\partial^\mu A''_\mu(x) = \partial^\mu A'_\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu \theta(\vec{x}) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A}'' = \nabla \cdot \vec{A}' - \nabla^2 \theta = 0. \quad (2.188)$$

Es decir podemos tomar también $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. A esta elección,

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.189)$$

que solamente es posible en ausencia de fuentes, se le llama *gauge de radiación*.

Otra elección, que puede hacerse siempre, es

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta, \quad \partial_\mu \partial^\mu \theta \equiv \partial_\mu A^\mu \quad (2.190)$$

de modo que podemos tomar

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.191)$$

Es el llamado *gauge de Lorenz*.^e Entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu = 0. \quad (2.192)$$

Es decir, cada componente de A^μ satisface una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Sus soluciones son de la forma (A^μ es un campo real de masa cero)

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k) e^{-ikx} + \epsilon_\mu^*(k) e^{ikx}, \quad k^2 = 0. \quad (2.193)$$

La condición (2.191) implica que el vector de polarización $\epsilon^\mu(k)$ satisface

$$k\epsilon = 0. \quad (2.194)$$

En el gauge de radiación, compatible con el gauge de Lorenz, el campo es transverso pues la polarización $\epsilon^0 = 0$ y $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$.

En este punto conviene hacer la siguiente aclaración. A diferencia de la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, que solo puede imponerse en ausencia de fuentes, la condición $A^0 = 0$ puede usarse siempre, aunque no suele hacerse cuando hay fuentes. Por ejemplo, consideremos un observador frente a una carga e en reposo a una distancia r . En ese caso se suele tomar

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = \left(\frac{e}{4\pi r}, 0 \right), \quad (2.195)$$

que conduce al campo electromagnético

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \phi = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0. \quad (2.196)$$

Sin embargo, podríamos haber elegido un gauge en el que

$$A'^\mu = (\phi', \vec{A}') = \left(0, -\frac{et}{4\pi r^2} \hat{r} \right), \quad (2.197)$$

^eNo debe confundirse a L.V. Lorenz (físico y matemático danés), autor del *gauge de Lorenz*, con H.A. Lorentz (físico holandés, premio Nobel en 1902), que propuso las *transformaciones de Lorentz*. Tampoco con E.N. Lorenz (matemático y meteorólogo norteamericano), fundador de la teoría del caos, que acuñó el “efecto mariposa” y propuso el *atractor de Lorenz*.

que conduce al *mismo* campo electromagnético,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}' - \nabla \phi' = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = 0. \quad (2.198)$$

Ambas elecciones están conectadas mediante la transformación de gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \theta(x) = \frac{et}{4\pi r}. \quad (2.199)$$

Hallemos ahora el tensor energía-momento. Aplicando el teorema de Noether obtenemos

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2, \quad F^2 \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.200)$$

que no es invariante gauge ni tampoco simétrico. Podemos simetrizarlo añadiéndole $\partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu)$, que cumple $\partial_\mu \partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu) = 0$ y además lo convierte en invariante gauge,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + \partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu) \\ &= F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2, \quad \text{cuando } \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Las cargas conservadas bajo transformaciones espaciotemporales son por tanto

$$E = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (\text{energía}) \quad (2.202)$$

$$\mathbb{P}^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B})^i \quad (\text{vector de Poynting}). \quad (2.203)$$

2.5.3 Acoplamiento mínimo con la materia

En presencia de fuentes del campo electromagnético (cargas y corrientes) las ecuaciones de Maxwell son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + \vec{j}, \quad j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}), \quad (2.204)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (2.205)$$

Nótese que las dos últimas son las mismas que en ausencia de fuentes, debido a que $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$ en cualquier caso. Estas ecuaciones se obtienen al minimizar la acción

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (2.206)$$

que es *invariante gauge solo si j^μ es una corriente conservada*, $\partial_\mu j^\mu = 0$, pues

$$j^\mu A_\mu \mapsto j^\mu A_\mu - j^\mu \partial_\mu \theta \quad (2.207)$$

y, como $\int d^4x \partial_\mu(\theta j^\mu) = 0 \Rightarrow \int d^4x j^\mu \partial_\mu \theta = -\int d^4x \theta \partial_\mu j^\mu = 0$, tenemos que

$$\int d^4x j^\mu A_\mu \mapsto \int d^4x j^\mu A_\mu \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.208)$$

La invariancia gauge es el *principio que guía cómo deben ser las interacciones*. Veamos cómo funciona el método aplicándolo al lagrangiano de Dirac en presencia de un campo electromagnético. El lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (2.209)$$

no es invariante bajo transformaciones de gauge U(1) (transformaciones de fase *locales*),

$$\psi \mapsto e^{-iq\theta(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}e^{iq\theta(x)}. \quad (2.210)$$

Sin embargo, el lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.211)$$

sí es invariante bajo la transformación de gauge

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (2.212)$$

Podemos conseguir un lagrangiano total invariante gauge si cambiamos la derivada ∂_μ por la *derivada covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu + ieqA_\mu \quad (2.213)$$

pues entonces

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &= (\partial_\mu + ieqA_\mu)\psi \mapsto (\partial_\mu + ieqA_\mu + iq\partial_\mu\theta)e^{-iq\theta}\psi \\ &= e^{-iq\theta}(-iq\partial_\mu\theta + \partial_\mu + ieqA_\mu + iq\partial_\mu\theta)\psi = e^{-iq\theta}D_\mu\psi \end{aligned} \quad (2.214)$$

y el lagrangiano resultante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eqA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.215)$$

es invariante gauge. De esta forma, hemos introducido una interacción de la forma $j^\mu A_\mu$ (*acoplamiento mínimo*) entre la corriente fermiónica,

$$j^\mu = eq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.216)$$

y el campo electromagnético, que nos permite restaurar la simetría local. Nótese que j^μ es una corriente conservada debida a la invariancia global de \mathcal{L}_D bajo transformaciones de fase U(1). Por tanto,

$$Q = \int d^3x j^0(x) = eq \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = eq \int d^3x \psi^\dagger\psi \quad (2.217)$$

es la *carga eléctrica*. Otras interacciones invariantes gauge son posibles, pero involucran términos de interacción con dimensión canónica mayor que cuatro, que por tanto deben ir multiplicados por constantes que tienen dimensiones de masa elevada a una potencia negativa. Por ejemplo, la interacción dipolar magnética

$$\mathcal{L} = a\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \quad [a] = M^{-1}. \quad (2.218)$$

Tales acoplamientos surgirán de forma natural al cuantizar la teoría y constituyen correcciones al acoplamiento mínimo de siguiente orden en teoría de perturbaciones.

Nota: En general, si $\{T^a\}$ son los generadores del grupo de simetrías gauge, $\{W_\mu^a(x)\}$ los bosones de gauge asociados a cada generador y $\{\theta^a(x)\}$ los parámetros de la transformación, es fácil comprobar que si los campos se transforman

$$\psi \mapsto U\psi, \quad U = \exp\{-iT^a\theta^a(x)\} \quad (2.219)$$

$$\widetilde{W}_\mu \mapsto U\widetilde{W}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \quad \widetilde{W}_\mu \equiv T^a W_\mu^a, \quad (2.220)$$

introduciendo la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\widetilde{W}_\mu \quad (2.221)$$

se tiene que

$$D_\mu \psi \mapsto U D_\mu \psi \quad (2.222)$$

y el lagrangiano resultante

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (2.223)$$

queda invariante. Para un grupo de simetrías no abeliano, el lagrangiano invariante de los campos de gauge (2.211) debe generalizarse e incluye, además de los términos cinéticos, autointeracciones cúbicas y cuárticas fijadas por las constantes de estructura:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\text{Tr} \left\{ \widetilde{W}_{\mu\nu} \widetilde{W}^{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} \quad (2.224)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{cubic}} + \mathcal{L}_{\text{quartic}} \quad (2.225)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)(\partial^\mu W^{a,\nu} - \partial^\nu W^{a,\mu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{cubic}} = \frac{1}{2}g f^{abc} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a) W^{b,\mu} W^{c,\nu} \quad (2.226)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4}g^2 f^{abe} f^{cde} W_\mu^a W_\nu^b W^{c,\mu} W^{d,\nu} \quad (2.227)$$

y

$$\widetilde{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \widetilde{W}_\nu - \partial_\nu \widetilde{W}_\mu + ig[\widetilde{W}_\mu, \widetilde{W}_\nu] \mapsto U\widetilde{W}_{\mu\nu}U^\dagger \quad (2.228)$$

$$\Rightarrow W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (2.229)$$

En el caso del grupo U(1) del electromagnetismo el único generador es un múltiplo de la identidad, $T = q$, la carga del campo en unidades del acoplamiento $g = e$. En adelante la llamaremos Q_f , pues será la carga eléctrica (en unidades de e) del fermión f que aniquila el campo cuántico ψ .

Tema 3

Cuantización de campos libres

3.1 Campos escalares

3.1.1 Espacio de Fock

Recordemos que para cuantizar un sistema clásico de coordenadas q^i y momentos p^i en la imagen de Schrödinger promovemos q^i y p^i a operadores e imponemos las reglas de conmutación (en unidades $\hbar = 1$):

$$[q^i, p^j] = i\delta_{ij}, \quad [q^i, q^j] = [p^i, p^j] = 0. \quad (3.1)$$

En la imagen de Heisenberg, en la que los operadores dependen del tiempo,

$$q_H^j(t) = e^{iHt} q^j e^{-iHt}, \quad p_H^j(t) = e^{iHt} p^j e^{-iHt} \quad (3.2)$$
$$(\Rightarrow \partial_t q_H^j = iH q_H^j - i q_H^j H = -i[q_H^j, H], \quad \text{si } \partial_t q^j = 0)$$

imponemos las reglas de conmutación en tiempos iguales,

$$[q_H^i(t), p_H^j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [q_H^i(t), q_H^j(t)] = [p_H^i(t), p_H^j(t)] = 0. \quad (3.3)$$

En teoría de campos hemos reemplazado $q_H^i(t)$ por $\phi(t, \vec{x})$ y $p_H^i(t)$ por $\Pi(t, \vec{x})$, así que para cuantizar los campos los promovemos a operadores e imponemos^a

$$\boxed{[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0} \quad (3.4)$$

Estudiemos en primer lugar el caso del campo escalar real,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}), \quad p^0 = E_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad (3.5)$$

donde ahora ϕ , $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$ son *operadores*. Recordando que

$$\Pi(t, \vec{y}) = \partial_t \phi(t, \vec{y}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{2}} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{-iqy} - a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) \quad (3.6)$$

^aEste procedimiento se llama *cuantización canónica*. Existe un procedimiento alternativo, el *formalismo de integrales de camino* que resulta particularmente útil para cuantizar teorías de campos gauge.

es fácil comprobar que (3.4) implica

$$\boxed{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0} \quad (3.7)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{q}}}{2}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\quad \times \left(e^{-i(E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})} + e^{i(E_{\vec{p}} - E_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})} \right) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde se ha usado que

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad \delta^3(-\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}). \quad (3.9)$$

Las reglas de conmutación (3.7) nos recuerdan a los *operadores creación y destrucción* de modos de energía $\hbar\omega$ de un *oscilador armónico* con hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (3.10)$$

cuyas soluciones se hallan introduciendo los operadores (reinsertamos las \hbar para refrescar mejor la memoria):

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a - a^\dagger), \quad (3.11)$$

que satisfacen las reglas de conmutación,

$$[x, p] = i\hbar \Rightarrow [a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (3.12)$$

De ellas se deduce que

$$H = \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2}). \quad (3.13)$$

Definiendo el estado de mínima energía (el *vacío*) $|0\rangle$ como aquél que es aniquilado por el operador a y aplicando (3.12)

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger, \quad [H, a] = -\hbar\omega a, \quad (3.14)$$

tenemos que, normalizando $\langle 0|0\rangle = 1$,

$$a|0\rangle = 0 \Rightarrow a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \quad |n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (3.15)$$

de donde $a^\dagger a$ es el operador número de modos, $|0\rangle$ tiene energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (energía del punto cero) y $|n\rangle$ tiene energía $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Los autoestados $\{|n\rangle\}$ del hamiltoniano forman el espacio de Hilbert del sistema, llamado *espacio de Fock*.

Volviendo a nuestra teoría de campos, vemos que (3.7) son las relaciones de conmutación de un *conjunto infinito de osciladores armónicos*, uno por cada valor de \vec{p} , excepto por un factor de normalización que es el volumen (infinito) del sistema, pues

$$\lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{q}} \int d^3 x e^{-i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{x}} = V(\rightarrow \infty). \quad (3.16)$$

Podemos construir entonces el espacio de Fock de estados usando los operadores creación ($a_{\vec{p}}^\dagger$) y destrucción ($a_{\vec{p}}$) de modos de momento \vec{p} , a partir de (3.7) y $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$. Así obtenemos los *estados multipartícula*:

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \cdots a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle. \quad (3.17)$$

La normalización ha sido elegida convenientemente de modo que es invariante Lorentz. En efecto, tomemos por simplicidad el *estado de una partícula* de momento \vec{p} ,

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \Rightarrow \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \sqrt{2E_{\vec{q}}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} \langle 0 | a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (3.18)$$

que es una normalización invariante pues si hacemos e.g. un *boost* en la dirección z ,

$$E' = \gamma(E + \beta p_z), \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma(\beta E + p_z) \quad (3.19)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') &= \frac{\delta^3(\vec{p} - \vec{q})}{\gamma \left(\beta \frac{\partial E}{\partial p_z} + 1 \right)} = \frac{E \delta^3(\vec{p} - \vec{q})}{\gamma(\beta p_z + E)} = \frac{E}{E'} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\Rightarrow E_{\vec{p}'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') = E_{\vec{p}} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

En el primer paso se ha usado

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{df}{dx}(x = x_0) \right|}, \quad f(x) = p'_z(p_z) = \gamma(\beta E + p_z), \quad (3.21)$$

y en el segundo,

$$\frac{dE}{dp_z} = \frac{p_z}{E}, \quad \text{pues } E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \quad (3.22)$$

Veamos ahora cuál es la energía de los estados multipartícula. Para ello expresaremos primero el hamiltoniano en términos de operadores creación y destrucción (hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad, pues el hamiltoniano es una constante del movimiento):

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) = \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\ &\times \left\{ -E_{\vec{p}} E_{\vec{q}} \left(a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \right. \\ &\quad - \vec{p} \cdot \vec{q} \left(a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \\ &\quad \left. + m^2 \left(a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} V \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

El segundo término es la suma de la energía del punto cero de todos los osciladores,

$$E_{\text{vac}} = V \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \Rightarrow \rho_{\text{vac}} = \frac{E_{\text{vac}}}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}}. \quad (3.24)$$

No nos preocupa que la energía total del sistema, que tiene un volumen infinito, sea divergente. Pero vemos que, además, la *densidad de energía del vacío* ρ_{vac} es infinita. Esto

tampoco es un problema, pues estamos interesados en diferencias de energía,^b así que podemos abstraer la energía del punto cero y declarar que el hamiltoniano es

$$H \equiv \int d^3x : \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (3.25)$$

donde $: \mathcal{O} :$ es el *orden normal* de \mathcal{O} , que consiste en escribir todos los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción. Así,

$$: a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger : \equiv a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \quad (3.26)$$

De este modo el vacío tiene energía cero y

$$\begin{aligned} H |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \dots a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots |0\rangle \\ &= (E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots) |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots\rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde se ha aplicado $a_{\vec{p}} a_{\vec{p}_i}^\dagger = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_i) + a_{\vec{p}_i}^\dagger a_{\vec{p}}$ de (3.7) y $a_{\vec{p}} |0\rangle = 0$.

En cuanto al momento,

$$\begin{aligned} P^i &= \int d^3x : \partial^0 \phi \partial^i \phi : = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\ &\times : \left\{ -E_{\vec{p}} q^i a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{-i(p+q)x} - E_{\vec{p}} q^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger e^{i(p+q)x} + E_{\vec{p}} q^i a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(p-q)x} + E_{\vec{p}} q^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{i(p-q)x} \right\} : \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i : (-a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) : \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde los dos primeros sumandos son nulos porque resultan de la integración de una función impar en un intervalo simétrico. Por tanto,

$$\begin{aligned} P^i |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \dots a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger \dots |0\rangle \\ &= (p_1^i + p_2^i + \dots) |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots\rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nótese que los estados multipartícula $|\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots\rangle$ son simétricos bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera, porque los operadores creación conmutan entre sí. Por otro lado, recordemos que del teorema de Noether se deduce que los campos escalares tienen espín cero, así que los cuantos que crea y destruye un campo escalar son partículas de espín cero. Tenemos por tanto justificada la *conexión espín-estadística* que establece que las partículas de espín entero (0, 1, 2, ...) son bosones, es decir, obedecen la estadística de Bose-Einstein, que implica que sus estados son simétricos bajo intercambio. Veremos que la imposición de reglas de anticonmutación para la cuantización de campos de espín $\frac{1}{2}$, para evitar que el hamiltoniano no esté acotado inferiormente, conduce también de forma automática a estados multipartícula antisimétricos bajo intercambio, como corresponde a los fermiones. Es decir, en Teoría Cuántica de Campos la conexión espín-estadística *no es un postulado sino un teorema*.

^bEsto no puede hacerse si se incluye gravedad, pues entonces la energía del vacío es relevante. La energía del punto cero está relacionada con la constante cosmológica. Véase la discusión de Maggiore [1], p. 141.

3.1.2 Campos complejos. Antipartículas

Si el campo escalar es complejo,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right), \quad \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\vec{p}} e^{-ipx} \right). \quad (3.30)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & \Rightarrow & [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0 & & [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

De forma análoga al caso del campo real, construimos el espacio de Fock a partir de

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = b_{\vec{p}} |0\rangle = 0, \quad (3.32)$$

aplicando $a_{\vec{p}}^\dagger$ y $b_{\vec{p}}^\dagger$ sucesivamente. Es fácil demostrar que, tomando el orden normal,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}), \quad P^i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}). \quad (3.33)$$

Vemos que los cuantos de un campo escalar complejo son dos especies de igual masa creadas por $a_{\vec{p}}^\dagger$ y $b_{\vec{p}}^\dagger$, respectivamente.

La carga U(1) conservada es

$$\begin{aligned} Q &= i \int d^3x : \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi : = i \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\ &\times : \left\{ \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) \partial_0 \left(a_{\vec{q}} e^{-iqx} + b_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) - \partial_0 \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{-iqx} + b_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) \right\} : \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\ &\times : \left\{ \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) E_{\vec{q}} \left(a_{\vec{q}} e^{-iqx} - b_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) + E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} - b_{\vec{p}} e^{-ipx} \right) \left(a_{\vec{q}} e^{-iqx} + b_{\vec{q}}^\dagger e^{iqx} \right) \right\} : \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} : \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{i(q-p)x} - b_{\vec{p}} b_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(q-p)x} \right) : \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por tanto, el estado $a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q = +1$ y $b_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q = -1$. Ya estamos en situación de interpretar las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de energía negativa. El coeficiente de la solución de energía positiva de un campo *complejo* ϕ se convierte al cuantizar el campo en el operador destrucción de una *partícula* (carga unidad) mientras que el coeficiente de la solución de energía negativa se convierte en el operador creación de su *antipartícula* (carga opuesta). Para el campo ϕ^\dagger ocurre lo contrario, pues se intercambian los roles de partícula y antipartícula. Si el campo es *real*, $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$, entonces crea y destruye partículas que *coinciden* con su propia antipartícula.

3.2 Campos de espín $\frac{1}{2}$

3.2.1 Campo de Dirac

Para cuantizar el campo de Dirac, que es un campo complejo,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right), \quad (3.35)$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \sum_{r=1,2} \left(a_{\vec{q},r}^\dagger u^{(r)\dagger}(\vec{q}) e^{iqx} + b_{\vec{q},r} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) e^{-iqx} \right), \quad (3.36)$$

convertimos los coeficientes $a_{\vec{p},s}$, $b_{\vec{p},s}$ y sus complejos conjugados en operadores y sus operadores adjuntos, como hicimos con el campo escalar. Antes de imponer ninguna relación de (anti)conmutación sobre los mismos, veamos qué forma tiene el operador hamiltoniano resultante (de nuevo hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3x \theta^{00} = \int d^3x \psi^\dagger i \partial_0 \psi = \int d^3x \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \\ &\times \sum_{r,s} \left\{ a_{\vec{q},r}^\dagger a_{\vec{p},s} e^{-i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} u^{(s)}(\vec{p}) - b_{\vec{q},r} b_{\vec{p},s}^\dagger e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} v^{(s)}(\vec{p}) \right. \\ &\quad \left. - a_{\vec{q},r}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger e^{-i(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} v^{(s)}(\vec{p}) + b_{\vec{q},r} a_{\vec{p},s} e^{i(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) E_{\vec{p}} u^{(s)}(\vec{p}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \left\{ a_{\vec{p},r}^\dagger a_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) - b_{\vec{p},r} b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) \right. \\ &\quad \left. - a_{-\vec{p},r}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger u^{(r)\dagger}(-\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) + b_{-\vec{p},r} a_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(-\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} - b_{\vec{p},s} b_{\vec{p},s}^\dagger), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} u^{(r)\dagger}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= 2E_{\vec{p}} \delta_{rs}, & v^{(r)\dagger}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= 2E_{\vec{p}} \delta_{rs}, \\ u^{(r)\dagger}(-\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= v^{(r)\dagger}(-\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si ahora impusiéramos las mismas reglas de conmutación que al campo escalar complejo y aplicáramos el orden normal (substracción de la energía del vacío), obtendríamos un hamiltoniano no acotado inferiormente, pues los estados creados por $b_{\vec{p}}^\dagger$, que llamaremos antipartículas, contribuyen con energía negativa arbitrariamente grande. Para obtener un espectro de energías que tenga sentido, debemos imponer las *reglas de anticonmutación*

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \vec{x}), \Pi_\psi(t, \vec{y})\} &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\psi(t, \vec{x}), \psi(t, \vec{y})\} &= \{\Pi_\psi(t, \vec{x}), \Pi_\psi(t, \vec{y})\} = 0 \\ \Rightarrow \{a_{\vec{p},r}, a_{\vec{q},s}^\dagger\} &= \{b_{\vec{p},r}, b_{\vec{q},s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \\ \{a_{\vec{p},r}, a_{\vec{q},s}\} &= \{b_{\vec{p},r}, b_{\vec{q},s}\} = \{a_{\vec{p},r}, b_{\vec{q},s}\} = \{a_{\vec{p},r}, b_{\vec{q},s}^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

y definir, consistentemente, el *orden normal para operadores fermiónicos*,

$$: a_{\vec{p},r} a_{\vec{p},r}^\dagger : \equiv -a_{\vec{p},r}^\dagger a_{\vec{p},r}, \quad : b_{\vec{p},r} b_{\vec{p},r}^\dagger : \equiv -b_{\vec{p},r}^\dagger b_{\vec{p},r}, \quad (3.40)$$

lo que conduce al hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int d^3x : \psi^\dagger i \partial_0 \psi : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} + b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}). \quad (3.41)$$

Análogamente, para el operador momento se obtiene

$$P^i = \int d^3x : \theta^{0i} : = \int d^3x : \psi^\dagger i \partial^i \psi : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i \sum_s (a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} + b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}). \quad (3.42)$$

El momento angular (carga de Noether conservada asociada a la invariancia bajo rotaciones) tiene una parte orbital (idéntica a la del campo escalar) y otra de espín (adicional). Aplicando las expresiones generales para las corrientes de Noether, se puede demostrar que la parte de espín en la representación quiral es

$$\vec{S} = \int d^3x : \psi^\dagger \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \psi : \quad \text{donde } \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Expresado en el espacio de Fock, el espín en la dirección del eje z queda

$$\begin{aligned} S_z = & \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\ & \times \sum_{r,s} : \left\{ e^{-i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} a_{\vec{q},r}^\dagger a_{\vec{p},s} u^{(r)\dagger}(\vec{q}) \Sigma^3 u^{(s)}(\vec{p}) + e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} b_{\vec{q},r}^\dagger b_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) \Sigma^3 v^{(s)}(\vec{p}) \right. \\ & \left. + e^{-i(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} a_{\vec{q},r}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger u^{(r)\dagger}(\vec{q}) \Sigma^3 v^{(s)}(\vec{p}) + e^{i(\vec{q}+\vec{p})\cdot\vec{x}} b_{\vec{q},r}^\dagger a_{\vec{p},s} v^{(r)\dagger}(\vec{q}) \Sigma^3 u^{(s)}(\vec{p}) \right\} : . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Entonces el espín J_z del estado creado por $a_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle$ o $b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle$ en su sistema de referencia en reposo ($\vec{p}=0$) se obtiene aplicando S_z a estos estados. Recordemos que

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m} \xi^{(s)}, \quad v_L^{(s)}(0) = -v_R^{(s)}(0) = \sqrt{m} \eta^{(s)} \quad (3.45)$$

y que hemos introducido

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

La última línea en (3.44) se anula aplicando (3.38) y obtenemos

$$S_z a_{0,1}^\dagger |0\rangle = +\frac{1}{2} a_{0,1}^\dagger |0\rangle, \quad S_z a_{0,2}^\dagger |0\rangle = -\frac{1}{2} a_{0,2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.47)$$

$$S_z b_{0,1}^\dagger |0\rangle = +\frac{1}{2} b_{0,1}^\dagger |0\rangle, \quad S_z b_{0,2}^\dagger |0\rangle = -\frac{1}{2} b_{0,2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.48)$$

donde se ha tenido en cuenta que $b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger := -b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger$. Nótese que gracias a que dado un s hemos introducido $\eta^{(s)} = -i\sigma^2 \xi^{(s)*}$ para los espinores de las antipartículas, que es autovector de σ^3 con autovalor opuesto al de $\xi^{(s)}$, los *estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen el mismo espín*.

Como $[K_z, J_z] = 0$, el estado resultante de hacer un *boost* en la dirección del eje z (en la que hemos definido el espín) sigue siendo un autoestado del espín. A la proyección del espín en la dirección del movimiento se le llama *helicidad* y se puede comprobar usando las expresiones explícitas de los espinores (2.143) y (2.148) que

$$\hat{p} \cdot \vec{\Sigma} u^{(1)}(\vec{p}) = +u^{(1)}(\vec{p}), \quad \hat{p} \cdot \vec{\Sigma} u^{(2)}(\vec{p}) = -u^{(2)}(\vec{p}) \quad (3.49)$$

$$\hat{p} \cdot \vec{\Sigma} v^{(1)}(\vec{p}) = -v^{(1)}(\vec{p}), \quad \hat{p} \cdot \vec{\Sigma} v^{(2)}(\vec{p}) = +v^{(2)}(\vec{p}), \quad (3.50)$$

con lo que el resultado de (3.47) y (3.48) es extensible a los estados de helicidad:

$$\hat{p} \cdot \vec{S} a_{\vec{p},1}^\dagger |0\rangle = +\frac{1}{2} a_{\vec{p},1}^\dagger |0\rangle, \quad \hat{p} \cdot \vec{S} a_{\vec{p},2}^\dagger |0\rangle = -\frac{1}{2} a_{\vec{p},2}^\dagger |0\rangle \quad (3.51)$$

$$\hat{p} \cdot \vec{S} b_{\vec{p},1}^\dagger |0\rangle = +\frac{1}{2} b_{\vec{p},1}^\dagger |0\rangle, \quad \hat{p} \cdot \vec{S} b_{\vec{p},2}^\dagger |0\rangle = -\frac{1}{2} b_{\vec{p},2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.52)$$

es decir, los *estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen la misma helicidad*. Recordemos por último que las helicidades son invariantes Lorentz solamente para estados sin masa (quiralidades).

En cuanto a la carga U(1),

$$Q = \int d^3x : \psi^\dagger \psi : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} - b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}). \quad (3.53)$$

Por tanto, el campo cuántico ψ destruye partículas y crea antipartículas de igual masa, espín $\frac{1}{2}$ y carga opuesta.

Veamos ahora qué significan las etiquetas $s = 1, 2$ de los autoestados de espín. Asociamos s con el espín del fermión correspondiente a lo largo de una dirección dada. Consideremos una dirección cualquiera $\hat{n}(\theta, \varphi)$. Entonces los *autoestados de espín en esa dirección* son

$$\xi^{(s)} = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$$

$$\xi(\uparrow) \equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{pues } (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \xi(\uparrow) = +\xi(\uparrow), \quad (3.54)$$

$$\xi(\downarrow) \equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{pues } (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \xi(\downarrow) = -\xi(\downarrow). \quad (3.55)$$

(En particular, $\xi^{(s)} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ son los autoestados de espín a lo largo del eje z .) Pues bien, el estado que tiene *autovalor opuesto* a cualquier ξ es $\eta = -i\sigma^2 \xi^*$, pues si $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \xi = \xi$ entonces

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \eta = (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) (-i\sigma^2 \xi^*) = i\sigma^2 \hat{n} \cdot \vec{\sigma}^* \xi^* = -(-i\sigma^2 \xi^*) = -\eta, \quad (3.56)$$

donde se ha usado que $\vec{\sigma} \sigma^2 = -\sigma^2 \vec{\sigma}^*$. Así que podemos denotar también

$$\xi^{(-s)} \equiv \eta^{(s)} = -i\sigma^2 \xi^{(s)*} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)) \quad (3.57)$$

para recordarnos que son *autoestados con autovalor opuesto* al dado. Nótese, por cierto, que una doble inversión del espín de ξ lo lleva a

$$-i\sigma^2 \eta^* = -i\sigma^2 (-i\sigma^2 \xi^*)^* = \sigma^2 \sigma^{2*} \xi = -\xi \quad (3.58)$$

que no coincide con ξ , lo que refleja el hecho de que un giro de 2π no devuelve un sistema de espín $\frac{1}{2}$ a su estado original (para ello hay que rotar 4π).

Resumiendo, los espinores que introdujimos en el tema anterior son

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(-s)} \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Así que, dado el campo $\psi(x)$ de (3.35), el operador $a_{\vec{p},s}$ destruye partículas cuyo espinor $u^{(s)}(\vec{p})$ contiene a $\xi^{(s)}$ y el operador $b_{\vec{p},s}^\dagger$ crea antipartículas cuyo espinor $v^{(s)}(\vec{p})$ contiene a $\xi^{(-s)}$. Esto simplificará mucho las cosas. Por ejemplo, veremos en §3.2.3 que el conjugado de carga del campo $\psi(x)$ intercambia partículas por antipartículas preservando el *mismo estado s* , es decir, con el *mismo espín* o la *misma helicidad*.

3.2.2 Campo de Weyl sin masa

En el límite ultrarrelativista ($E \gg m$) recordemos que (vid. (2.146) y (2.150))

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_R \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Por tanto, el campo ψ_L destruye partículas de helicidad $h = -\frac{1}{2}$ (espinor $u^{(2)}$) y crea antipartículas de helicidad $h = +\frac{1}{2}$ (espinor $v^{(1)}$). El campo ψ_R destruye partículas de helicidad $h = +\frac{1}{2}$ (espinor $u^{(1)}$) y crea antipartículas de helicidad $h = -\frac{1}{2}$ (espinor $v^{(2)}$).

3.2.3 C, P, T

Conjugación de carga

El conjugado de carga del campo de Dirac clásico (representación quirral) es

$$\psi^c(x) = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_R^*(x) \\ i\sigma^2 \psi_L^*(x) \end{pmatrix} = -i\gamma^2 \psi^*(x) \quad (= -i\gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^T(x)). \quad (3.61)$$

Veamos cómo actúa la operación conjugación de carga sobre los estados de una partícula. Para ello necesitamos introducir un operador unitario C , con $C^2 = 1$, que transforme los operadores creación de la siguiente manera,

$$C a_{\vec{p},s} C = \eta_C b_{\vec{p},s}, \quad C b_{\vec{p},s} C = \eta_C a_{\vec{p},s}, \quad (3.62)$$

donde $\eta_C^2 = 1$, así que $\eta_C = \pm 1$. Entonces, a partir de (3.59) tenemos

$$\begin{aligned} [v^{(s)}(\vec{p})]^* &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}(-i\sigma^2 \xi^{(s)*}) \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}(-i\sigma^2 \xi^{(s)*}) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)*} \\ i\sigma^2 \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)*} \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \xi^{(s)} \end{pmatrix} = -i\gamma^2 u^{(s)}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.63)$$

(en el primer paso hemos usado $\sigma^2 \vec{\sigma} \sigma^2 = -\vec{\sigma}^*$ con $(\sigma^2)^2 = 1$ y en el segundo $\sigma^{2*} = -\sigma^2$) de donde

$$u^{(s)}(\vec{p}) = -i\gamma^2 [v^{(s)}(\vec{p})]^*, \quad v^{(s)}(\vec{p}) = -i\gamma^2 [u^{(s)}(\vec{p})]^* \quad (3.64)$$

(pues $(\gamma^2)^2 = -1$.) De esta forma se satisface la versión operatorial de (3.61):

$$\begin{aligned} C\psi(x)C &= \eta_C \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\ &= -i\eta_C \gamma^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} [v^{(s)}(\vec{p})]^* e^{-ipx} + a_{\vec{p},s}^\dagger [u^{(s)}(\vec{p})]^* e^{ipx} \right) \\ &= -i\eta_C \gamma^2 \psi^*(x). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Es decir, *la conjugación de carga intercambia partículas y antipartículas preservando el estado de espín, es decir, manteniendo las helicidades.*

Para campos de Majorana, que a nivel clásico satisfacen

$$\psi_M^c(x) = \zeta^* \psi_M(x) \quad (3.66)$$

se tiene que^c

$$\begin{aligned}
C\psi_M(x)C &= \psi_M(x) \\
\Rightarrow \eta_C \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\
\Rightarrow a_{\vec{p},s} &= \eta_C b_{\vec{p},s}, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

es decir, partícula y antipartícula coinciden, pues

$$Ca_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle = Ca_{\vec{p},s}^\dagger CC |0\rangle = \eta_C b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle, \tag{3.68}$$

donde se ha tomado $C|0\rangle \equiv |0\rangle$.

Para un campo escalar complejo, basta ignorar espinores e índices de espín,

$$C\phi(x)C = \eta_C \phi^*(x) \Rightarrow Ca_{\vec{p}}^\dagger C = \eta_C b_{\vec{p}}^\dagger, \quad Cb_{\vec{p}}^\dagger C = \eta_C a_{\vec{p}}^\dagger. \tag{3.69}$$

El campo de Majorana es el análogo al campo escalar real.

Paridad

El transformado bajo paridad del campo de Dirac clásico (representación quirál) es

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_R(\tilde{x}) \\ \psi_L(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \gamma^0 \begin{pmatrix} \psi_L(\tilde{x}) \\ \psi_R(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \gamma^0 \psi(\tilde{x}), \quad \text{donde } \tilde{x} = (t, -\vec{x}). \tag{3.70}$$

Buscamos que sobre los estados de una partícula la paridad actúe

$$Pa_{\vec{p},s}P = \eta_a a_{-\vec{p},s}, \quad Pb_{\vec{p},s}P = \eta_b b_{-\vec{p},s}, \tag{3.71}$$

donde P es un operador unitario, con $P^2 = 1$, y η_a, η_b son fases que llamaremos paridades intrínsecas de partícula y antipartícula, respectivamente. Suponemos $P|0\rangle = |0\rangle$. Como los observables dependen de un número par de operadores fermiónicos, de la condición $P^2 = 1$ podemos tomar $\eta_a^2, \eta_b^2 = \pm 1$ (el signo menos será necesario para campos de Majorana). Entonces,

$$\begin{aligned}
P\psi(t, \vec{x})P &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{-\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + \eta_b^* b_{-\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{\vec{p},s} u^{(s)}(-\vec{p}) e^{-ip\tilde{x}} + \eta_b^* b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(-\vec{p}) e^{ip\tilde{x}} \right) \\
&= \gamma^0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip\tilde{x}} - \eta_b^* b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ip\tilde{x}} \right) \\
&= \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}), \quad \text{si } \eta_a = -\eta_b^*, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

^cLa fase compleja ζ^* a la derecha de la igualdad (3.66) está incorporada en la definición (3.62) que se introduce a la izquierda de la igualdad (3.67), de modo que podemos decir que $\eta_C = \zeta$, y es por tanto necesariamente real, pues $\eta_C = \pm 1$.

donde en el primer paso se ha cambiado \vec{p} por $-\vec{p}$ que implica sustituir px por $p\tilde{x}$ y en el segundo se ha usado que

$$u^{(s)}(-\vec{p}) = \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}), \quad v^{(s)}(-\vec{p}) = -\gamma^0 v^{(s)}(\vec{p}). \quad (3.73)$$

Si el campo es de Majorana entonces $a = b$ y la condición $\eta_a = -\eta_a^*$ obliga a tomar $\eta_a = \pm i$ ($\eta_a^2 = -1$), como habíamos anticipado. Para cualquier otro caso podemos tomar paridades reales, siendo *la paridad intrínseca de un fermión* $\eta_a = \pm 1$ *opuesta a la de su antifermión* $\eta_b = -\eta_a$. Si bien el valor de η_a (o η_b) es irrelevante para cualquier observable que involucre solo fermiones (o antifermiones), la diferencia de signo tiene consecuencias si ambos están presentes (vid. el sistema del positronio, estado ligado de electrón y positrón).

Para un campo escalar, ignorando espinores e índices de espín, es fácil concluir que

$$P\phi(t, \vec{x})P = \eta_a \phi(t, -\vec{x}), \quad \text{si } \eta_a = \eta_b, \quad (3.74)$$

es decir, *la paridad intrínseca de una partícula de espín cero y la de su antipartícula son iguales*.

Inversión temporal

Necesitamos que la inversión temporal T cambie

$$t \mapsto -t, \quad \vec{p} \mapsto -\vec{p}, \quad \vec{J} \mapsto -\vec{J}. \quad (3.75)$$

Notemos primero que si H es invariante bajo inversión temporal entonces T ha de ser un *operador antiunitario* pues $Te^{-iHt} = e^{iHt}T$. Entonces para dos estados cualesquiera,

$$\langle Ta|Tb \rangle = \langle a|b \rangle^* = \langle b|a \rangle, \quad T(z|a) = z^*T|a). \quad (3.76)$$

La acción de T queda definida por

$$Ta_{\vec{p},s}T = a_{-\vec{p},-s}, \quad Tb_{\vec{p},s}T = b_{-\vec{p},-s}, \quad (3.77)$$

donde

$$a_{-\vec{p},-s} \equiv (a_{-\vec{p},2}, -a_{-\vec{p},1}), \quad b_{-\vec{p},-s} \equiv (b_{-\vec{p},2}, -b_{-\vec{p},1}). \quad (3.78)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T\psi(t, \vec{x})T &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s T \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right) T \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{-\vec{p},-s} [u^{(s)}(\vec{p})]^* e^{ipx} + b_{-\vec{p},-s}^\dagger [v^{(s)}(\vec{p})]^* e^{-ipx} \right) \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{-\vec{p},-s} u^{(-s)}(-\vec{p}) e^{ipx} + b_{-\vec{p},-s}^\dagger v^{(-s)}(-\vec{p}) e^{-ipx} \right) \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx'} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx'} \right) \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde primero se ha usado que

$$\begin{aligned} u^{(-s)}(-\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}(-i\sigma^2\xi^{(s)*}) \\ \sqrt{p\sigma}(-i\sigma^2\xi^{(s)*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\sigma^*}\xi^{(s)*} \\ -i\sigma^2\sqrt{p\sigma^*}\xi^{(s)*} \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} [u^{(s)}(\vec{p})]^* = -\gamma^1\gamma^3[u^{(s)}(\vec{p})]^* \\ \Rightarrow [u^{(s)}(\vec{p})]^* &= \gamma^1\gamma^3 u^{(-s)}(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$[v^{(s)}(\vec{p})]^* = \gamma^1\gamma^3 v^{(-s)}(-\vec{p}), \quad (3.81)$$

y después se ha cambiado s por $-s$ y \vec{p} por $-\vec{p}$ que implica sustituir px por $-px'$ con $x' = (-t, \vec{x})$.

Para un campo escalar, es fácil obtener

$$T\phi(t, \vec{x})T = \phi(-t, \vec{x}). \quad (3.82)$$

3.3 Campo electromagnético

3.3.1 Cuantización en el gauge de radiación

Recordemos que en el gauge de radiación,

$$A^0(x) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.83)$$

las tres componentes no nulas de $A^\mu(x)$ satisfacen una ecuación de Klein-Gordon sin masa,

$$\square A^i = 0. \quad (3.84)$$

Sus soluciones son de la forma

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda} e^{-ikx} + \vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda}^* e^{ikx} \right) \quad (3.85)$$

con

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega_{\vec{k}}, \vec{k}), \quad \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| && \Leftarrow && k^2 = 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= 0 && \Leftarrow && \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

y $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1)$, $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)$ dos *vectores de polarización* ortogonales entre sí. Hallemos los momentos conjugados,

$$\Pi^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \quad \text{pues } \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.87)$$

$$\Pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i}(x) = -\partial^0 A^i(x) = E^i(x) \quad (\text{campo eléctrico}). \quad (3.88)$$

Vemos que $A^0(x) = 0$ (en este gauge) y $\Pi^0(x) = 0$ (en general), así que no son variables dinámicas. Para cuantizar el campo electromagnético promovemos, como hasta ahora, $\vec{A}(x)$ a operador e imponemos

$$[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{q}, \lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{q}, \lambda'}] = [a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{q}, \lambda'}^\dagger] = 0, \quad (3.89)$$

donde $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ ($a_{\vec{k},\lambda}$) son operadores sobre el espacio de Fock que crean (destruyen) *fotones*. Nótese que las relaciones de conmutación anteriores implican

$$\begin{aligned}
[A^i(t, \vec{x}), E^j(t, \vec{y})] &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \omega_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \\
&\quad \times \left\{ e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})} \sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{q}, \lambda') \right. \\
&\quad \left. + e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})} \sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon^{i*}(\vec{k}, \lambda) \epsilon^j(\vec{q}, \lambda') \right\} \\
&= -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \sum_{\lambda} \epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{k}, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \sum_{\lambda} \epsilon^{i*}(\vec{k}, \lambda) \epsilon^j(\vec{k}, \lambda) \right\} \\
&= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left\{ \epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{k}, \lambda) + \epsilon^{i*}(-\vec{k}, \lambda) \epsilon^j(-\vec{k}, \lambda) \right\} \\
&= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \equiv ig^{ij} \delta_{\text{tr}}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.90}
\end{aligned}$$

En el último paso se ha usado que el término entre llaves debe ser covariante bajo rotaciones y por tanto es una combinación de los tensores de dos índices bajo rotaciones que pueden construirse con δ^{ij} y k^i , es decir,

$$A\delta^{ij} + B \frac{k^i k^j}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left\{ \epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{k}, \lambda) + \epsilon^{i*}(-\vec{k}, \lambda) \epsilon^j(-\vec{k}, \lambda) \right\}. \tag{3.91}$$

Multiplicando por k^i , a partir de (3.86) tenemos que

$$Ak^j + Bk^j = 0 \Rightarrow A = -B, \tag{3.92}$$

y tomando, por ejemplo, $\vec{k} = (0, 0, \omega_{\vec{k}})$, $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = (1, 0, 0)$ y $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) = (0, 1, 0)$ basta mirar el término $i = j = 1$ para fijar

$$A = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1. \tag{3.93}$$

Si no fuera por el término $k^i k^j / k^2$ en (3.90) habríamos obtenido

$$-i\delta^{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = -i\delta^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) = ig^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.94}$$

Pero este término se encarga de mantener la *condición de transversalidad* del campo electromagnético en el gauge de radiación ($\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$), que proviene de $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ y también $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Así,

$$[\nabla \cdot \vec{A}(t, \vec{x}), E^j(t, \vec{y})] = \nabla_x [\vec{A}(t, \vec{x}), E^j(t, \vec{y})] = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (k^j - k^j) = 0, \tag{3.95}$$

$$[A^i(t, \vec{x}), \nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{y})] = \nabla_y [A^i(t, \vec{x}), \vec{E}(t, \vec{y})] = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (k^i - k^i) = 0. \tag{3.96}$$

Por eso hemos introducido en (3.90) la *delta transversa* $\delta_{\text{tr}}(\vec{x} - \vec{y})$.

Ya podemos construir el espacio de Fock actuando con $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ sobre el vacío definido por $a_{\vec{k},\lambda}|0\rangle = 0$. Aplicando el orden normal a la expresión clásica, por razones que ya conocemos, obtenemos entonces

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x : \vec{E}^2 + \vec{B}^2 : = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda}, \\ \vec{P} &= \int d^3x : \vec{E} \times \vec{B} : = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \vec{k} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Por tanto $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger |0\rangle$ es el estado de una partícula sin masa, energía $\omega_{\vec{k}}$ y momento \vec{k} con dos estados de polarización que ahora analizaremos. Aplicando el teorema de Noether puede encontrarse (demuéstrese) que la cantidad conservada bajo rotaciones es

$$M^{ij} = \int d^3x \partial_0 A^k (x^i \partial^j - x^j \partial^i) A_k + \int d^3x (A^i \partial_0 A^j - A^j \partial_0 A^i). \quad (3.98)$$

El primer término es el momento angular orbital y el segundo es la parte de espín. Concéntrenos en el espín:

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x : A^i \partial_0 A^j - A^j \partial_0 A^i : \\ &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda',\lambda''} (\epsilon^i(\vec{q}, \lambda'') \epsilon^{j*}(\vec{q}, \lambda') - \epsilon^{i*}(\vec{q}, \lambda') \epsilon^j(\vec{q}, \lambda'')) a_{\vec{q},\lambda'}^\dagger a_{\vec{q},\lambda''}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Por tanto, usando (3.89),

$$a_{\vec{q},\lambda''}^\dagger a_{\vec{k},\lambda}^\dagger |0\rangle = [a_{\vec{q},\lambda''}, a_{\vec{k},\lambda}^\dagger] |0\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{k}) \delta_{\lambda,\lambda''} |0\rangle \quad (3.100)$$

obtenemos

$$S^{ij} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger |0\rangle = i \sum_{\lambda'} (\epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{k}, \lambda') - \epsilon^{i*}(\vec{k}, \lambda') \epsilon^j(\vec{k}, \lambda)) a_{\vec{k},\lambda'}^\dagger |0\rangle. \quad (3.101)$$

Tomemos ahora $\vec{k} = (0, 0, \omega_{\vec{k}})$ y hallemos la helicidad de los fotones, es decir, el espín en la dirección del eje z , $S^3 = S^{12}$. Elijamos la base de estados de *polarización lineal* $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = (1, 0, 0)$ y $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) = (0, 1, 0)$, es decir, $\epsilon^i(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\lambda}^i$. Entonces,

$$S^3 a_{\vec{k},\lambda}^\dagger |0\rangle = i \sum_{\lambda'} (\delta_{\lambda}^1 \delta_{\lambda'}^2 - \delta_{\lambda'}^1 \delta_{\lambda}^2) a_{\vec{k},\lambda'}^\dagger |0\rangle \Rightarrow \begin{aligned} S^3 a_{\vec{k},1}^\dagger |0\rangle &= +i a_{\vec{k},2}^\dagger |0\rangle \\ S^3 a_{\vec{k},2}^\dagger |0\rangle &= -i a_{\vec{k},1}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.102)$$

Vemos que las polarizaciones lineales no son autoestados de helicidad. Sin embargo, sí lo son las *polarizaciones circulares*,

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) \pm i \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)) \quad (3.103)$$

pues

$$S^3 a_{\vec{k},+}^\dagger |0\rangle = +a_{\vec{k},+}^\dagger |0\rangle, \quad a_{\vec{k},+}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{k},1}^\dagger + i a_{\vec{k},2}^\dagger), \quad (3.104)$$

$$S^3 a_{\vec{k},-}^\dagger |0\rangle = -a_{\vec{k},-}^\dagger |0\rangle, \quad a_{\vec{k},-}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vec{k},1}^\dagger - i a_{\vec{k},2}^\dagger). \quad (3.105)$$

Por tanto, los estados $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k},\pm}^\dagger |0\rangle$ describen partículas sin masa, espín 1 y helicidad ± 1 .

Conviene destacar finalmente que, a pesar de que la covariancia Lorentz está rota por la elección de este gauge, se puede comprobar que si se escriben los generadores de Poincaré en términos de operadores creación y destrucción se satisface el álgebra.

3.3.2 Cuantización covariante

Nos gustaría poder imponer una cuantización covariante,

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \Pi^\nu(t, \vec{y})] = i g^{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) , \quad [A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = 0 , \quad (3.106)$$

sin embargo eso no es posible pues, como hemos visto en (3.87) y (3.88), $\Pi^0(x) = 0$. En cambio, si el lagrangiano fuera

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (3.107)$$

que *no es el lagrangiano de Maxwell*, tendríamos

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \Rightarrow \begin{aligned} \Pi^0(x) &= -\partial_\mu A^\mu(x) \\ \Pi^i(x) &= -F^{0i} = E^i(x) \end{aligned} \quad (\text{como antes}) \quad (3.108)$$

y reescribiendo

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \quad (3.109)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \Rightarrow \partial_\mu \left(-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha \right) = 0 \\ &\Rightarrow \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\ &\Rightarrow \square A^\nu = 0 , \end{aligned} \quad (3.110)$$

es decir, A^μ tiene masa cero, donde se ha usado

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\ \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha) &= \partial^\nu \partial_\mu A^\mu , \end{aligned} \quad (3.111)$$

cuyas soluciones son

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 \left(\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda} e^{-ikx} + \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger e^{ikx} \right) . \quad (3.112)$$

Como ahora no hemos impuesto $\epsilon^0 = 0$ ni $k_\mu \epsilon^\mu = 0$, el campo A^μ tiene cuatro grados de libertad, que etiquetamos mediante $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Obviamente el lagrangiano \mathcal{L}' no es invariante gauge. En particular, si tomamos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ entonces $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) = \delta_\lambda^\mu$, es decir, $\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0)$, $\epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0)$, $\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1)$. Solamente $\epsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\epsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ satisfacen $k_\mu \epsilon^\mu = 0$.

Es fácil comprobar que las reglas de conmutación (3.106) implican

$$[a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{q}, \lambda'}^\dagger] = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) , \quad [a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{q}, \lambda'}] = [a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, a_{\vec{q}, \lambda'}^\dagger] = 0 , \quad (3.113)$$

donde

$$\zeta_0 = -1 , \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1 . \quad (3.114)$$

Los estados de una partícula,

$$|\vec{k}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad (3.115)$$

tienen norma negativa para $\lambda = 0$, ya que

$$\langle \vec{q}, \lambda | \vec{k}, \lambda \rangle = 2\omega_{\vec{k}} \langle 0 | a_{\vec{q}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} | 0 \rangle = 2\omega_{\vec{k}} \langle 0 | [a_{\vec{q}, \lambda}, a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}] | 0 \rangle = \zeta_{\lambda} 2\omega_{\vec{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) . \quad (3.116)$$

Esto no es aceptable, pues la normas se interpretan como probabilidades. De todas formas, el lagrangiano \mathcal{L}' no es el del electromagnetismo y, si lo fuera, los estados $|\vec{k}, 0\rangle$ y $|\vec{k}, 3\rangle$ no son físicos.

Nos podemos plantear *recuperar* el electromagnetismo imponiendo que *sobre los estados físicos*,

$$\langle \text{fis}' | \partial_{\mu} A^{\mu} | \text{fis} \rangle = 0 . \quad (3.117)$$

Es decir, en lugar de tomar $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$ a nivel del lagrangiano, supondremos que el lagrangiano es \mathcal{L}' pero imponemos la ecuación anterior sobre los estados físicos, lo que se conoce como *cuantización de Gupta-Bleuler*. Veamos que en efecto esto es suficiente para eliminar del espacio de Fock todos los estados no físicos. Para ello, notemos que

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = (\partial_{\mu} A^{\mu})^{+} + (\partial_{\mu} A^{\mu})^{-} \quad (3.118)$$

donde hemos separado los estados de frecuencia positiva de los de frecuencia negativa,

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu} A^{\mu})^{+} &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 k_{\mu} \epsilon^{\mu}(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda} e^{-ikx} \\ (\partial_{\mu} A^{\mu})^{-} &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 k_{\mu} \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} e^{ikx} . \end{aligned} \quad (3.119)$$

Como $(\partial_{\mu} A^{\mu})^{-} = [(\partial_{\mu} A^{\mu})^{+}]^{\dagger}$, la condición (3.117) se satisface siempre que

$$(\partial_{\mu} A^{\mu})^{+} | \text{fis} \rangle = 0 . \quad (3.120)$$

Además, como $(\partial_{\mu} A^{\mu})^{+}$ es un operador lineal, si $|\text{fis}_1\rangle$ y $|\text{fis}_2\rangle$ son estados físicos también lo son una combinación arbitraria $\alpha |\text{fis}_1\rangle + \beta |\text{fis}_2\rangle$. Entonces, si tenemos un estado físico de una partícula

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad (3.121)$$

la condición (3.120) implica

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_{\mu} A^{\mu})^{+} |\psi\rangle = -i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda, \lambda'} c_{\lambda} q_{\mu} \epsilon^{\mu}(\vec{q}, \lambda') a_{\vec{q}, \lambda'} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \\ &\Rightarrow -\frac{i}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\lambda} \zeta_{\lambda} c_{\lambda} k_{\mu} \epsilon^{\mu}(\vec{k}, \lambda) |0\rangle = 0 \\ &\Rightarrow i \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} (c_0 + c_3) |0\rangle = 0 \Rightarrow c_0 + c_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

si $k^\mu = (\omega_{\vec{k}}, 0, 0, \omega_{\vec{k}})$ y $\epsilon^\mu(k, \lambda) = \delta^\mu_\lambda$. Es decir un estado físico es una combinación arbitraria $|\psi_T\rangle$ de los estados transversos creados por $a_{\vec{k},1}^\dagger$ y $a_{\vec{k},2}^\dagger$, como esperábamos. Pero también es física una combinación de la forma

$$|\phi\rangle = (a_{\vec{k},0}^\dagger - a_{\vec{k},3}^\dagger) |0\rangle \quad (3.123)$$

pues satisface la condición $c_0 + c_3 = 0$. Así que el subespacio de estados físicos de una partícula de momento \vec{k} más general es de la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle, \quad |\psi_T\rangle = \sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a_{\vec{k},\lambda}^\dagger |0\rangle. \quad (3.124)$$

Sin embargo, vamos a ver que, primero

$$\langle\phi|\phi\rangle = 0, \quad \langle\psi_T|\phi\rangle = 0 \Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle \quad (3.125)$$

y, segundo, $|\psi\rangle$ y $|\psi_T\rangle$ tienen la misma energía, momento, momento angular, etc. Por tanto, podemos introducir una relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \sim |\psi_T\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle \quad (3.126)$$

y elegir cualquier $|\psi\rangle$ de la clase $|\psi_T\rangle$ ya sea transverso o no, pues esta elección *no tiene consecuencias físicas*. En efecto, demostremos lo primero,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\phi\rangle &= \langle 0 | (a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})(a_{\vec{k},0}^\dagger - a_{\vec{k},3}^\dagger) | 0 \rangle = \langle 0 | (a_{\vec{k},0} a_{\vec{k},0}^\dagger + a_{\vec{k},3} a_{\vec{k},3}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | ([a_{\vec{k},0}, a_{\vec{k},0}^\dagger] + [a_{\vec{k},3}, a_{\vec{k},3}^\dagger]) | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\langle\psi_T|\phi\rangle = \langle 0 | (c_1^* a_{\vec{k},1} + c_2^* a_{\vec{k},2})(a_{\vec{k},0}^\dagger - a_{\vec{k},3}^\dagger) | 0 \rangle = 0. \quad (3.128)$$

y ahora demostremos lo segundo: la energía y el momento vienen dados por

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \left(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda} \right) \quad (3.129)$$

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} \left(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k},\lambda} \right). \quad (3.130)$$

Si calculamos los elementos de matriz de estos operadores, que contienen siempre la combinación $(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},0} + a_{\vec{k},3}^\dagger a_{\vec{k},3})$, entre dos estados físicos, tengamos en cuenta que sobre un estado físico $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle$,

$$(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})|\psi\rangle = c(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})|\phi\rangle = c(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3})(a_{\vec{k},0}^\dagger - a_{\vec{k},3}^\dagger)|0\rangle = 0 \quad (3.131)$$

y, por tanto

$$\begin{aligned} \langle\text{fis}'|(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},0} + a_{\vec{k},3}^\dagger a_{\vec{k},3})|\text{fis}\rangle &= \langle\text{fis}'|(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},0} + a_{\vec{k},0}^\dagger(a_{\vec{k},0} - a_{\vec{k},3}) + a_{\vec{k},3}^\dagger a_{\vec{k},3})|\text{fis}\rangle \\ &= \langle\text{fis}'|(-a_{\vec{k},0}^\dagger a_{\vec{k},3} + a_{\vec{k},3}^\dagger a_{\vec{k},3})|\text{fis}\rangle \\ &= -\langle\text{fis}'|(a_{\vec{k},0}^\dagger - a_{\vec{k},3}^\dagger)a_{\vec{k},3}|\text{fis}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.132)$$

lo que significa que a la energía y al momento solamente contribuyen los osciladores transversos.

3.3.3 C, P, T

Finalmente, hallemos las propiedades de transformación de $A^\mu(x)$ bajo C , P y T . Como $C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, para que C sea una simetría del lagrangiano de QED necesitamos que $\mathcal{L}_{\text{QED}} \supset q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ permanezca invariante, es decir

$$CA^\mu(x)C = -A^\mu(x) \Rightarrow Ca_{\vec{k},\pm}C = \eta_C a_{\vec{k},\pm}, \quad (3.133)$$

de donde la conjugación de carga del fotón es $\eta_C = -1$. En cuanto a P , como $\vec{A}(x)$ es un vector tenemos que

$$PA^\mu(t, x)P = A_\mu(t, -\vec{x}) \Rightarrow Pa_{\vec{k},\pm}P = \eta_P a_{-\vec{k},\pm}, \quad (3.134)$$

donde la paridad intrínseca del fotón es $\eta_P = -1$, como corresponde a un estado que tiene momento angular $J = 1$, consistentemente con la paridad de un sistema de momento angular orbital $L = 1$, cuya función de onda viene dada por el armónico esférico $Y_{LM}(\theta, \phi)$, que vale $(-1)^L = -1$. Por último,

$$TA^\mu(t, \vec{x})T = A_\mu(-t, \vec{x}) \Rightarrow Ta_{\vec{k},\pm}T = a_{-\vec{k},\mp}, \quad (3.135)$$

del mismo modo que el vector $T[\bar{\psi}(t, \vec{x})\gamma^\mu\psi(t, \vec{x})]T = \bar{\psi}(-t, \vec{x})\gamma_\mu\psi(-t, \vec{x})$.

Con esto completamos las propiedades de transformación bajo C , P y T de los campos escalares (3.69, 3.74, 3.82), espinoriales (3.65, 3.72, 3.79)^d y vectoriales^e (3.133, 3.134, 3.135), que son los ladrillos que se usan para construir los lagrangianos que describen la física de partículas elementales. Sus interacciones involucran productos invariantes Lorentz de los campos y sus derivadas. Sabemos que las interacciones débiles violan C , P , CP y T , aunque las interacciones fuertes y electromagnéticas preservan las tres simetrías discretas. Un resultado interesante es el *teorema CPT* que establece que cualquier teoría cuántica de campos (lagrangiano hermítico invariante Lorentz) es invariante bajo la acción combinada de CPT ,

$$CPT \mathcal{L}(x) CPT = \mathcal{L}(-x). \quad (3.136)$$

Esto se puede comprobar sobre cualquier combinación hermítica de campos escalares y/o bilineales covariantes contraídos con derivadas y/o campos vectoriales.

^dEn particular, es útil deducir de ellas las propiedades de transformación de los bilineales fermiónicos (2.158) a partir de las de los campos espinoriales.

^ePara un campo vectorial complejo la conjugación de carga no es (3.133) sino $CA^\mu(x)C = -A^{\mu*}(x)$.

Tema 4

Interacciones de campos y diagramas de Feynman

4.1 La matriz S

En el tema anterior hemos cuantizado campos libres. Ahora supondremos interacción entre los campos,

$$H = H_0 + H_{\text{int}} , \quad H_{\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \quad (4.1)$$

(si \mathcal{L}_{int} no contiene derivadas de campos).

Por ejemplo, en QED, $\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ y en la teoría $\lambda\phi^4$, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Supondremos siempre que la constante de acoplamiento es pequeña, lo que significa que podremos tratar la interacción perturbativamente. (En realidad el parámetro relevante para el desarrollo perturbativo en QED es $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137 \ll 1$.)

Nuestro objetivo es hallar la probabilidad de transición entre un estado inicial y otro final en un proceso de colisión o *scattering*. En la *imagen de Schrödinger* los estados dependen del tiempo. Sea $|a(t)\rangle$ la evolución en un tiempo t de $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$, que en un instante inicial t_i es autoestado de un conjunto de observables compatibles cuyos autovalores a sirven para etiquetarlo (e.g. momentos y espines de las partículas incidentes). Sea $|b\rangle$ el estado que en un instante de tiempo t_f , tras la colisión, será autoestado con autovalores b , $|b\rangle \equiv |b(t_f)\rangle$. La amplitud de probabilidad de que $|a\rangle$ evolucione hasta $|b\rangle$ es entonces

$$\langle b|a(t_f)\rangle = \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle . \quad (4.2)$$

Se llama *matriz S* al operador evolución $e^{-iH(t_f-t_i)}$ en el límite $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, donde H es el hamiltoniano de la teoría de campos. La *amplitud de scattering* viene dada por

$$\langle b|S|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle . \quad (4.3)$$

Nótese que si $\langle a|a\rangle = 1$ y $|n\rangle$ es una base completa de estados, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$, tenemos

$$1 = \sum_n |\langle n|S|a\rangle|^2 = \sum_n \langle a|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|a\rangle = \langle a|S^\dagger S|a\rangle , \quad (4.4)$$

lo que significa que $SS^\dagger = 1$, es decir, S es unitaria. Por tanto, la unitariedad de S expresa la conservación de la probabilidad. Conviene escribir

$$\begin{aligned} S &\equiv 1 + iT \\ SS^\dagger &= 1 \end{aligned} \Rightarrow -i(T - T^\dagger) = TT^\dagger. \quad (4.5)$$

Entonces, definiendo $T_{ba} = \langle b|T|a\rangle$ tenemos que

$$-i(T_{ba} - T_{ab}^*) = \sum_n T_{bn}T_{an}^* \Rightarrow 2\text{Im}T_{aa} = \sum_n |T_{an}|^2 \quad (4.6)$$

que conduce al *teorema óptico*, cuyas implicaciones estudiaremos en §7.5.

En la *imagen de Heisenberg* son los operadores y no los estados los que dependen del tiempo, lo cual es más apropiado para la TQC en la que los campos son operadores $\phi(t, \vec{x})$. Los estados $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$ y $|b\rangle \equiv |b(t_f)\rangle$ son en la imagen de Heisenberg $|a\rangle_H = e^{iHt} |a(t)\rangle$ y $|b\rangle_H = e^{iHt} |b(t)\rangle$, independientes del tiempo. Por tanto, definiendo los estados en la imagen de Heisenberg $|a; t_i\rangle = e^{iHt_i} |a\rangle$ y $|b; t_f\rangle = e^{iHt_f} |b\rangle$, la matriz S será

$$\langle b|S|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b; t_f|a; t_i\rangle. \quad (4.7)$$

4.2 La fórmula de reducción de LSZ

Vamos a ver que la matriz S entre estados iniciales y finales de la misma especie etiquetados por sus momentos (supongamos por simplicidad que no tienen índices de espín),

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle, \quad (4.8)$$

donde se sobreentiende que $t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow +\infty$, puede expresarse en función de valores esperados en el vacío de productos de campos *ordenados temporalmente* (que enseguida definiremos). Para ello, notemos en primer lugar que si tenemos un campo escalar real *libre*,

$$\phi_{\text{free}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (4.9)$$

entonces

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} = i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x), \quad \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger = -i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x). \quad (4.10)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{free}}(x) &= i \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{ipx} \right) \\ &= i \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(-ia_{\vec{p}}(E_{\vec{p}} + E_{\vec{k}}) e^{i(k-p)x} + ia_{\vec{p}}^\dagger(E_{\vec{p}} - E_{\vec{k}}) e^{i(k+p)x} \right) \\ &= \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esperamos que

$$\phi(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \phi_{\text{in}}(x), \quad \phi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \phi_{\text{out}}(x), \quad (4.12)$$

donde $\phi_{\text{in}}(x)$ y $\phi_{\text{out}}(x)$ son *campos libres* (antes y después de la interacción, respectivamente) y Z es un factor constante denominado *renormalización de la función de onda* cuyo significado comprenderemos más adelante (véase (4.121)). Por tanto, usando (4.10),

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{in})} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), \quad (4.13)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{out})} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \quad (4.14)$$

Así que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ik_1x} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Conviene escribir esta expresión en forma covariante notando que

$$\begin{aligned} &\sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\ &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | (a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{out})}) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

pues $a_{\vec{k}_1}^{\dagger(\text{out})}$ actúa sobre $\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f |$ destruyendo una partícula en el estado final de momento \vec{k}_1 y como supondremos que en el proceso de *scattering* no hay partículas que se comporten como meros espectadores (ningún \vec{k}_i coincide con un \vec{p}_j) esta operación da cero. Es decir, en realidad estamos calculando la parte iT de la matriz S . Y, por otro lado, a partir de (4.13) y (4.14),

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_{\vec{k}}} (a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}}^{\dagger(\text{out})}) &= iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \right) \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(e^{-ikx} \partial_0 \phi - \phi \partial_0 e^{-ikx} \right) \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x \left[e^{-ikx} \partial_0^2 \phi + \cancel{(\partial_0 e^{-ikx})} \partial_0 \phi - \cancel{\partial_0 \phi} \partial_0 e^{-ikx} - \phi \partial_0^2 e^{-ikx} \right] \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x \left[e^{-ikx} \partial_0^2 \phi - \phi (\nabla^2 - m^2) e^{-ikx} \right] \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} (\partial_0^2 \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi) \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ikx} (\square + m^2) \phi(x), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde en la primera igualdad se ha usado que

$$\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x f(t, \vec{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x f(t, \vec{x}) = - \int d^4x \partial_t f(t, \vec{x}), \quad (4.18)$$

con $f(t, \vec{x}) = -iZ^{-1/2} e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi$; en la antepenúltima se ha sustituido

$$\phi \partial_0^2 e^{-ikx} = \phi (\nabla^2 - m^2) e^{-ikx}, \quad (4.19)$$

ya que $k^2 = m^2$; y en la penúltima se ha usado que

$$\int d^3x \nabla (e^{-ikx} \nabla \phi) = 0 \Rightarrow \int d^3x (\nabla e^{-ikx}) \nabla \phi = - \int d^3x e^{-ikx} \nabla^2 \phi \quad (4.20)$$

de donde

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^3x \nabla^2(e^{-ikx}\phi) = \int d^3x \nabla \left[(\nabla e^{-ikx})\phi + e^{-ikx}\nabla\phi \right] \\
&= \int d^3x \left[(\nabla^2 e^{-ikx})\phi + 2(\nabla e^{-ikx})\nabla\phi + e^{-ikx}\nabla^2\phi \right] \\
&= \int d^3x \left[(\nabla^2 e^{-ikx})\phi - e^{-ikx}\nabla^2\phi \right] \\
&\Rightarrow \int d^3x \phi \nabla^2 e^{-ikx} = \int d^3x e^{-ikx} \nabla^2 \phi . \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos en efecto escribir (4.15) en forma covariante,

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-ik_1x} (\square + m^2) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle . \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Se trata ahora de iterar el procedimiento hasta eliminar todas las partículas de los estados inicial y final, dejando solamente combinaciones de campos actuando sobre el vacío. Para ello, escribamos ahora

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | a_{\vec{p}_1}^{(\text{out})} \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | T\{(a_{\vec{p}_1}^{(\text{out})} - a_{\vec{p}_1}^{(\text{in})})\phi(x)\} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \tag{4.23}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $a_{\vec{p}_1}^{(\text{in})} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle = 0$ y hemos tenido que introducir el *producto ordenado temporal*,

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x) , & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y) , & y^0 < x^0 \end{cases} \tag{4.24}$$

que implica

$$T\{a_{\vec{p}}^{(\text{in})}\phi(x)\} = \phi(x)a_{\vec{p}}^{(\text{in})} , \quad T\{a_{\vec{p}}^{(\text{out})}\phi(x)\} = a_{\vec{p}}^{(\text{out})}\phi(x) . \tag{4.25}$$

A partir de (4.17) tenemos

$$\sqrt{2E_{\vec{p}}}(a_{\vec{p}}^{(\text{out})} - a_{\vec{p}}^{(\text{in})}) = iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ipy} (\square_y + m^2)\phi(y) \tag{4.26}$$

y sustituyendo en (4.23) llegamos a

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \phi(x) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4y e^{ip_1y} (\square_y + m^2) \langle \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | T\{\phi(y)\phi(x)\} | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle . \tag{4.27}
\end{aligned}$$

De donde ya es directo deducir

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= \left(iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \int \left(\prod_{i=1}^m d^4x_i e^{-ik_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^n d^4y_j e^{ip_j y_j} \right)
\end{aligned}$$

$$\times (\square_{x_1} + m^2) \cdots (\square_{y_n} + m^2) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_m) \phi(y_1) \cdots \phi(y_n) \} | 0 \rangle . \quad (4.28)$$

Si definimos ahora la *función de Green de N puntos*,

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \} | 0 \rangle , \quad (4.29)$$

y la escribimos en términos de su transformada de Fourier \tilde{G} ,

$$G(x_1, \dots, x_N) = \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d^4 \tilde{q}_i}{(2\pi)^4} e^{-i\tilde{q}_i x_i} \right) \tilde{G}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N) , \quad (4.30)$$

vemos que (sustituyendo $\square e^{\pm i q x} = -q^2 e^{\pm i q x}$)

$$\begin{aligned} & \left\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n ; t_f \left| \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m ; t_i \right. \right\rangle \\ &= \left(-iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i \frac{d^4 \tilde{k}_i}{(2\pi)^4} e^{-i(\tilde{k}_i + k_i) x_i} (\tilde{k}_i^2 - m^2) \right) \\ & \quad \times \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j \frac{d^4 \tilde{p}_j}{(2\pi)^4} e^{-i(\tilde{p}_j - p_j) y_j} (\tilde{p}_j^2 - m^2) \right) \tilde{G}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \\ &= \left(-iZ^{-1/2} \right)^{m+n} \left(\prod_{i=1}^m (k_i^2 - m^2) \right) \left(\prod_{j=1}^n (p_j^2 - m^2) \right) \tilde{G}(-k_1, \dots, -k_m, p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (4.31)$$

y despejando $\tilde{G}(-k_1, \dots, -k_m, p_1, \dots, p_n)$,

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | iT \left| \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \right. \rangle \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i e^{-ik_i x_i} \right) \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j e^{+ip_j y_j} \right) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_m) \phi(y_1) \cdots \phi(y_n) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ésta es la *fórmula de reducción de LSZ* (Lehmann-Symanzik-Zimmermann). Recuérdese que para una *partícula física* se cumple la relación $p^2 - m^2 = 0$ (se dice que está *on-shell* o sobre su capa de masas). Por tanto, el miembro de la derecha de la fórmula LSZ tendrá polos cuando las partículas entrantes o salientes estén *on-shell*, pero (como veremos y es de esperar) se cancelarán con los polos del prefactor del elemento de matriz S de la izquierda, de modo que la matriz S tiene un valor finito.

4.3 Teoría de perturbaciones

Los campos ϕ de la fórmula LSZ son soluciones de $H = H_0 + H_{\text{int}}$ y por tanto no vienen dados por combinaciones de ondas planas, cuyos coeficientes hemos interpretado como operadores creación y destrucción de partículas a nivel cuántico. Sin embargo, podemos definir el *campo en la imagen de interacción*,

$$\phi_I(t, \vec{x}) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} , \quad (4.33)$$

que es un campo que coincide con el campo $\phi(t, \vec{x})$ de la imagen de Heisenberg solamente en un tiempo de referencia $t = t_0$ y que por definición es un campo libre,

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) , \quad (4.34)$$

cuya evolución con el tiempo viene, por tanto, determinada por el hamiltoniano libre H_0 . Recordemos que un campo en la imagen de Heisenberg evoluciona con el tiempo según

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} . \quad (4.35)$$

Así que, despejando de (4.33)

$$\phi(t_0, \vec{x}) = e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)} \quad (4.36)$$

vemos que $\phi(x)$ y $\phi_I(x)$ están relacionados mediante

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0) , \quad (4.37)$$

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} . \quad (4.38)$$

Vamos ahora a escribir perturbativamente ϕ en función de ϕ_I . Para ello notemos que

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde hemos introducido el *hamiltoniano en la imagen de interacción*^a

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} . \quad (4.40)$$

La solución de la ecuación diferencial (4.39) con la condición de contorno $U(t, t) = 1$ es (compruébese sustituyéndola en la ecuación):

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \\ &\quad + (-i)^3 \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T\{H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3)\} + \dots \\ &= T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Otra forma de escribir U que nos permite deducir propiedades útiles es

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \quad (4.42)$$

^aNótese que en general $[H_0, H] = [H_0, H_{\text{int}}] \neq 0$.

que efectivamente satisface $U(t, t) = 1$ y (4.39) pues

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t') . \end{aligned} \quad (4.43)$$

De aquí se deduce fácilmente que U es unitario y que

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) &= e^{iH_0(t_1-t_0)} e^{-iH(t_1-t_2)} e^{-iH_0(t_2-t_0)} e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_3)} e^{-iH_0(t_3-t_0)} \\ &= U(t_1, t_3) \\ \Rightarrow U(t_1, t_3) U^\dagger(t_2, t_3) &= U(t_1, t_2) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Veamos cómo calcular $\langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle$, donde ya hemos tomado las x_i ordenadas temporalmente ($t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$),

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle &= \langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_0) U^\dagger(t_2, t_0) \phi_I(x_2) U(t_2, t_0) \cdots U^\dagger(t_n, t_0) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, t_3) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, -t) U(-t, t_0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) U(t, t_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_n, -t) \} U(-t, t_0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right\} U(-t, t_0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde en sucesivos pasos hemos introducido $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq -t$ y sustituido

$$U^\dagger(t_1, t_0) = U^\dagger(t, t_0) U(t, t_1) , \quad U(t_n, t_0) = U(t_n, -t) U(-t, t_0) \quad (4.46)$$

$$U(t, t_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_n, -t) = U(t, -t) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right\} . \quad (4.47)$$

Tomando ahora $t_0 = -t$ con $t \rightarrow \infty$ y sustituyendo el adjunto de

$$U(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{i\alpha} | 0 \rangle , \quad e^{i\alpha} = \langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right] \right\} | 0 \rangle \quad (4.48)$$

tenemos finalmente que

$$\boxed{\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle}} \quad (4.49)$$

Desarrollando en serie las exponenciales que aparecen en esta expresión y utilizando el teorema de Wick, según veremos en §4.5, podremos calcular orden a orden en teoría de perturbaciones la amplitud de *scattering* a partir de la fórmula LSZ (4.32) con ayuda de los diagramas de Feynman, que veremos en §4.6.

Conviene notar que la dependencia funcional de \mathcal{H}_I en ϕ_I es la misma que la de \mathcal{H}_{int} en ϕ . Por ejemplo,

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_I &= e^{iH_0(t-t_0)} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 e^{-iH_0(t-t_0)} \\
&= \frac{\lambda}{4!} \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \\
&\quad \times \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \left(e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)} \right) = \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 . \quad (4.51)
\end{aligned}$$

4.4 Propagador de Feynman. Causalidad

Halleemos el *propagador de Feynman*, definido como

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle . \quad (4.52)$$

De ahora *en adelante omitiremos el subíndice I*, pues siempre nos referiremos a campos en la imagen de interacción, que se pueden descomponer en $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ con

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ipx} , \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} . \quad (4.53)$$

Recuérdese que $\phi^+ | 0 \rangle = 0$ y $\langle 0 | \phi^- = 0$. Entonces,^b

$$\begin{aligned}
\text{si } x^0 - y^0 > 0 : \\
T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(x)\phi(y) \\
&= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\
&=: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] , \quad (4.54)
\end{aligned}$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned}
\phi^+(x)\phi^-(y) &= \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \\
&=: \phi^+(x)\phi^-(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\text{si } x^0 - y^0 < 0 : \\
T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(y)\phi(x) \\
&= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^+(y)\phi^-(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^-(x) \\
&=: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(y), \phi^-(x)] , \quad (4.56)
\end{aligned}$$

ya que $:\phi(x)\phi(y): = :\phi(y)\phi(x):$. Por tanto,

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = :\phi(x)\phi(y): + D_F(x-y) \quad (4.57)$$

donde

$$D_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \Delta(x-y) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y-x) \quad (4.58)$$

^bSi $x^0 = y^0$ entonces los campos ya están ordenados temporalmente, así que también se cumple

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] =: \phi(x)\phi(y) : + \overline{\phi(x)\phi(y)}$$

ya que entonces $[\phi^+(x), \phi^-(y)] = [\phi^+(y), \phi^-(x)]$, como puede comprobarse explícitamente en (4.63, 4.64).

y como $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$,

$$\Delta(x - y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)}. \quad (4.59)$$

Así que el propagador de Feynman es

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle = \langle 0 | (: \phi(x)\phi(y) : + D_F(x - y)) | 0 \rangle = D_F(x - y) \quad (4.60)$$

Veamos que podemos escribir (*prescripción de Feynman*)

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \text{con } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (4.61)$$

En efecto,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\varepsilon} \quad (4.62)$$

donde se ha escrito $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2$ pues recordemos que $E_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. Por otro lado, nótese que

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (4.63)$$

$$\Delta(y - x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{+ip(x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (4.64)$$

(en la segunda línea se ha cambiado \vec{p} por $-\vec{p}$). Así que basta demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\varepsilon} = \theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (4.65)$$

donde nótese que, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\varepsilon = \left[p^0 + \left(E_{\vec{p}} - i\frac{\varepsilon}{2E_{\vec{p}}} \right) \right] \left[p^0 - \left(E_{\vec{p}} - i\frac{\varepsilon}{2E_{\vec{p}}} \right) \right] \quad (4.66)$$

Para evaluar la integral sobre p^0 en (4.62) hay que elegir el contorno apropiado sobre el plano de p^0 complejo (figura 4.1). El factor $i\varepsilon$ aleja ligeramente los polos del eje real. El polo $p^0 = E_{\vec{p}}$ se desplaza hacia abajo, $p^0 = E_{\vec{p}} - i\varepsilon/(2E_{\vec{p}})$ y el polo $p^0 = -E_{\vec{p}}$ se desplaza hacia arriba, $p^0 = -E_{\vec{p}} + i\varepsilon/(2E_{\vec{p}})$. Así si $x^0 - y^0 > 0$ conviene cerrar el contorno en el plano inferior, rodeando el polo $p^0 = E_{\vec{p}} - i0^+$ en *sentido horario* de modo que

$$\oint f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\varepsilon} = -2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}} (p^0 - E_{\vec{p}}) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_{\vec{p}})(p^0 - E_{\vec{p}})} = \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (4.67)$$

Y si $x^0 - y^0 < 0$ cerramos por arriba, rodeando $p^0 = -E_{\vec{p}} + i0^+$ en *sentido antihorario*

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) < 0$$

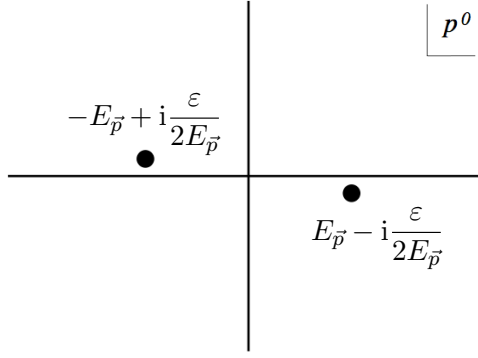


Figura 4.1: Posición de los polos en el plano de p^0 complejo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} = 2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}} (p^0 + E_{\vec{p}}) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_{\vec{p}})(p^0 - E_{\vec{p}})} = \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} . \quad (4.68)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)} \right] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \Delta(x-y) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y-x) , \end{aligned} \quad (4.69)$$

como queríamos demostrar.^c

La expresión (4.61) es conveniente porque de ella se lee directamente el propagador de Feynman en el espacio de momentos, $\tilde{D}_F(p)$,

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}_F(p) \Rightarrow \tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (4.70)$$

Nótese también que $D_F(x-y)$ es una función de Green del operador de Klein-Gordon $(\square_x + m^2)$ pues

$$(\square_x + m^2)D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x-y) \quad (4.71)$$

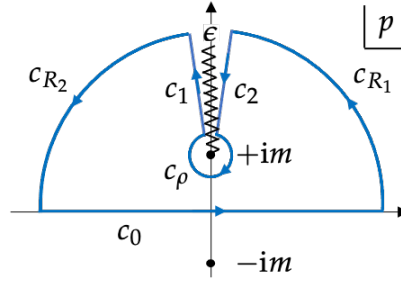
(independientemente de la prescripción adoptada para sortear los polos) lo que justifica por qué hemos llamado función de Green de N puntos a $\langle 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\}|0\rangle$. Nótese además que el propagador de Feynman no es la única función de Green del operador de Klein-Gordon, pues cambiando la prescripción se obtienen otras.

Causalidad

El propagador de Feynman $D_F(x-y)$ expresa la amplitud de probabilidad de que una partícula que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o que se propague y a x , si $x^0 - y^0 < 0$. En efecto,

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \Delta(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \langle 0|\phi^+(x)\phi^-(y)|0\rangle . \quad (4.72)$$

^cAhora ya entendemos por qué hemos introducido el factor 2 en la normalización covariante relativista de los estados.

Figura 4.2: Contorno para integrar $\Delta(x - y)$ en un intervalo espacial.

Veamos que, aparentemente, surge un problema: la probabilidad de propagación de una partícula desde y hasta x con $(x - y)^2 < 0$ (*intervalo espacial*), es decir, fuera de su cono de luz no es cero sino que cae exponencialmente para distancias grandes. En efecto, en tal caso podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (0, \vec{r})$ y entonces (aquí llamaremos $p \equiv |\vec{p}|$ y $r \equiv |\vec{r}|$)

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{2E_{\vec{p}}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr \cos\theta}}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = -\frac{i}{(2\pi)^2 2r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Podemos evaluar esta integral en el plano de p complejo siguiendo el contorno de la figura 4.2 (el integrando tiene *cortes de rama* que comienzan en los polos $p = \pm im$). Aplicando el teorema de los residuos:

$$0 = \left(\int_{c_0} + \int_{c_{R_1}} + \int_{c_{R_2}} + \int_{c_\rho} + \int_{c_1} + \int_{c_2} \right) dp f(p). \quad (4.74)$$

En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ las integrales sobre c_ρ , c_{R_1} y c_{R_2} se anulan.^d Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \lim_{\substack{\varepsilon, \rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{c_0} dp f(p) = - \lim_{\substack{\varepsilon, \rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{c_1} + \int_{c_2} \right) dp f(p) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2r} \left(\int_{im}^{i\infty} dp pe^{ipr} (p^2 + m^2)^{-1/2} + \int_{i\infty}^{im} dp pe^{ipr} (p^2 + m^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}2\pi i} \right) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2r} 2 \int_{im}^{i\infty} dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde el factor $e^{-\frac{1}{2}2\pi i} = -1$ tiene en cuenta que la segunda integral se hace al otro lado del corte de rama,^e y se han intercambiado sus límites de integración cambiando el signo global. Conviene ahora hacer el cambio de variable $p = i\rho$,

$$\Delta(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^2 2r} 2i^2 \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{i\sqrt{\rho^2 - m^2}} = -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}}, \quad (4.76)$$

^dLa integral sobre c_ρ se anula cuando $\rho \rightarrow 0$ porque $\lim_{p \rightarrow im} (p - im)f(p) = 0$.

^eRecordemos que $\log z = \log|z| + i \arg(z)$ tiene una discontinuidad de $2\pi i$ al cruzar el corte de rama y que podemos escribir $(p^2 + m^2)^{-1/2} = \exp\{-\frac{1}{2} \log(p^2 + m^2)\}$.

y finalmente el cambio $\rho = mt$,

$$\Delta(x-y) = -\frac{m}{4\pi^2 r} \int_1^\infty dt \frac{te^{-mrt}}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) \xrightarrow{mr \gg 1} -\frac{m}{4\pi^2 r} \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}, \quad (4.77)$$

donde se ha usado el límite de la función de Bessel modificada K_1 .

Este resultado parece indicarnos que se viola causalidad. Sin embargo no es así. En mecánica cuántica *lo importante es si conmutan dos observables medidos en x e y separados espacialmente*, i.e. con $(x-y)^2 < 0$. En tal caso ambas medidas no están correlacionadas y por tanto no pueden afectar una a la otra. En la práctica, el principio de causalidad se preserva siempre que *se anule el conmutador de dos campos evaluados en dos puntos separados por un intervalo espacial*. Veamos que en efecto, en ese caso, el conmutador se anula.

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left[\left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right), \left(a_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left\{ e^{-i(px-qy)} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{i(px-qy)} [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}] \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} = \Delta(x-y) - \Delta(y-x), \end{aligned} \quad (4.78)$$

donde se ha usado $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$. Ahora, si $(x-y)^2 < 0$ podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x-y) = (0, \vec{r})$ y entonces $(y-x) = (0, -\vec{r})$, y como hemos visto que para puntos separados un intervalo espacial $\Delta(x-y)$ solamente depende del módulo de \vec{r} (4.77) tenemos que $\Delta(x-y) = \Delta(y-x)$ y

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{si } (x-y)^2 < 0, \quad (4.79)$$

como queríamos demostrar.^f En este punto es conveniente hacer varios comentarios importantes.

Para un campo escalar complejo el propagador se define como

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.80)$$

que expresa la amplitud de probabilidad de que una *partícula* que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o bien la amplitud de probabilidad de que una *antipartícula* que se crea en x se propague libremente hasta y donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 < 0$.

Recordemos que si el campo es real, partícula y antipartícula coinciden.

Para entender mejor el significado de las dos contribuciones al propagador de Feynman (4.58) que se cancelan en (4.78) cuando $(x-y)^2 < 0$, hallemos el conmutador análogo para campos escalares complejos,

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left[\left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right), \left(b_{\vec{q}} e^{-iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy} \right) \right]$$

^fSi $(x-y)^2 > 0$ (*intervalo temporal*) podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x-y) = (t, 0)$ y entonces

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_{\vec{p}}t}}{2E_{\vec{p}}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{-i\sqrt{p^2+m^2}t}}{2\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \sim e^{-imt} \quad (t \rightarrow \infty)$$

así que $\Delta(x-y) - \Delta(y-x) \neq 0$ en este caso.

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left\{ e^{-i(px-ty)} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] + e^{i(px-ty)} [b_{\vec{p}}^\dagger, b_{\vec{q}}] \right\} \\
&= \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \Delta(x-y) - \Delta(y-x) \quad (4.81)
\end{aligned}$$

donde vemos que $\Delta(x-y)$ es la amplitud de probabilidad de que una partícula creada en y se propague hasta x mientras que $\Delta(y-x)$ es la amplitud de probabilidad de que una antipartícula creada en x se propague hasta y . Si no existieran las antipartículas se violaría el principio de causalidad! pues ambas contribuciones son necesarias y gracias a que tienen valores idénticos el conmutador (4.78) (o el (4.81) si el campo escalar es complejo) puede anularse fuera del cono de luz impidiendo correlaciones entre observaciones no conectadas causalmente.

Finalmente, nótese que en lo anterior ha sido fundamental que los campos escalares satisfacen relaciones de conmutación y no de anticonmutación, pues de lo contrario el principio de causalidad no se habría preservado. Puede verse que los campos fermiónicos han de anticonmutar por la misma razón. Se pone de manifiesto entonces la estrecha conexión entre el teorema espín-estadística y la causalidad a nivel cuántico.

4.5 Teorema de Wick

Hemos visto que el producto ordenado temporal de dos campos en la imagen de interacción es $T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + D_F(x_1 - x_2)$. Queremos ahora hallar el producto ordenado temporal de n campos $\phi_i \equiv \phi(x_i)$. El teorema de Wick, que demostraremos a continuación, establece que

$$T\{\phi_1 \cdots \phi_n\} = : \phi_1 \cdots \phi_n : + \left(\begin{array}{l} \text{todas las combinaciones de orden normal} \\ \text{y contracciones de dos campos} \end{array} \right) \quad (4.82)$$

donde *contracciones de dos campos* $\phi(x_i)$ y $\phi(x_j)$ significa

$$\overline{\phi(x_i)\phi(x_j)} = D_F(x_i - x_j), \quad \text{o abreviadamente } \overline{\phi_i\phi_j} = D_{ij}, \quad (4.83)$$

y “todas las combinaciones de orden normal y contracciones de dos campos” significa, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} &= : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \left(\overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_3}\phi_2\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_4}\phi_2\phi_3 + \overline{\phi_2\phi_3}\phi_1\phi_4 \right. \\
&\quad \left. + \overline{\phi_2\phi_4}\phi_1\phi_3 + \overline{\phi_3\phi_4}\phi_1\phi_2 + \overline{\phi_1\phi_2}\overline{\phi_3\phi_4} + \overline{\phi_1\phi_3}\overline{\phi_2\phi_4} + \overline{\phi_1\phi_4}\overline{\phi_2\phi_3} \right) : , \quad (4.84)
\end{aligned}$$

donde

$$: \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : = \overline{\phi_1\phi_3}\phi_2\phi_4 := D_{13} : \phi_2\phi_4 : , \quad : \overline{\phi_1\phi_2}\overline{\phi_3\phi_4} : = D_{12}D_{34}, \quad \text{etc.} \quad (4.85)$$

Por consiguiente, al valor esperado en el vacío del producto ordenado temporal de campos sólo contribuyen los términos en los que todos los campos están contraídos, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle &= \overline{\phi_1\phi_2}\overline{\phi_3\phi_4} + \overline{\phi_1\phi_3}\overline{\phi_2\phi_4} + \overline{\phi_1\phi_4}\overline{\phi_2\phi_3} \\
&= D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \quad (4.86)
\end{aligned}$$

y el valor esperado en el vacío del producto ordenado temporal de un número impar de campos es cero.

Para demostrar el teorema de Wick se procede por inducción. Ya sabemos que se cumple para $n = 2$. Supongamos que es cierto para $n - 1$ campos. Entonces, si ponemos los campos ya ordenados temporalmente ($x_1^0 \geq \dots \geq x_n^0$),

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} &= \phi_1\phi_2\cdots\phi_n = \phi_1 T\{\phi_2\cdots\phi_n\} \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) : \left\{ \phi_2\cdots\phi_n + \left(\begin{array}{l} \text{todas las contracciones de dos} \\ \text{campos que no involucren a } \phi_1 \end{array} \right) \right\} : . \end{aligned} \quad (4.87)$$

Por otro lado,

$$\phi_1^- : \{\phi_2\cdots\phi_n\} : = : \{\phi_1^-\phi_2\cdots\phi_n\} : \quad (4.88)$$

pues ϕ_1^- introduce un a^\dagger a la izquierda, que ya está ordenado normal, y

$$\begin{aligned} \phi_1^+ : \{\phi_2\cdots\phi_n\} : &= : \{\phi_2\cdots\phi_n\} : \phi_1^+ + [\phi_1^+, : \{\phi_2\cdots\phi_n\} :] \\ &= : \{\phi_1^+\phi_2\cdots\phi_n\} : + : \left(\overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\cdots + \dots + \left(\begin{array}{l} \text{contracciones simples} \\ \text{que involucren a } \phi_1 \end{array} \right) \right) : \end{aligned} \quad (4.89)$$

Comprobemos esto último con un ejemplo:

$$\begin{aligned} [\phi_1^+, : \phi_2\phi_3 :] &= [\phi_1^+, \phi_2^+\phi_3^+ + \phi_2^-\phi_3^- + \phi_2^-\phi_3^+ + \phi_3^-\phi_2^+] \\ &= \phi_2^+[\phi_1^+, \phi_3^+]^{\overline{=0}} + [\phi_1^+, \phi_2^+]^{\overline{=0}}\phi_3^+ + \phi_2^-[\phi_1^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3^- + \phi_2^-[\phi_1^+, \phi_3^+]^{\overline{=0}} \\ &\quad + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3^+ + \phi_3^-[\phi_1^+, \phi_2^+]^{\overline{=0}} + [\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_2^+ \\ &= \phi_2^-\overline{\phi_1\phi_3} + \overline{\phi_1\phi_3}\phi_2^+ + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3^-} + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3^+} = : (\overline{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}) : \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde se ha usado $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ y $\overline{\phi_i\phi_j} = [\phi_i^+, \phi_j^-]$, pues $x_i^0 \geq x_j^0$. Por tanto,

$$(\phi_1^+ + \phi_1^-) : \{\phi_2\cdots\phi_n\} : = : \phi_1\phi_2\cdots\phi_n : + : \left(\begin{array}{l} \text{contracciones simples} \\ \text{que involucren a } \phi_1 \end{array} \right) : . \quad (4.91)$$

Si ahora repetimos el procedimiento para $(\phi_1^+ + \phi_1^-) : \left(\begin{array}{l} \text{todas las contracciones de dos} \\ \text{campos que no involucren a } \phi_1 \end{array} \right) :$ obtendremos los términos con contracciones dobles, triples, etc., que faltan para demostrar (4.82) a partir de (4.87) y (4.91).

4.6 Diagramas de Feynman. Reglas de Feynman

La fórmula de reducción de LSZ nos permite escribir la matriz S en términos de valores esperados en el vacío de productos de campos en la imagen de interacción ordenados temporalmente,

$$\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle , \quad (4.92)$$

que se calculan orden a orden en teoría de perturbaciones (TP), desarrollando en serie la exponencial.

A orden cero (ausencia de interacciones) sólo necesitamos $\langle 0 | T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\} | 0 \rangle$, que, aplicando el teorema de Wick, involucra productos de propagadores de partículas

entre puntos espaciotemporales distintos $x_i \neq x_j$, lo que nos da una imagen física muy clara que admite una representación gráfica sencilla:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle &= \overbrace{\phi_1\phi_2} = D_{12} \\ &= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle &= \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \\ &= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ \\ 3 \quad 4 \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \bullet \\ \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \bullet \\ \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 4 \end{array} \end{aligned} \quad (4.94)$$

y así sucesivamente. Éstos son los llamados *diagramas de Feynman en el espacio de posiciones*.

A partir del primer orden en TP obtendremos *interacciones locales* que involucran productos de campos en el mismo punto espaciotemporal x , que también tienen una representación gráfica sencilla en forma de diagramas de Feynman, como veremos a continuación. El cálculo perturbativo es muy complejo pero puede sistematizarse con ayuda de *reglas de Feynman*. La mejor manera de entender todo esto es con un ejemplo sencillo.

Consideremos el *scattering* $2 \rightarrow 2$ (dos partículas en el estado inicial y dos en el final) en la teoría de campos escalares autointeractuantes $\lambda\phi^4$. La fórmula LSZ en función de campos en la imagen de interacción es:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2} \prod_{j=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \frac{\langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \exp\left[-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\left\{\exp\left[-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x)\right]\right\}|0\rangle} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Orden cero. En ausencia de interacción el denominador de (4.95) es 1. El numerador es

$$\begin{aligned} N_0 &= \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} (D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}) \\ &= \int d^4x d^4X d^4y d^4Y e^{i(p_1+p_2)X + i(p_1-p_2)\frac{x}{2} - i(k_1+k_2)Y - i(k_1-k_2)\frac{y}{2}} D_F(x)D_F(y) \\ &\quad + \int d^4x d^4X d^4y d^4Y e^{i(p_1-k_1)X + i(p_1+k_1)\frac{x}{2} + i(p_2-k_2)Y + i(p_2+k_2)\frac{y}{2}} D_F(x)D_F(y) \\ &\quad + \int d^4x d^4X d^4y d^4Y e^{i(p_1-k_2)X + i(p_1+k_2)\frac{x}{2} - i(k_1-p_2)Y - i(k_1+p_2)\frac{y}{2}} D_F(x)D_F(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \\
 &+ (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_1) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \\
 &+ (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k_1) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \tag{4.96}
 \end{aligned}$$

donde en el primer sumando de la tercera igualdad hemos hecho el cambio de variables

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 - x_2, & y &= x_3 - x_4 & \Rightarrow & x_1 = X + \frac{x}{2}, & x_3 = Y + \frac{y}{2} \\
 X &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & Y &= \frac{x_3 + x_4}{2} & \Rightarrow & x_2 = X - \frac{x}{2}, & x_4 = Y - \frac{y}{2} \\
 dx_1 dx_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial X} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial X} \end{vmatrix} dx dX = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} dx dX = dx dX, \text{ etc. ,}
 \end{aligned}$$

el segundo sumando es análogo al primero intercambiando $x_2 \leftrightarrow x_3$ lo que implica $p_2 \leftrightarrow -k_1$; y el tercer sumando es análogo al primero intercambiando $x_2 \leftrightarrow x_4$ lo que implica $p_2 \leftrightarrow -k_2$. En (4.96) hay términos con solamente dos polos, que no son suficientes para cancelar los cuatro polos del miembro de la izquierda de (4.95), así que

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = 0 \text{ a orden cero.} \tag{4.97}$$

Este resultado (amplitud nula) es general para *diagramas disconexos* (aquéllos en los que algún punto externo no está conectado a los demás).

Primer orden. Desarrollando la exponencial del numerador vemos que a $\mathcal{O}(\lambda)$ obtenemos productos de campos evaluados en el mismo punto espaciotemporal, lo que, aplicando el teorema de Wick, da lugar a un *vértice* de interacción. La única forma de obtener diagramas conexos consiste en contraer cada $\phi(x_i)$ con $\phi(x)$:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi^4(x) \} | 0 \rangle_c &= 4! : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x : \\
 &= \text{Diagrama de Feynman} \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

Hay 4! posibles combinaciones de tales contracciones, todas ellas idénticas: $\phi(x_1)$ con uno de los 4 $\phi(x)$, $\phi(x_2)$ con uno de los 3 $\phi(x)$ restantes, $\phi(x_3)$ con uno de los 2 $\phi(x)$ restantes y $\phi(x_4)$ con el $\phi(x)$ restante. El factor 4! resultante cancela el 4! que hemos introducido en el denominador de la constante de acoplamiento (ahora vemos su conveniencia) de modo que, a primer orden, la única contribución relevante al numerador de la amplitud $2 \rightarrow 2$ viene dada por el siguiente *diagrama de Feynman en el espacio de momentos*:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama de Feynman} &= \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
 &\times \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) 4! \int d^4 x D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\lambda \int \prod_{i=1}^4 d^4 y_i \, d^4 x \, e^{i(p_1+p_2-k_1-k_2)x} e^{i(p_1 y_1+p_2 y_2-k_1 y_3-k_2 y_4)} D_F(y_1) D_F(y_2) D_F(y_3) D_F(y_4) \\
&= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \quad (4.99)
\end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de variables $y_i = x_i - x$.

Hallemos ahora el denominador $\langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \, \phi^4(x) \right] \right\} |0\rangle$, que orden a orden está compuesto por diagramas desconectados y sin puntos externos formados por combinaciones de *diagramas vacío-vacío*:

$$V_i \in \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrama 1} , \quad \text{diagrama 2} , \quad \text{diagrama 3} , \quad \text{diagrama 4} , \quad \dots \end{array} \right\} \quad (4.100)$$

Supongamos uno de estos diagramas con n_i piezas de cada tipo V_i . Si llamamos también V_i al valor de la pieza de tipo i , es fácil convencerse de que ese tipo de diagramas contribuye al denominador con $\sum_{n_i} \frac{V_i^{n_i}}{n_i!}$, donde el $n_i!$ proviene de la simetría de intercambio de n_i copias de V_i . Para comprobar esto, consideremos sólo un tipo V_i , y que éste sea el primero de los diagramas vacío-vacío listados en (4.100). Entonces

$$\begin{array}{c} \text{diagrama 1} \end{array} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \, \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \times 3 = \frac{3}{4!} V = \frac{1}{8} V \equiv V_i \quad (4.101)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagrama 2} \end{array} = \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 x \, \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \int d^4 y \, \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} \times 3^2 = \frac{1}{2!} V_i^2 \quad (4.102)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagrama 3} \end{array} = \frac{1}{3!} V_i^3 \quad (4.103)$$

y así sucesivamente. La contribución total al denominador será por tanto,

$$\prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{V_i^{n_i}}{n_i!} \right) = \prod_i e^{V_i} = \exp \left\{ \sum_i V_i \right\} , \quad (4.104)$$

que viene dada por la exponencial de la suma de todos los posibles diagramas vacío-vacío.

Nótese que en el numerador tendremos, por cada diagrama conexo, la contribución de

un número arbitrario de diagramas vacío-vacío. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \\
 = & \text{Diagram 1} \times \left(1 + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.105}$$

Así que la contribución general al numerador puede escribirse como

$$\sum (\text{conexos}) \times \exp \left\{ \sum_i V_i \right\} . \tag{4.106}$$

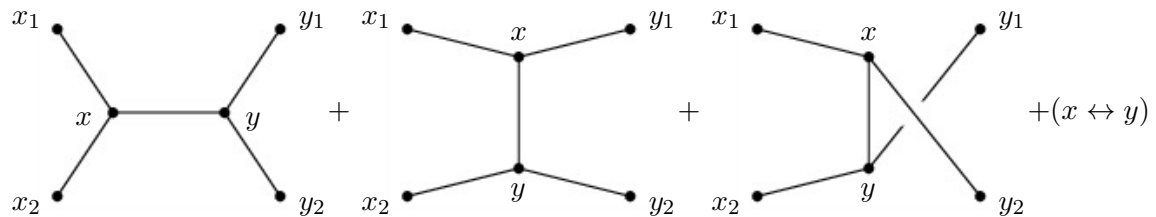
Por tanto, las contribuciones vacío-vacío a numerador y denominador de la fórmula LSZ se cancelan y podemos concluir que para hallar la amplitud de *scattering* $m \rightarrow n$ basta con calcular, orden a orden, la suma de diagramas conexos con $m + n$ puntos externos.

Usando estos resultados e ignorando por el momento los factores Z (pronto veremos que $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$), podemos calcular la amplitud de *scattering* $2 \rightarrow 2$ a primer orden, que se deduce de (4.95) y (4.99),

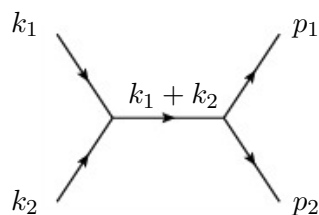
$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 : \quad \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) . \tag{4.107}$$

Ya podríamos escribir algunas *reglas* que nos permiten obtener diagramáticamente la amplitud de *scattering*, pero aún no podemos deducirlas todas ya que todavía no nos hemos encontrado con diagramas con líneas internas ni *loops*.

Para ilustrar el caso de diagramas con *líneas internas*, vamos a suponer que nuestro proceso $2 \rightarrow 2$ se debe a una interacción distinta, $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x)$. Si buscamos los diagramas conexos a orden más bajo que den una contribución no nula encontramos que la primera contribución es a $\mathcal{O}(\lambda^2)$ y viene dada por los siguientes diagramas:



Calculemos en detalle la contribución del primero (se incluye la suma del mismo intercambiando x y y) que representaremos mediante el correspondiente diagrama de Feynman en el espacio de momentos:



$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2)} \\
 &\quad \times \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{3!} \right)^2 (3!)^2 \int d^4x d^4y \underbrace{D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x - y) D_F(y - y_1) D_F(y - y_2)}_{\substack{\text{---} \\ \text{:}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\text{:}}} \\
 &= (-i\lambda)^2 \int d^4\tilde{x}_1 d^4\tilde{x}_2 d^4\tilde{y}_1 d^4\tilde{y}_2 d^4x d^4y e^{i(p_1 + p_2)x - i(k_1 + k_2)y + i(p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 - k_1\tilde{y}_1 - k_2\tilde{y}_2)} \\
 &\quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) D_F(\tilde{y}_1) D_F(\tilde{y}_2) D_F(x - y) \\
 &= (-i\lambda)^2 \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \int d^4\tilde{x} d^4y e^{i(p_1 + p_2)\tilde{x} + i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} D_F(\tilde{x}) \\
 &= (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}_F(k_1 + k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \quad (4.108)
 \end{aligned}$$

donde el factor $(3!)^2$ proviene de todas las contracciones de Wick equivalentes a la dada y el factor 2 del intercambio de x con y . También se ha hecho el cambio de variables $\tilde{x}_i = x_i - x$, $\tilde{y}_i = y_i - y$ y posteriormente $\tilde{x} = x - y$. Como en (4.99), hemos obtenido un factor $(-i\lambda)$ por cada vértice, un factor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ que expresa la conservación del cuadrimento y el producto de los cuatro propagadores de las patas externas que se cancelarán al despejar la amplitud de *scattering* de la fórmula LSZ. Vemos que además hay que introducir el *propagador de cada línea interna*. Nótese finalmente que el factor 3! en el denominador de la constante de acoplamiento se ha cancelado al sumar todas las contracciones de Wick equivalentes. Por tanto, sumando los tres diagramas en el espacio de momentos

$$\quad (4.109)$$

obtenemos

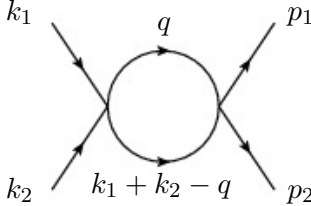
$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 : \quad \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle &= (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
 &\quad \times [\tilde{D}_F(k_1 + k_2) + \tilde{D}_F(k_1 - p_1) + \tilde{D}_F(k_1 - p_2)] + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (4.110)
 \end{aligned}$$

Nótese que las integrales sobre las coordenadas de los puntos de interacción implican la *conservación del cuadrimento en cada vértice*.

Veamos ahora qué ocurre cuando hay *loops* en los diagramas. Volvamos a la teoría $\lambda\phi^4$. Para hallar la contribución de $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a la amplitud $2 \rightarrow 2$ necesitamos calcular los siguientes diagramas conexos:

$$\quad + (x \leftrightarrow y)$$

En todos aparece un *loop* formado por dos líneas internas que comparten punto inicial y final.⁸ Miremos con detalle la contribución del primero de estos diagramas (incluyendo la suma del mismo intercambiando x e y) que representaremos mediante el siguiente diagrama de Feynman en el espacio de momentos:

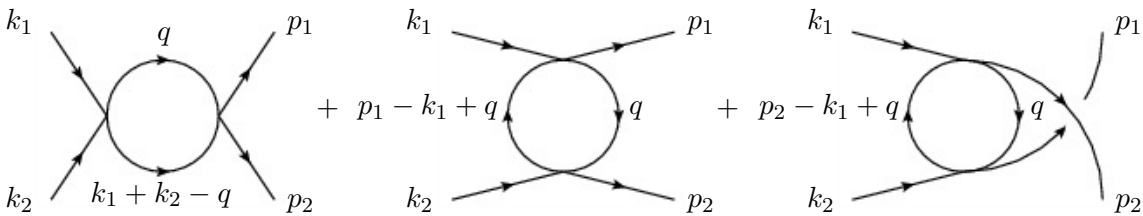


$$\begin{aligned}
&= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2)} \\
&\quad \times \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \times (4 \times 3)^2 \times 2 \times 2 \int d^4x d^4y \underbrace{D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F^2(x - y) D_F(y - y_1) D_F(y - y_2)}_{:\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y):} \\
&= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4\tilde{x}_1 d^4\tilde{x}_2 d^4\tilde{y}_1 d^4\tilde{y}_2 d^4x d^4y e^{i(p_1 + p_2)x - i(k_1 + k_2)y + i(p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 - k_1\tilde{y}_1 - k_2\tilde{y}_2)} \\
&\quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) D_F(\tilde{y}_1) D_F(\tilde{y}_2) D_F^2(x - y) \\
&= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \int d^4\tilde{x} d^4y e^{i(p_1 + p_2)\tilde{x} + i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} D_F^2(\tilde{x}) \\
&= \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(k_1) \tilde{D}_F(k_2) \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \tag{4.111}
\end{aligned}$$

donde hemos sustituido

$$\begin{aligned}
\int d^4\tilde{x} e^{i(k_1 + k_2)\tilde{x}} D_F^2(\tilde{x}) &= \int d^4\tilde{x} e^{i(k_1 + k_2)\tilde{x}} D_F(\tilde{x}) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\tilde{x}} \tilde{D}_F(q) \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \tilde{D}_F(q) . \tag{4.112}
\end{aligned}$$

Vemos que, además del habitual factor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ de la conservación del cuadrimomento, el factor $(-i\lambda)$ por cada vértice y el propagador de cada línea interna, aparece una integral sobre el cuadrimomento del loop dividida por $(2\pi)^4$. Obtenemos así mismo un *factor de simetría* $\frac{1}{2}$ procedente del recuento de factores $1/4!$ y contracciones de Wick equivalentes (estos factores de simetría son frecuentemente una fuente de errores en el cálculo). También aparecen los propagadores de cada pata externa en el espacio de momentos cuyos polos se cancelarán al despejar la amplitud de la fórmula LSZ. Repitiendo el procedimiento para los tres diagramas en el espacio de momentos:



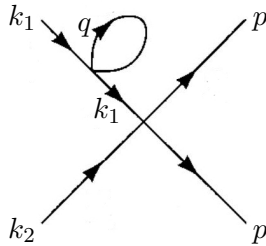
⁸Un *loop* también puede provenir de una línea interna que empieza y acaba en el mismo punto. Véase e.g. el diagrama de (4.114).

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\lambda}{4!} \phi^4 : \\ \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &\times \left\{ -i\lambda + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \right. \\ &\quad + \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 - p_1 - q) \\ &\quad \left. + \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(k_1 - p_2 - q)] \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3) . \end{aligned} \quad (4.113)$$

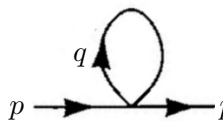
Si evaluamos las integrales del *loop* veremos que son *divergentes en el ultravioleta*, pues tienden a infinito cuando q se hace grande. Para dotar de sentido a esta corrección infinita a la predicción que habíamos obtenido a orden más bajo en TP tendremos que *renormalizar* la teoría. Abordaremos este problema en el Tema 7.

Hasta ahora hemos ignorado los factores Z (renormalización de la función de onda) que aparecen en la fórmula LSZ. También hemos ignorado diagramas en los que el *propagador de alguna de las patas externas* sufre una corrección como, por ejemplo:^h



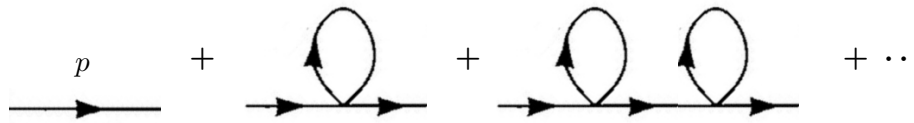
$$\begin{aligned} &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) (-i\lambda) \tilde{D}_F(k_2) \tilde{D}_F(p_1) \tilde{D}_F(p_2) \\ &\times \tilde{D}_F(k_1) \times \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \times \tilde{D}_F(k_1) \end{aligned} \quad (4.114)$$

que, aparte de la corrección debida al *loop* (que resulta ser divergente en el ultravioleta), tiene un polo doble en $\tilde{D}_F(k_1)$ que no se cancela con el correspondiente polo simple de la fórmula LSZ, y por tanto nos da infinito. Nótese que la corrección a la pata externa factoriza y se puede leer directamente del siguiente diagrama



$$= \tilde{D}_F(p) (-iB) \tilde{D}_F(p) , \quad -iB = \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} . \quad (4.115)$$

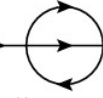
Podemos resumir todas las correcciones de este tipo al propagador,



$$\begin{aligned} &= \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p) (-iB) \tilde{D}_F(p) + \tilde{D}_F(p) (-iB) \tilde{D}_F(p) (-iB) \tilde{D}_F(p) + \dots \\ &= \tilde{D}_F(p) \left[1 + (-iB \tilde{D}_F(p)) + (-iB \tilde{D}_F(p))^2 + \dots \right] \\ &= \tilde{D}_F(p) \frac{1}{1 + iB \tilde{D}_F(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{B}{p^2 - m^2}} \right) = \frac{i}{p^2 - m^2 - B} . \end{aligned} \quad (4.116)$$

^hEn adelante omitiremos el $i\epsilon$ de la prescripción de Feynman, que asumiremos implícitamente.

Vemos que el efecto neto de este tipo de correcciones consiste en desplazar la masa de m^2 a $m^2 + B$. Podemos añadir también otras correcciones, como por ejemplo la corrección

de $\mathcal{O}(\lambda^2)$  (que, a diferencia de la anterior, depende de p^2) y todas las

demás. Para ello, sumamos todos los diagramas con dos patas externas que sean *one-particle irreducible* (aquellos diagramas que no se separan en dos si cortamos sólo una línea interna) y llamamos $-iM^2(p^2)$ a la contribución de todos los diagramas 1PI (eliminando los propagadores externos),

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = -iM^2(p^2) . \quad (4.117)$$

Ahora podemos resumir *todas* las correcciones al propagador por el mismo procedimiento de antes. Llamemos m_0 al parámetro de masa que hemos introducido en el lagrangiano. Entonces el propagador completo (a todo orden en TP) es

$$\begin{aligned} \text{---} \bullet \text{---} &= \text{---} \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} [-iM^2(p^2)] \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left[1 + \frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2} + \left(\frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{1}{1 - \frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2}} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} . \end{aligned} \quad (4.118)$$

La masa física m se define como el polo del propagador completo,

$$p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0 . \quad (4.119)$$

Desarrollando en serie alrededor de $p^2 = m^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) &= p^2 - m_0^2 - M^2(m^2) - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots \\ &= (p^2 - m^2) \left(1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right) \quad (\text{cerca de } p^2 = m^2) . \end{aligned} \quad (4.120)$$

Por tanto,

$$\text{---} \bullet \text{---} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{regular cerca de } p^2 = m^2 \quad (4.121)$$

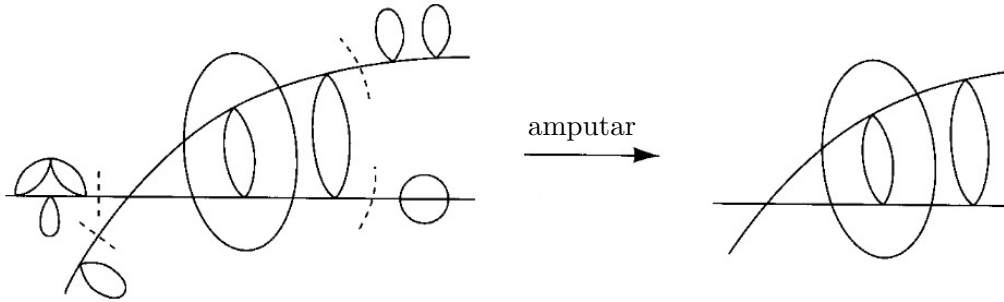
donde

$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2) , \quad Z = \left(1 - \frac{dM^2}{dp^2} \Big|_{p^2=m^2} \right)^{-1} . \quad (4.122)$$

Este residuo Z es el mismo factor que introdujimos en (4.12) para dar cuenta de la renormalización del campo debido a las interacciones. En el Tema 7 veremos que relaciona el

campo desnudo con el campo renormalizado. Vemos en particular que la primera corrección a $Z = 1$ es de orden λ^2 , como habíamos anticipado, pues la corrección de orden λ al propagador (4.115) no depende de p^2 .

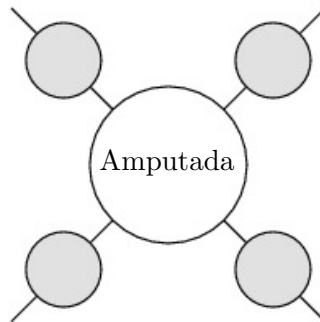
En vista de lo que sucede con las correcciones a las patas externas, conviene definir *diagramas amputados* como aquéllos en los que quitamos todos los subdiagramas asociados a las patas externas que se pueden separar cortando sólo una línea. Es decir, eliminamos el propagador completo de cada pata externa. Por ejemplo,



Entonces la función de cuatro puntos de *campos interactuantes*

$$\int \prod_{i=1}^2 d^4x_i \prod_{j=1}^2 d^4y_j e^{i(\sum_i p_i x_i - \sum_j k_j y_j)} \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | 0 \rangle_c \quad (4.123)$$

tiene la forma diagramática siguiente



Y en general, usando (4.121) podemos reescribir la fórmula LSZ (4.32) como

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle = (\sqrt{Z})^{m+n} \text{Amp.} \quad (4.124)$$

Con esto ya podemos dar las reglas de Feynman para campos escalares reales en el espacio de momentos. Consideremos que la interacción de los campos es de la forma $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{N!} \phi^N$. Entonces para calcular la amplitud del proceso de *scattering* de $m \rightarrow n$ partículas:

1. Dibujar todos los diagramas conexos amputados con m patas entrantes y n salientes unidos en vértices de N patas.

2. Imponer conservación del cuadrimomento en cada vértice.
3. Asociar un factor $(-i\lambda)$ a cada vértice.
4. Asociar a cada línea interna de momento p un factor $\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$.
5. Integrar sobre los cuadrimomentos q no fijados por conservación del cuadrimomento (uno por cada *loop*) con medida $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
6. Multiplicar por el factor de simetría correspondiente.
7. La suma de las contribuciones de todos los diagramas de Feynman conduce a la llamada *amplitud invariante* $i\mathcal{M}(\vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rightarrow \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$ que se relaciona con el elemento de matriz $S = 1 + iT$ mediante

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i p_i - \sum_j k_j \right) i\mathcal{M}, \quad (4.125)$$

donde $i\mathcal{M}$ incluye los factores $(\sqrt{Z})^{m+n}$, que son irrelevantes en cálculos a orden más bajo en teoría de perturbaciones, pero son importantes para hallar correcciones de orden superior.

Comentario sobre la virtualidad de los estados intermedios

Consideremos un diagrama con líneas internas, como por ejemplo (4.108). La fórmula LSZ exige que pongamos las partículas entrantes y salientes sobre su capa de masas,

$$k_1^2 = k_2^2 = p_1^2 = p_2^2 = m^2 \quad (4.126)$$

y además impone conservación del cuadrimomento en los vértices, lo que significa que la partícula intermedia que se propaga entre dos vértices estará *off-shell*,

$$p_{\text{interm}}^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(k_1 k_2) = 2(m^2 + k_1 k_2). \quad (4.127)$$

Si elegimos, por ejemplo, el sistema de referencia centro de masas de las dos partículas entrantes,

$$\begin{aligned} k_1 = (E, 0, 0, k), \quad k_2 = (E, 0, 0, -k) &\Rightarrow k_1 k_2 = E^2 + k^2 = m^2 + 2k^2 \\ &\Rightarrow p_{\text{interm}}^2 = 4(m^2 + k^2) \neq m^2. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Es fácil comprobar que el p_{interm}^2 de las líneas internas de los otros dos diagramas en (4.109) es incluso negativo. Así que en TQC los estados intermedios que se propagan entre vértices de interacción son *partículas virtuales*, i.e. están fuera de su capa de masas.

Reglas de Feynman para fermiones

Los campos fermiónicos aparecerán en los hamiltonianos de interacción por parejas y formando parte de bilineales covariantes (2.158). Los campos fermiónicos satisfacen relaciones

de anticonmutación (3.39) que nos han obligado a definir el orden normal para operadores de fermiones de forma consistente (3.40). Así, por ejemplo,

$$: a_{\vec{p},r} a_{\vec{q},s} a_{\vec{k},t}^\dagger : = (-1)^2 a_{\vec{k},t}^\dagger a_{\vec{p},r} a_{\vec{q},s} = (-1)^3 a_{\vec{k},t}^\dagger a_{\vec{q},s} a_{\vec{p},r} . \quad (4.129)$$

Del mismo modo, debemos definir de forma consistente el orden temporal de dos campos fermiónicos,

$$T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} = \begin{cases} \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) , & x_1^0 > x_2^0 \\ -\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) , & x_1^0 < x_2^0 \end{cases} \quad (4.130)$$

y análogamente para $T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\}$ y $T\{\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}$. Así, por ejemplo, si $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$ entonces

$$T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)\} = -\psi(x_3)\psi(x_1)\psi(x_4)\psi(x_2) . \quad (4.131)$$

Veamos a hora cómo definir la contracción de Wick de dos campos fermiónicos, para obtener una expresión análoga a la de campos escalares,

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} . \quad (4.132)$$

Separando las componentes de energía positiva y negativa,

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} , & \psi^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} , \\ \bar{\psi}^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s b_{\vec{p},s} \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} , & \bar{\psi}^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s a_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} , \end{aligned} \quad (4.133)$$

tenemos queⁱ

$$\begin{aligned} T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} &= \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x) \\ &= \theta(x^0 - y^0) \left[\psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) \right] \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[\bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) \right] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \left[: \psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} + : \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) : \right. \\ &\quad \left. + : \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) : + : \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) : \right] \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[: \bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) : + \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} + : \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) : \right. \\ &\quad \left. + : \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) : + : \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) : \right] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \left[: \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \right] \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[: \bar{\psi}(y)\psi(x) : + \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} \right] \end{aligned}$$

ⁱSi $x^0 = y^0$ entonces los campos ya están ordenados temporalmente, así que también se cumple

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \psi(x)\bar{\psi}(y) = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}$$

ya que entonces $\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} = -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\}$, como puede comprobarse explícitamente en (4.140).

$$= : \psi(x) \overline{\psi}(y) : + \overline{\psi(x) \psi(y)} \quad (4.134)$$

donde al final hemos usado que $\overline{\psi}(y) \psi(x) := - : \psi(x) \overline{\psi}(y) :$ y hemos definido

$$\overline{\psi(x) \psi(y)} = \theta(x^0 - y^0) \{ \psi^+(x), \overline{\psi}^-(y) \} - \theta(y^0 - x^0) \{ \psi^-(x), \overline{\psi}^+(y) \} \quad (4.135)$$

Es fácil comprobar que, como $\{a_{\vec{p},s}, b_{\vec{q},r}^\dagger\} = 0$, las siguientes contracciones se anulan,

$$\overline{\psi(x) \psi(y)} = \overline{\overline{\psi}(x) \psi(y)} = 0 . \quad (4.136)$$

Puede mostrarse que el teorema de Wick tiene la misma forma para campos fermiónicos. Hay que tener cuidado porque el orden normal de contracciones de Wick fermiónicas puede llevar aparejado un cambio de signo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} : \overline{\psi}_1 \psi_2 : &= - \overline{\psi}_2 \psi_1 \\ : \overline{\psi}_1 \psi_2 \overline{\psi}_3 \psi_4 : &= - \overline{\psi}_1 \psi_3 \overline{\psi}_2 \psi_4 . \end{aligned} \quad (4.137)$$

Como el valor esperado en el vacío del orden normal de operadores es cero, tenemos que, análogamente al caso de campos escalares, el *propagador de Feynman para fermiones* es

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \overline{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \overline{\psi(x) \psi(y)} = S_F(x - y) , \quad (4.138)$$

que puede escribirse, usando las relaciones de completitud (2.156), como

$$\begin{aligned} S_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s u_{\vec{p}}^{(s)} \overline{u}_{\vec{p}}^{(s)} e^{-ip(x-y)} \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s v_{\vec{p}}^{(s)} \overline{v}_{\vec{p}}^{(s)} e^{ip(x-y)} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} - m) e^{ip(x-y)} \\ &= \theta(x^0 - y^0) (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) (-i\not{\partial}_x - m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-y)} \\ &= (i\not{\partial}_x + m) D_F(x - y) \\ &= (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} . \end{aligned} \quad (4.139)$$

Por tanto,

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (4.140)$$

y, en el espacio de momentos,

$$\tilde{S}_F(p) = \int d^4x S_F(x-y)e^{ip(x-y)} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (4.141)$$

donde hemos usado que $\not{p}\not{p} = p^2$. Vemos que el propagador de fermiones es una función de Green del operador de Dirac pues

$$(i\not{\partial}_x - m)S_F(x-y) = -(\square_x + m^2)D_F(x-y) = i\delta^4(x-y). \quad (4.142)$$

Es *muy importante* notar que $\tilde{S}_F(p) \neq \tilde{S}_F(-p)$, así que hay que tener cuidado con el signo del momento.

Para hallar la matriz S entre estados fermiónicos necesitamos despejar los operadores creación y destrucción del campo libre ψ_{free} ,

$$\psi_{\text{free}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left[a_{\vec{p},s} u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (4.143)$$

lo que conduce a

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r} = \int d^3x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \quad (4.144)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} b_{\vec{k},r}^\dagger = \int d^3x \bar{v}^{(r)}(\vec{k}) e^{-ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \quad (4.145)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^\dagger = \int d^3x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \quad (4.146)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} b_{\vec{k},r} = \int d^3x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{ikx} v^{(r)}(\vec{k}). \quad (4.147)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \int d^3x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \\ &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left[a_{\vec{p},s} \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{p}) e^{i(k-p)x} + b_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(\vec{p}) e^{i(k+p)x} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \sum_s \left[a_{\vec{k},s} \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{k}) + b_{\vec{k},s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\vec{k}) \right] = \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r} \end{aligned} \quad (4.148)$$

donde se ha usado que

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{k}) = 2E_{\vec{k}} \delta_{rs}, \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\vec{k}) = 0 \quad (4.149)$$

y lo mismo para los demás. Igual que para campos escalares, esperamos que

$$\psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{in}}(x), \quad \psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{out}}(x), \quad (4.150)$$

donde esta Z es la constante de renormalización del campo ψ . Entonces,

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \quad (4.151)$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \quad (4.152)$$

y su diferencia nos da una expresión covariante que necesitaremos como paso inicial para obtener la fórmula LSZ, usando (4.18),

$$\begin{aligned}
\sqrt{2E_{\vec{k}}}\left(a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})}\right) &= Z^{-1/2} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) \\
&= -Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left(\bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} \right) u^{(r)}(\vec{k}) \\
&= \text{integrando por partes y usando } (\not{k} - m)u(\vec{k}) = 0 \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{-ikx} u^{(r)}(\vec{k}) . \tag{4.153}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se puede obtener

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}}\left(b_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{in})} - b_{\vec{k},r}^{\dagger(\text{out})}\right) = iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{v}^{(r)}(\vec{k}) e^{-ikx} (i \not{\partial}_x - m) \psi(x) , \tag{4.154}$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}}\left(a_{\vec{k},r}^{(\text{in})} - a_{\vec{k},r}^{(\text{out})}\right) = -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{u}^{(r)}(\vec{k}) e^{ikx} (i \not{\partial}_x - m) \psi(x) , \tag{4.155}$$

$$\sqrt{2E_{\vec{k}}}\left(b_{\vec{k},r}^{(\text{in})} - b_{\vec{k},r}^{(\text{out})}\right) = -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{ikx} v^{(r)}(\vec{k}) . \tag{4.156}$$

Así que en la matriz S podemos sustituir un *fermión entrante* de momento \vec{k}_1 y espín r por

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \left(a_{\vec{k}_1,r}^{\dagger(\text{in})} - a_{\vec{k}_1,r}^{\dagger(\text{out})} \right) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4x_1 e^{-ik_1x_1} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}}_{x_1} + m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \tag{4.157}
\end{aligned}$$

y puede verse que, podemos sustituir a continuación, por ejemplo, un *antifermión entrante* de momento \vec{k}_2 y espín s por

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= \sqrt{2E_{\vec{k}_2}} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) (b_{\vec{k}_2,s}^{\dagger(\text{in})} - b_{\vec{k}_2,s}^{\dagger(\text{out})}) \} | \vec{k}_3 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4x_2 e^{-k_2x_2} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) (i \not{\partial}_{x_2} - m) \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \} | \vec{k}_3 \cdots \vec{k}_m; t_i \rangle . \tag{4.158}
\end{aligned}$$

Iterando el procedimiento puede encontrarse la fórmula LSZ para fermiones. Supongamos que de las m (n) partículas entrantes (salientes) hay m_f (n_f) fermiones con espines r_i (r'_j) y el resto son antifermiones con espines s_i (s'_j). Entonces:

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{m_f} \frac{i\sqrt{Z}}{k_i - m} \right) \left(\prod_{i=m_f+1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i + m} \right) \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{i\sqrt{Z}}{p_j - m} \right) \left(\prod_{j=n_f+1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j + m} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_m \rangle \\
&= \int \left(\prod_{i=1}^m d^4x_i e^{-ik_i x_i} \right) \int \left(\prod_{j=1}^n d^4y_j e^{+ip_j y_j} \right) \prod_{i=m_f+1}^m \bar{v}^{(s_i)}(k_i) \prod_{j=1}^{n_f} \bar{u}^{(s'_j)}(p_j) \\
&\quad \times \langle 0 | T \left\{ \prod_{i=m_f+1}^m \psi(x_i) \prod_{i=1}^{m_f} \bar{\psi}(x_i) \prod_{j=1}^{n_f} \psi(y_j) \prod_{j=n_f+1}^n \bar{\psi}(y_j) \right\} | 0 \rangle \prod_{i=1}^{m_f} u^{(r_i)}(k_i) \prod_{j=n_f+1}^n v^{(r'_j)}(p_j)
\end{aligned}$$

Veamos un caso particular sencillo, que es aplicación directa del resultado que hemos encontrado en (4.157) y (4.158). Estudiemos el *scattering* $2 \rightarrow 2$,

$$\text{fermión}(k_1, r) + \text{antifermión}(k_2, s) \rightarrow \text{escalar}(p_1) + \text{escalar}(p_2)$$

en la *teoría de Yukawa*, que tiene como lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\psi\phi \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{int}} = g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.159)$$

Supongamos, para aliviar la notación, que todos los campos tienen la misma masa m . La amplitud de *scattering* viene dada por

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle \\ &= \left(iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} (\square_{x_1} + m^2)(\square_{x_2} + m^2) \\ & \quad \times \bar{v}^{(s)}(k_2) (i\cancel{\partial}_{x_4} - m) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \} | 0 \rangle (i\overleftarrow{\cancel{\partial}}_{x_3} + m) u^{(r)}(k_1) \\ &= \left(-iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \\ & \quad \times \bar{v}^{(s)}(k_2) (-\cancel{k}_2 - m) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \} | 0 \rangle (-\cancel{k}_1 + m) u^{(r)}(k_1) \end{aligned} \quad (4.160)$$

donde se ha empleado la transformada de Fourier de la función de Green, de forma análoga a como hicimos para llegar a (4.32). Estos campos no son libres. Para escribir los campos en la imagen de interacción reemplazamos $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \} | 0 \rangle$ por

$$\langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \phi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle \quad (4.161)$$

Aplicamos el teorema de Wick y nos fijamos en las dos contribuciones conexas, que aparecen a orden g^2 ,

(A)

+

(x ↔ y)

$$\begin{aligned} & : \phi_1 \phi_2 \psi_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\ &= -\overbrace{\phi_1 \phi_y} \overbrace{\phi_2 \phi_x} \overbrace{\psi_4 \psi_x} \overbrace{\psi_x \psi_y} \overbrace{\psi_y \psi_3} \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned} & : \phi_1 \phi_2 \psi_3 \psi_4 \bar{\psi}_x \psi_x \phi_x \bar{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\ &= -\overbrace{\phi_1 \phi_x} \overbrace{\phi_2 \phi_y} \overbrace{\psi_4 \psi_y} \overbrace{\psi_y \psi_x} \overbrace{\psi_x \psi_3} \end{aligned}$$

(4.162)

(B)

+

(x ↔ y)

$$\begin{aligned}
& : \overbrace{\phi_1 \phi_2 \psi_3 \psi_4 \psi_x \psi_x \phi_x \psi_y \psi_y \phi_y} : & : \overbrace{\phi_1 \phi_2 \psi_3 \psi_4 \psi_x \psi_x \phi_x \psi_y \psi_y \phi_y} : & (4.163) \\
& = -\overbrace{\phi_1 \phi_x} \overbrace{\phi_2 \phi_y} \overbrace{\psi_4 \psi_x} \overbrace{\psi_x \psi_y} \overbrace{\psi_y \psi_3} & = -\overbrace{\phi_1 \phi_y} \overbrace{\phi_2 \phi_x} \overbrace{\psi_4 \psi_y} \overbrace{\psi_y \psi_x} \overbrace{\psi_x \psi_3}
\end{aligned}$$

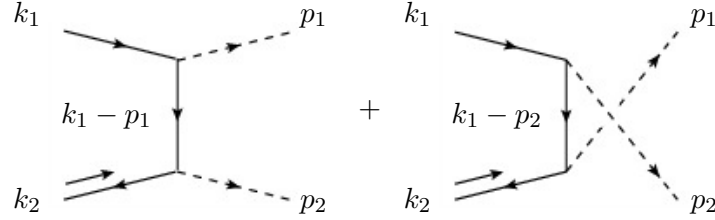
Consideremos el primero de los dos diagramas posibles, cuya contribución basta multiplicar por 2 para incluir el diagrama equivalente resultante de intercambiar x por y . Tengamos en cuenta un cambio de signo al hacer el orden normal de las contracciones, de modo que

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle_A \\
& = 2 \times \left(-iZ_\phi^{-1/2} \right)^2 \left(-iZ_\psi^{-1/2} \right)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
& \quad \times (-ig)^2 \frac{1}{2!} \times (-1) \times D_F(x_1 - y) D_F(x_2 - x) \\
& \quad \times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) S_F(x_4 - x) S_F(x - y) S_F(y - x_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 \tilde{x}_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 + k_1 \tilde{x}_3 - k_2 \tilde{x}_4)} e^{i(p_2 - k_2)x + i(p_1 - k_1)y} \\
& \quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) S_F(\tilde{x}_4) S_F(x - y) S_F(\tilde{x}_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = -(-ig)^2 i^2 \int d^4 x d^4 y e^{i(p_2 - k_2)x + i(p_1 - k_1)y} \\
& \quad \times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) \frac{i}{-\not{k}_2 - m} S_F(x - y) \frac{i}{\not{k}_1 - m} (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = (-ig)^2 \int d^4 \tilde{x} d^4 y e^{i(p_2 - k_2)\tilde{x}} e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) S_F(\tilde{x}) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) \frac{i}{\not{p}_2 - \not{k}_2 - m} u^{(r)}(\vec{k}_1) \tag{4.164}
\end{aligned}$$

donde se han hecho los cambios $\tilde{x}_1 = x_1 - y$, $\tilde{x}_2 = x_2 - x$, $\tilde{x}_3 = y - x_3$, $\tilde{x}_4 = x_4 - x$, después $\tilde{x} = x - y$, y se han puesto todas las $Z = 1$, pues sus correcciones no contribuyen hasta un orden más alto en g . El otro diagrama, incluyendo también $x \leftrightarrow y$, contribuye con

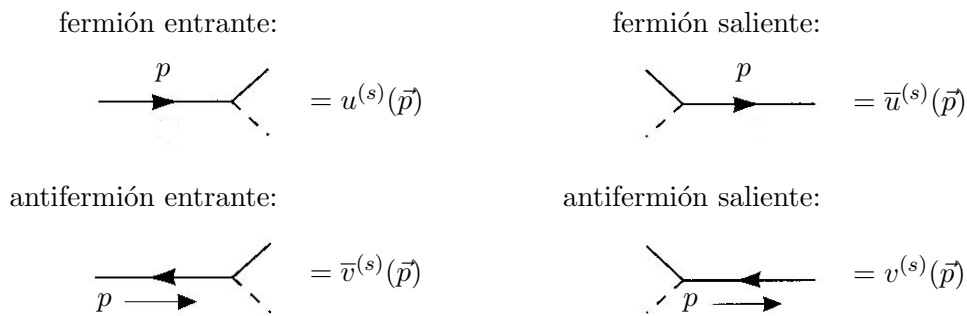
$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | k_1 k_2 \rangle_B \\
& = -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k_1 x_3 - k_2 x_4)} \\
& \quad \times D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - y) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) S_F(x_4 - x) S_F(x - y) S_F(y - x_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = -(-ig)^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) \int \prod_{i=1}^4 d^4 \tilde{x}_i d^4 x d^4 y e^{i(p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 + k_1 \tilde{x}_3 - k_2 \tilde{x}_4)} e^{i(p_1 - k_2)x + i(p_2 - k_1)y} \\
& \quad \times D_F(\tilde{x}_1) D_F(\tilde{x}_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) S_F(\tilde{x}_4) S_F(x - y) S_F(\tilde{x}_3) (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = -(-ig)^2 i^2 \int d^4 x d^4 y e^{i(p_1 - k_2)x + i(p_2 - k_1)y} \\
& \quad \times \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2)(\not{k}_2 + m) \frac{i}{-\not{k}_2 - m} S_F(x - y) \frac{i}{\not{k}_1 - m} (\not{k}_1 - m) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = (-ig)^2 \int d^4 \tilde{x} d^4 y e^{i(p_1 - k_2)\tilde{x}} e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) S_F(\tilde{x}) u^{(r)}(\vec{k}_1) \\
& = (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \bar{v}^{(s)}(\vec{k}_2) \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m} u^{(r)}(\vec{k}_1) \tag{4.165}
\end{aligned}$$

donde se han hecho los cambios $\tilde{x}_1 = x_1 - x$, $\tilde{x}_2 = x_2 - y$, $\tilde{x}_3 = y - x_3$, $\tilde{x}_4 = x_4 - x$, y después $\tilde{x} = x - y$. Podemos expresar ambos diagramas en el espacio de momentos:

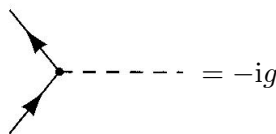


La dirección del momento en una línea fermiónica es relevante. Se toma entrante para estados iniciales y saliente para estados finales. El momento coincide con la dirección del *flujo de número fermiónico* para las líneas internas y para los estados de partícula (para un electrón se toma la dirección de la carga negativa), pero el momento tiene sentido contrario al flujo para las antipartículas. Las líneas fermiónicas se representan mediante líneas continuas y el flujo fermiónico mediante una flecha insertada en la línea. Desde ahora reservaremos las líneas discontinuas para los bosones escalares. Para escribir las reglas de Feynman hay que recorrer cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, asignando espinores, vértices y propagadores según vayan apareciendo. Veamos cuáles son las reglas de la teoría de Yukawa, que pueden deducirse del cálculo anterior:

1. Para hallar la amplitud de *scattering*, no hay que escribir los propagadores externos ni para escalares ni para fermiones, pues se cancelan en la fórmula LSZ. Basta dibujar todos los diagramas conexos amputados. Podemos ignorar los factores \sqrt{Z} a orden más bajo en TP, pero habrá que incluirlos en correcciones de orden superior. Los consideraremos incluidos dentro de la amplitud invariante $i\mathcal{M}$ que se define, como ya hemos visto, extrayendo de la matriz S el factor $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_j k_j)$.
2. Asociar espinores a las patas fermiónicas externas del siguiente modo (supondremos que el tiempo fluye de izquierda a derecha):



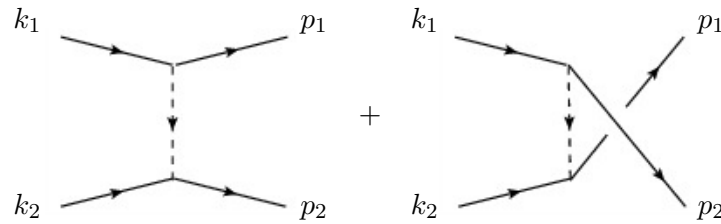
3. Vértice (imponer conservación de momento en cada vértice):



4. Propagadores:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \dashrightarrow \text{---} \quad p &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \text{---} \longrightarrow \text{---} \quad p &= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

5. Hay que tener cuidado con los signos relativos entre diagramas que involucren varias líneas fermiónicas debido a las contracciones de Wick. Por ejemplo, los siguientes diagramas contribuyen con signos opuestos a la amplitud porque entre ellos hay una permutación impar de los campos fermiónicos:



$$i\mathcal{M} = (-ig)^2 \left[\bar{u}(p_2)u(k_2) \frac{i}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_1) - \bar{u}(p_2)u(k_1) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_2) \right]$$

6. Asignar un factor (-1) a cada *loop* cerrado de fermiones, pues

$$= \overbrace{\psi\psi\psi\psi\psi\psi\psi\psi}^{\text{loop}} = -\text{Tr} \left[\overbrace{\psi\bar{\psi}}^{\text{loop}} \overbrace{\psi\bar{\psi}}^{\text{loop}} \overbrace{\psi\bar{\psi}}^{\text{loop}} \overbrace{\psi\bar{\psi}}^{\text{loop}} \right] = -\text{Tr}(\tilde{S}_F \tilde{S}_F \tilde{S}_F \tilde{S}_F)$$

Tema 5

Observables

5.1 Normalización de estados relativistas y no relativistas

En mecánica cuántica no relativista, la función de onda de una partícula de momento \vec{p} que se mueve libremente en el interior de una caja de volumen $V = L^3$ es

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = C e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad \text{con} \quad \int_V d^3x |\psi_{\vec{p}}(\vec{x})|^2 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.1)$$

y los posibles momentos p^i están cuantizados, $p_i = (2\pi/L)n_i$ con $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Entonces, en el espacio de momentos,

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle^{(\text{NR})} = \int d^3x \langle \vec{p} | x \rangle \langle x | \vec{q} \rangle = \int d^3x \psi_{\vec{p}}^*(\vec{x}) \psi_{\vec{q}}(\vec{x}) = \delta_{\vec{p}\vec{q}}. \quad (5.2)$$

En TQC, que es una teoría cuántica relativista, la normalización anterior no es invariante Lorentz. Por eso habíamos introducido la normalización

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}), \quad (5.3)$$

que es el límite cuando el volumen se hace infinito de

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 2E_{\vec{p}}V \delta_{\vec{p}\vec{q}} \quad (5.4)$$

pues recordemos que

$$\lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{q}} \int d^3x e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} = V(\rightarrow \infty). \quad (5.5)$$

Comparando ambas normalizaciones, vemos que

$$|\vec{p}\rangle = (2E_{\vec{p}}V)^{1/2} |\vec{p}\rangle^{(\text{NR})} \quad (5.6)$$

y por tanto,

$$|\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^n (2E_{\vec{p}_i}V)^{1/2} |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n\rangle^{(\text{NR})}. \quad (5.7)$$

En mecánica cuántica no relativista, se escribe la matriz $S = 1 + iT$ entre un estado inicial $|i\rangle$ y otro final $|f\rangle$ como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) i\mathcal{T}_{fi} \quad (5.8)$$

donde se extrae por conveniencia el factor $(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)$ que expresa la conservación de la energía y el momento. En TQC hemos introducido de forma análoga la matriz invariante \mathcal{M} entre dos estados relativistas $|i\rangle = |\vec{k}_1\vec{k}_2\cdots\vec{k}_m\rangle$ y $|f\rangle = |\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\rangle$, así que está claro que

$$\mathcal{M}_{fi} = \prod_{\ell=1}^m (2E_{\vec{k}_\ell} V)^{1/2} \prod_{j=1}^n (2E_{\vec{p}_j} V)^{1/2} \mathcal{T}_{fi} . \quad (5.9)$$

5.2 Anchura de desintegración

Supongamos que el estado inicial es $|i\rangle = |\vec{k}\rangle$, una partícula de masa M y momento \vec{k} , y el estado final $|f\rangle = |\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\rangle$ son n partículas de masas m_j y momentos \vec{p}_j . La probabilidad de que la partícula inicial se desintegre en n partículas ($1 \rightarrow n$) con $|f\rangle \neq |i\rangle$ será

$$dw = |(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i) i\mathcal{T}_{fi}|^2 dN_f = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i) VT |\mathcal{T}_{fi}|^2 dN_f \quad (5.10)$$

donde se ha sustituido simbólicamente $(2\pi)^4\delta^4(0) = VT$ a partir de

$$\lim_{p \rightarrow q} (2\pi)^4\delta^4(p - q) = \lim_{p \rightarrow q} \int d^4x e^{i(p-q)x} = VT (\rightarrow \infty) \quad (5.11)$$

y dN_f es el número de estados de n partículas con momentos entre \vec{p}_i y $\vec{p}_i + d\vec{p}_i$. Hallemos primero el número de estados entre \vec{p} y $\vec{p} + d\vec{p}$, que corresponden al caso de solo una partícula final. Para ello usaremos la relación de completitud

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \quad (5.12)$$

que se comprueba fácilmente, pues

$$|\vec{q}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|\vec{q}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = |\vec{q}\rangle \quad (5.13)$$

y que nos permite escribir dN como el producto de la probabilidad de que la partícula tenga un momento entre \vec{p} y $\vec{p} + d\vec{p}$, que viene a ser $\langle \vec{p}|\vec{p}\rangle = 2E_{\vec{p}}V$, y la densidad de estados en ese intervalo,

$$dN = 2E_{\vec{p}}V \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} = \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} . \quad (5.14)$$

Por tanto, en el caso de n partículas en el estado final,

$$dN_f = \prod_{j=1}^n \frac{V d^3p_j}{(2\pi)^3} . \quad (5.15)$$

Así que la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, que llamaremos *anchura de desintegración*, viene dada por

$$d\Gamma = \frac{dw}{T} = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i) V |\mathcal{T}_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{V d^3p_j}{(2\pi)^3} \quad (5.16)$$

que, usando (5.9), puede expresarse como

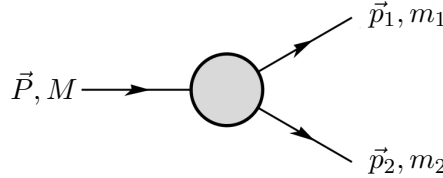
$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2E_{\vec{k}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n} \quad (5.17)$$

donde se ha introducido el elemento de volumen de *espacio fásico de n cuerpos*,

$$\boxed{d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j - P_i \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} .} \quad (5.18)$$

La anchura tiene dimensiones de energía o de inverso de tiempo en nuestro sistema de unidades naturales. Si trabajamos en el sistema de referencia en reposo de la partícula que se desintegra, la energía es $E_{\vec{k}} = M$, la masa de esa partícula.

Consideremos por ejemplo la desintegración $1 \rightarrow 2$:



La integral sobre el espacio fásico de $n = 2$ partículas finales en el sistema centro de masas (CM) se reduce a una integral sobre el ángulo sólido de una de ellas (la otra sale en la misma dirección y sentido contrario):

$$\begin{aligned} \int d\Phi_2 &= (2\pi)^4 \int \delta^4(p_1 + p_2 - P) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \\ &= \int \delta(E_1 + E_2 - E_{CM}) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^2 2E_1 2E_2} \\ &= \int \frac{|\vec{p}|^2 d\Omega}{(2\pi)^2 4E_1 E_2 |\vec{p}| (E_1 + E_2)} \\ &= \int \frac{|\vec{p}| d\Omega}{16\pi^2 E_{CM}} , \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde se ha usado

$$d^3 p_1 = |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\Omega \quad (5.20)$$

$$\delta(E_1 + E_2 - E_{CM}) = \delta(f(|\vec{p}_1|)) = \frac{\delta(|\vec{p}_1| - |\vec{p}|)}{|f'(|\vec{p}_1| = |\vec{p}|)|} \quad (5.21)$$

$$E_1 = \sqrt{m_1^2 + |\vec{p}_1|^2} , \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 + |-\vec{p}_1|^2} \quad (5.22)$$

$$f'(|\vec{p}_1|) = \frac{\partial f}{\partial E_1} \frac{\partial E_1}{\partial |\vec{p}_1|} + \frac{\partial f}{\partial E_2} \frac{\partial E_2}{\partial |\vec{p}_1|} = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2} = |\vec{p}_1| \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) . \quad (5.23)$$

Como estamos estudiando la desintegración de una partícula, $E_{CM} = M$. Nótese que las masas M , m_1 y m_2 determinan completamente la energía y los momentos finales:

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} , \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} ,$$

$$|\vec{p}| \equiv |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]\}^{1/2}}{2M}. \quad (5.24)$$

La *anchura total* se obtiene sumando las *anchuras parciales* a todos los canales de desintegración. Su inversa es la *vida media* de la partícula,

$$\boxed{\tau = \Gamma^{-1}} \quad (5.25)$$

5.3 Sección eficaz

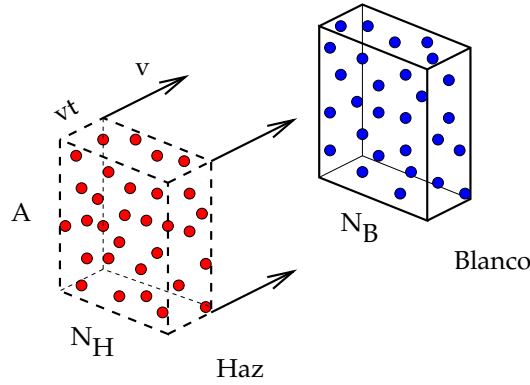


Figura 5.1: Blanco con N_B partículas bombardeado por un haz de N_H partículas de velocidad v .

La sección eficaz σ es el *área efectiva* de una partícula (blanco) vista por un proyectil (en el haz incidente). Supongamos que en el blanco hay N_B partículas y que la superficie de colisión es A . Entonces, la probabilidad de colisión es

$$P = \frac{N_B \sigma}{A}. \quad (5.26)$$

Si en el haz hay N_H partículas, entonces el número de sucesos es $N_H P$,

$$(\# \text{ sucesos}) = N_H \frac{N_B \sigma}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{(\# \text{ sucesos})}{N_H N_B} A. \quad (5.27)$$

En la práctica, el haz está formado por una nube de partículas de densidad ρ que se mueven con velocidad v , así que

$$\begin{aligned} N_H = \rho v t A \Rightarrow \sigma &= \frac{(\# \text{ sucesos})}{\rho v t A N_B} A = \frac{(\# \text{ sucesos})}{\rho v t N_B} \\ &= \frac{\text{probabilidad de transición por unidad de tiempo}}{\text{flujo incidente}} \\ &\Rightarrow d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) V |\mathcal{T}_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{V d^3 p_j}{(2\pi)^3}}{\rho v}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde hemos sustituido la probabilidad de transición por unidad de tiempo (número de sucesos por cada dispersor) por la misma expresión que nos da la anchura en (5.16) (pues es

equivalente al número de desintegraciones si el estado inicial consiste en una sola partícula). Hallemos ahora el flujo incidente ρv correspondiente a una partícula por unidad de volumen,

$$\rho v = \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \frac{1}{V} \left| \frac{\vec{k}_1}{E_H} - \frac{\vec{k}_2}{E_B} \right| = \frac{|E_B \vec{k}_1 - E_H \vec{k}_2|}{V E_H E_B} = \frac{\{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}}{V E_H E_B} \quad (5.29)$$

donde $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ es la velocidad relativa entre una partícula del haz y otra del blanco, de masas M_1 y M_2 respectivamente, que supondremos colineales $(\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2)$,^a de modo que, en efecto, obtenemos una expresión para el flujo que es invariante bajo *boosts* en la dirección colineal,

$$k_1 = (E_H, \vec{k}_1), \quad k_2 = (E_B, \vec{k}_2) \\ \Rightarrow (k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = (E_H E_B + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|)^2 - M_1^2 M_2^2 = |E_B \vec{k}_1 - E_H \vec{k}_2|^2, \quad (5.30)$$

donde hemos supuesto que los dos haces son colineales al tomar $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = -|\vec{k}_1| |\vec{k}_2|$. Por tanto, a partir de (5.28) y (5.29), la sección eficaz de $|i\rangle = |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$ a $|f\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n\rangle$ queda

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{T}_{fi}|^2}{4 \{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}} 2E_H 2E_B V^2 \prod_{j=1}^n \frac{V d^3 p_j}{(2\pi)^3}. \quad (5.31)$$

y sustituyendo (5.9), tenemos finalmente

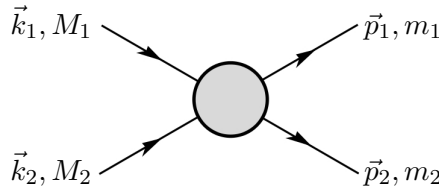
$$d\sigma = \frac{1}{4 \{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n \quad (5.32)$$

Nótese que si hay n_r partículas idénticas de la especie r en el estado final la sección eficaz total, tras integrar sobre el espacio fásico, debe dividirse por el factor de simetría

$$S = \prod_r n_r!. \quad (5.33)$$

Y si el estado inicial no está polarizado y/o la polarización del estado final no se mide debe promediarse sobre las polarizaciones iniciales y/o sumarse sobre las finales, respectivamente.

Consideremos ahora el caso particular del *scattering* $2 \rightarrow 2$ en el sistema CM:



La integral sobre el espacio fásico aparece en (5.19). El factor de flujo se obtiene de

$$k_1 \equiv (E_1, \vec{k}), \quad k_2 = (E_2, -\vec{k}), \quad E_{\text{CM}} = E_1 + E_2, \quad 4 \{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2} = 4E_{\text{CM}} |\vec{k}|. \quad (5.34)$$

^a Así nos vale tanto para colisiones de blanco fijo, como el de la figura (5.1), como para colisionadores de partículas en los que se hacen chocar dos haces.

Así que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (5.35)$$

Finalmente, un comentario sobre las dimensiones de las magnitudes utilizadas:

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) i\mathcal{T}_{fi} \Rightarrow [\mathcal{S}_{fi}] = [\text{energía}]^0, \quad [\mathcal{T}_{fi}] = [\text{energía}]^4$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \prod_{j=1}^{n_i+n_f} (2E_j V)^{1/2} \mathcal{T}_{fi} \Rightarrow [\mathcal{M}_{fi}] = [\text{energía}]^{4-n_i-n_f}$$

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \Rightarrow [d\Phi_n] = [\text{energía}]^{-4+2n}$$

$$d\sigma(n_i = 2 \rightarrow n) = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n}{4 \{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}} \Rightarrow [\sigma] = [\text{energía}]^{-2} = [\text{longitud}]^2$$

$$d\Gamma(n_i = 1 \rightarrow n) = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n \Rightarrow [\Gamma] = [\text{energía}] = [\text{tiempo}]^{-1}$$

Resultan convenientes los factores de conversión:

$$\hbar \approx 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (5.36)$$

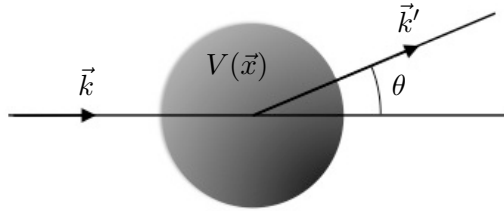
$$(\hbar c)^2 \approx 0.389 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn} \quad (5.37)$$

que son fáciles de recordar a partir de (1.1):

$$1 \equiv \hbar c \approx 200 \text{ MeV fm}, \quad c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}, \quad 1 \text{ barn} \equiv 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

5.4 Límite no relativista: potenciales de interacción

En el límite no relativista (NR) los cálculos realizados mediante diagramas de Feynman (TQC) deben reproducir los resultados de la mecánica cuántica no relativista, donde la interacción entre partículas se describe en términos de un potencial $V(\vec{x})$.



Para hallar el potencial recordemos que la sección eficaz *elástica* de dispersión de una partícula de masa m por un potencial $V(\vec{x})$ es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (5.38)$$

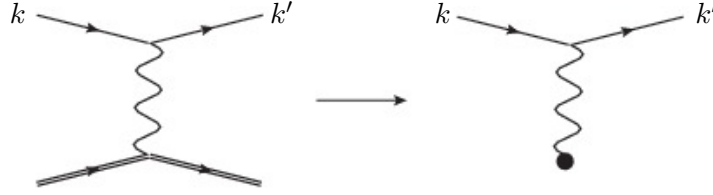
donde θ es el *ángulo de scattering* y $f(\theta)$ es la *amplitud de scattering* no relativista, que puede calcularse perturbativamente. A primer orden (*aproximación de Born*),

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(\vec{x}), \quad \vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}, \quad k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|. \quad (5.39)$$

Si el potencial es central, $V = V(r)$, la expresión anterior se convierte en

$$f(\theta) = -\frac{2m}{q} \int_0^\infty dr rV(r) \sin qr, \quad q = |\vec{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5.40)$$

Consideremos $k \ll m$ (propio del límite NR) y sea el blanco que genera el potencial una partícula muy pesada de masa $M_A \gg m$. Ésta es, por ejemplo, la situación típica cuando un electrón es dispersado por un núcleo, de modo que podemos despreciar el retroceso del núcleo. Diagramáticamente:



La sección eficaz elástica ($k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$, $E_{\text{CM}} \approx M_A$) es

$$d\sigma_{\text{elást}} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega \approx \frac{1}{64\pi^2 M_A^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega. \quad (5.41)$$

Para encontrar la expresión no relativista correspondiente, recordemos que

$$\mathcal{M}_{fi} = (2E_{\vec{k}}V)^{1/2} (2E_{\vec{k}'}V)^{1/2} (2E_A V)^{1/2} (2E_A V)^{1/2} \mathcal{T}_{fi} \approx 4mM_A V^2 \mathcal{T}_{fi}, \quad (5.42)$$

de modo que en el límite NR, ignorando los factores de V que sabemos deben cancelarse en la fórmula correcta,

$$d\sigma_{\text{elást}} \approx \frac{m^2}{4\pi^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 d\Omega \quad (5.43)$$

lo que, comparando con (5.38), nos dice que

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi} \mathcal{T}_{fi}, \quad (5.44)$$

donde el signo global es el apropiado según demostrará un cálculo concreto, y a partir de (5.39),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}(\vec{q}) &= - \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) \Rightarrow V(\vec{x}) = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \mathcal{T}_{fi}(\vec{q}) \\ &\Rightarrow V(\vec{x}) = - \frac{1}{4mM_A} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \mathcal{M}_{fi}(\vec{q}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nótese que el potencial de interacción es un concepto no relativista, que describe una *interacción instantánea*. Sin embargo, la descripción más precisa de la TQC se basa en el intercambio y propagación de partículas, como hemos visto a lo largo del curso.

Tema 6

Procesos elementales en QED

6.1 El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

La *electrodinámica cuántica* (QED) describe la interacción entre electrones (o cualquier otra partícula cargada de espín 1/2) y fotones. Resulta conveniente cuantizar el campo de Maxwell de forma covariante, como hicimos en §3.3.2. Conviene además generalizar ligeramente el lagrangiano (3.107) que describe el campo electromagnético libre y escribir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.1)$$

donde ξ es un parámetro genérico. En §3.3.2 usamos $\xi = 1$, pero puede demostrarse igualmente que si se impone que $\partial_\mu A^\mu$ se anule entre estados físicos, el espectro de la teoría viene dado exclusivamente por los estados de polarización transversa del fotón. El efecto neto del segundo término de (6.1), que se llama *término de gauge fixing*, es romper la invariancia gauge del lagrangiano, pero los elementos de matriz entre estados físicos serán independientes de la elección de ξ .^a Sin embargo, las reglas de conmutación entre los campos y el propagador dependerán de ξ . Es aconsejable trabajar con ξ genérico y al final comprobar la corrección de los cálculos verificando que ξ se cancela en los elementos de matriz entre estados físicos. No obstante, dependiendo del tipo de problema, los cálculos se simplifican bastante si se elige el llamado R_ξ gauge apropiado. En particular, $\xi = 1$ es el *gauge de 't Hooft-Feynman*, $\xi = 0$ es el *gauge de Landau* y $\xi \rightarrow \infty$ es el *gauge unitario* (en el que sólo intervienen los grados de libertad físicos).

Hallemos el propagador del fotón. Para aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este lagrangiano, nótese que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\xi}g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \quad (6.2)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \\ &\Rightarrow \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu A_\mu = 0 \end{aligned}$$

^aEn presencia de interacciones la independencia en ξ se logra siempre que A_μ se acople a la materia respetando la invariancia gauge, es decir si lo hace a una corriente conservada.

$$\Rightarrow \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu = 0 \quad (6.3)$$

Ya sabemos que el propagador es una función de Green del operador que actúa sobre el campo en la ecuación anterior. En el espacio de momentos, el propagador del fotón es, por tanto, el inverso de

$$-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu . \quad (6.4)$$

Nótese que este operador es invertible gracias a que hemos introducido el término de *gauge fixing*, pues $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ es singular (tiene autovalor nulo k^μ), lo que tiene que ver con la simetría gauge: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ también es solución de $(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu = 0$. El inverso de (6.4), incluyendo la prescripción de Feynman que ya hemos discutido, es el *propagador del fotón*

$$\boxed{\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]} \quad (6.5)$$

En efecto,

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \left[-k^2 g_{\nu\rho} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\nu k_\rho \right] = i\delta_\rho^\mu . \quad (6.6)$$

La elección del signo global es la apropiada pues, mientras que para campos escalares las reglas de conmutación son $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$, para el campo de Maxwell con $\xi = 1$ son $[a_{\vec{p},\lambda}, a_{\vec{q},\lambda'}^\dagger] = \zeta_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$, según vimos en (3.113).

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes vienen descritas a nivel clásico a partir del lagrangiano invariante gauge U(1) que se obtiene introduciendo en el lagrangiano de Dirac una derivada covariante (2.213) lo que conduce al acoplamiento mínimo del campo electromagnético con cargas y corrientes $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = eQ_f \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, donde Q_f es la carga eléctrica en unidades de e del fermión f aniquilado por el campo ψ . De esta forma se obtiene el lagrangiano de la electrodinámica clásica (2.215). Para describir la interacción electromagnética a nivel cuántico (QED) hemos de fijar el gauge, como en (6.1), e interpretar las interacciones entre campos cuánticos como intercambio de partículas (fotones, electrones y antielectrones o positrones). El lagrangiano de partida es

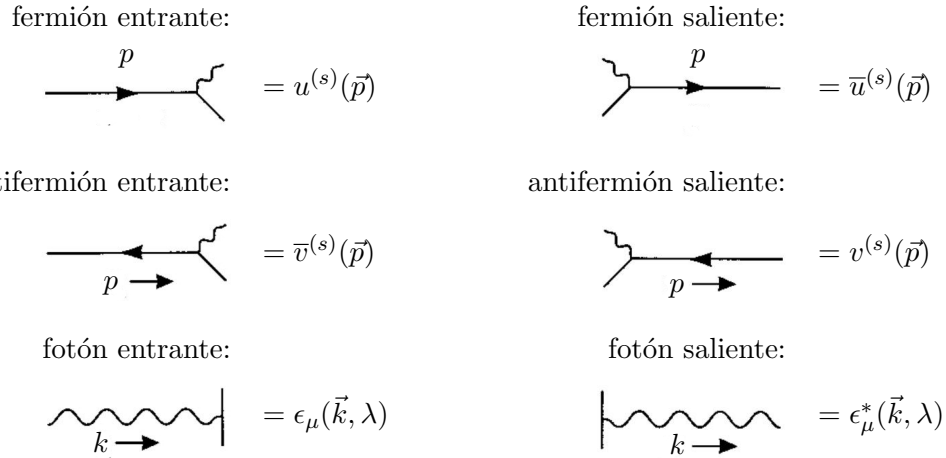
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu \quad (6.7)$$

que contiene una interacción de la forma

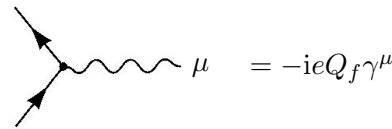
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -eQ_f A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi . \quad (6.8)$$

Para hallar perturbativamente la matriz de *scattering* de un proceso en QED basta con aplicar las reglas de Feynman correspondientes. Respecto a los casos que hemos tratado en el tema anterior, las novedades son: el propagador del fotón, que se lee directamente de (6.5), el vértice de interacción, que se deduce trivialmente de (6.8), y un factor de polarización cuando el fotón se encuentra en una pata externa, que no existe en el caso de un campo escalar. Resumimos a continuación las reglas de Feynman de la QED:

– Patas externas:



– Vértice:



– Propagadores:

$$\mu \text{ wavy line } \nu = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]$$

$$\text{solid line } p = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

6.2 Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

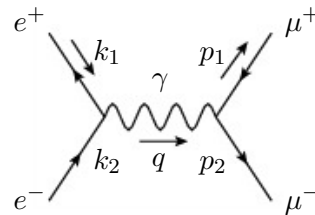


Figura 6.1: El proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ a nivel árbol en QED.

Consideremos la aniquilación de un electrón y un positrón para dar un muón y un antimuón. En QED este proceso viene descrito a orden más bajo de TP (nivel árbol) por el diagrama de la figura 6.1. El muón tiene la misma carga del electrón, $Q_\mu = Q_e = -1$, y una masa M unas 200 veces mayor que la masa m del electrón. Vamos a hallar paso a paso y en detalle la sección eficaz de este proceso.

En primer lugar, asignamos momentos a todas las partículas del diagrama y usamos la conservación del cuádrimomento en cada vértice, lo que fija el cuádrimomento del fotón

virtual que se propaga entre los dos vértices de interacción,

$$q = k_1 + k_2 = p_1 + p_2 . \quad (6.9)$$

Las patas externas son fermiones, cuyos espines etiquetamos mediante índices r_1, r_2, s_1, s_2 que toman dos valores posibles (1,2).

Aplicando las reglas de Feynman, recorriendo cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, el elemento de matriz invariante viene dado por

$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2)(ie\gamma^\beta)v^{(s_1)}(\vec{p}_1)\frac{-i}{q^2}\left[g_{\alpha\beta} - (1-\xi)\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right]\bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)(ie\gamma^\alpha)u^{(r_2)}(\vec{k}_2) . \quad (6.10)$$

Nótese que como los fermiones externos están sobre su capa de masas satisfacen las respectivas ecuaciones de Dirac,

$$\not{k}_1 v^{(r_1)}(\vec{k}_1) = -m v^{(r_1)}(\vec{k}_1) , \quad \not{k}_2 u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = m u^{(r_2)}(\vec{k}_2) , \quad (6.11)$$

así que la amplitud no depende del parámetro ξ , como deber ser, ya que

$$q_\alpha \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)\gamma^\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = \bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u^{(r_2)}(\vec{k}_2) = 0 . \quad (6.12)$$

Podríamos haber trabajado desde el principio en el *gauge* de 't Hooft-Feynman ($\xi = 1$). Por tanto,

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2}\bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2)\gamma^\alpha v^{(s_1)}(\vec{p}_1)\bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)\gamma_\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2) . \quad (6.13)$$

Para hallar $|\mathcal{M}|^2$, nótese que

$$(\bar{u}\gamma^\alpha v)^* = v^\dagger\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^{0\dagger}u = v^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0u = \bar{v}\gamma^\alpha u , \quad (6.14)$$

donde se ha usado

$$\bar{u} = u^\dagger\gamma^0 , \quad \gamma^{\alpha\dagger} = \gamma_\alpha , \quad \gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0 = \gamma^\alpha . \quad (6.15)$$

Se trata además de un número complejo que podemos multiplicar en cualquier orden. Lo mismo ocurre con la otra línea fermiónica. Conviene escribir,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2)\gamma^\alpha v^{(s_1)}(\vec{p}_1)\bar{v}^{(s_1)}(\vec{p}_1)\gamma^\beta u^{(s_2)}(\vec{p}_2)\bar{v}^{(r_1)}(\vec{k}_1)\gamma_\alpha u^{(r_2)}(\vec{k}_2)\bar{u}^{(r_2)}(\vec{k}_2)\gamma_\beta v^{(r_1)}(\vec{k}_1) . \quad (6.16)$$

Podemos ahora hacer uso de las propiedades de espinores y matrices de Dirac, que conducen a multitud de identidades (*Diracología*). En particular, puede verse que los dos estados de espín a lo largo del eje z satisfacen

$$u^{(1)}(\vec{p})\bar{u}^{(1)}(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 + \gamma_5\not{p}}{2} , \quad (6.17)$$

$$u^{(2)}(\vec{p})\bar{u}^{(2)}(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 - \gamma_5\not{p}}{2} , \quad (6.18)$$

$$v^{(1)}(\vec{p})\bar{v}^{(1)}(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 + \gamma_5\not{p}}{2} , \quad (6.19)$$

$$v^{(2)}(\vec{p})\bar{v}^{(2)}(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 - \gamma_5\not{p}}{2} , \quad (6.20)$$

donde $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ en el sistema de referencia en el que $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. En general,

$$u(\vec{p}, n)\bar{u}(\vec{p}, n) = (\not{p} + m)\frac{1 + \gamma_5\not{n}}{2}, \quad v(\vec{p}, n)\bar{v}(\vec{p}, n) = (\not{p} - m)\frac{1 + \gamma_5\not{n}}{2} \quad (6.21)$$

proyectan sobre polarizaciones bien definidas a lo largo de una dirección n^μ , que cumple $n^2 = -1$ y $p_\mu n^\mu = 0$. Si elegimos, por simplicidad, el eje z como dirección del movimiento, $p^\mu = (E, 0, 0, |\vec{p}|)$, los operadores anteriores proyectan sobre los dos estados de helicidad de partícula y antipartícula, respectivamente, si tomamos $n^\mu = \pm(|\vec{p}|/m, 0, 0, E/m)$. En particular, en el límite ultrarrelativista ($E \gg m$) los proyectores sobre quiralidades *right* y *left* de partícula y antipartícula son:

$$u^{(1)}(\vec{p})\bar{u}^{(1)}(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 + \gamma_5\not{p}}{2} \rightarrow u_R(p)\bar{u}_R(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad (6.22)$$

$$u^{(2)}(\vec{p})\bar{u}^{(2)}(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 - \gamma_5\not{p}}{2} \rightarrow u_L(p)\bar{u}_L(\vec{p}) = (\not{p} + m)\frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad (6.23)$$

$$v^{(1)}(\vec{p})\bar{v}^{(1)}(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 + \gamma_5\not{p}}{2} \rightarrow v_L(p)\bar{v}_L(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad (6.24)$$

$$v^{(2)}(\vec{p})\bar{v}^{(2)}(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 - \gamma_5\not{p}}{2} \rightarrow v_R(p)\bar{v}_R(\vec{p}) = (\not{p} - m)\frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (6.25)$$

Otra propiedad que se demuestra fácilmente de lo anterior es

$$\bar{u}(\vec{p}, n)\Gamma u(\vec{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma_5\not{n}}{2} \right], \quad \bar{v}(\vec{p}, n)\Gamma v(\vec{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma (\not{p} - m) \frac{1 + \gamma_5\not{n}}{2} \right], \quad (6.26)$$

donde Γ es una matriz 4×4 arbitraria. Por otro lado, si los fermiones no están polarizados el cálculo se simplifica notablemente pues podemos aplicar directamente las relaciones de completitud,

$$\sum_s u^{(s)}(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^{(s)}(\vec{p})\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \not{p} - m, \quad (6.27)$$

que conducen a

$$\sum_s \bar{u}^{(s)}(\vec{p})\Gamma u^{(s)}(\vec{p}) = \text{Tr} [\Gamma (\not{p} + m)], \quad \sum_s \bar{v}^{(s)}(\vec{p})\Gamma v^{(s)}(\vec{p}) = \text{Tr} [\Gamma (\not{p} - m)]. \quad (6.28)$$

Volvamos a nuestro cálculo (6.16) y supongamos por simplicidad que tanto los fermiones iniciales como los finales no están polarizados. Tenemos entonces que promediar sobre espines iniciales y sumar sobre espines finales:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma^\alpha (\not{p}_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}_2 + M)] \text{Tr}[\gamma_\alpha (\not{k}_2 + m) \gamma_\beta (\not{k}_1 - m)], \end{aligned} \quad (6.29)$$

que aparece como el producto de las trazas de las dos *cadena fermiónicas*.

Para hallar las trazas volvemos a recurrir a la *Diracología*. Necesitamos en particular,

$$\text{Tr}[\# \text{ impar } \gamma^s] = 0 \quad (6.30)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (6.31)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (6.32)$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\alpha (\not{p}_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}_2 + M)] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha \not{p}_1 \gamma^\beta \not{p}_2] - M^2 \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] \\ &= 4(p_1^\alpha p_2^\beta - (p_1 p_2) g^{\alpha\beta} + p_1^\beta p_2^\alpha) - 4M^2 g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\alpha (\not{k}_2 + m) \gamma_\beta (\not{k}_1 - m)] &= \text{Tr}[\gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta \not{k}_2] - m^2 \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] \\ &= 4(k_{1\alpha} k_{2\beta} - (k_1 k_2) g_{\alpha\beta} + k_{1\beta} k_{2\alpha}) - 4m^2 g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.34)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{16e^4}{4q^4} [(p_1 k_1)(p_2 k_2) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + (p_1 k_2)(p_2 k_1) - m^2(p_1 p_2) \\ &\quad - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + 4(p_1 p_2)(k_1 k_2) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + 4m^2(p_1 p_2) \\ &\quad + (p_1 k_2)(p_2 k_1) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + (p_1 k_1)(p_2 k_2) - m^2(p_1 p_2) \\ &\quad - M^2(k_1 k_2) + 4M^2(k_1 k_2) - M^2(k_1 k_2) + 4M^2 m^2] \\ &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_1 k_1)(p_2 k_2) + (p_1 k_2)(p_2 k_1) + m^2(p_1 p_2) + M^2(k_1 k_2) + 2M^2 m^2] . \end{aligned} \quad (6.35)$$

El siguiente paso es elegir un sistema de referencia. Supongamos el sistema centro de masas y sea θ el ángulo que forma el μ^+ saliente con el e^+ incidente,

$$\begin{aligned} k_1^\mu &= E(1, 0, 0, \beta_i) , \\ k_2^\mu &= E(1, 0, 0, -\beta_i) , \quad \beta_i = \sqrt{1 - m^2/E^2} , \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= E(1, \beta_f \sin \theta, 0, \beta_f \cos \theta) , \\ p_2^\mu &= E(1, -\beta_f \sin \theta, 0, -\beta_f \cos \theta) , \quad \beta_f = \sqrt{1 - M^2/E^2} . \end{aligned} \quad (6.37)$$

Entonces,

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\text{CM}}^2 = 4E^2 , \quad (6.38)$$

$$(p_1 k_1) = (p_2 k_2) = E^2(1 - \beta_i \beta_f \cos \theta) , \quad (6.39)$$

$$(p_1 k_2) = (p_2 k_1) = E^2(1 + \beta_i \beta_f \cos \theta) , \quad (6.40)$$

$$(p_1 p_2) = E^2(1 + \beta_f^2) = E^2(2 - M^2/E^2) , \quad (6.41)$$

$$(k_1 k_2) = E^2(1 + \beta_i^2) = E^2(2 - m^2/E^2) \quad (6.42)$$

y la expresión (6.35) queda

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2E^4} [2E^4(1 + \beta_i^2 \beta_f^2 \cos^2 \theta) + 2E^2(m^2 + M^2)] \\ &= e^4 \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \cos^2 \theta \right] . \end{aligned} \quad (6.43)$$

La sección eficaz diferencial del proceso se obtiene a partir de la expresión (5.35),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} \sqrt{\frac{E_{\text{CM}}^2 - 4M^2}{E_{\text{CM}}^2 - 4m^2}} \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (6.44)$$

donde se ha sustituido la constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi)$. Nótese que $E_{\text{CM}} > 2M$, la energía umbral del proceso. La sección eficaz total es

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (6.45)$$

En el límite ultrarrelativista ($E_{\text{CM}} \gg M, m$),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 + \cos^2\theta) \quad (6.46)$$

$$\sigma \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{CM}}^2}. \quad (6.47)$$

6.3 Comentarios

6.3.1 Sobre el propagador y los estados de polarización

Al cuantizar el campo de Maxwell de forma covariante hemos introducido (3.112) cuatro vectores de polarización $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ que satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1, \quad (6.48)$$

$$\sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu}. \quad (6.49)$$

Sea n^μ un vector tipo temporal que satisface $n_\mu n^\mu = 1$ y $n^0 > 0$. Diremos que

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = n^\mu \quad (6.50)$$

es el vector de polarización *escalar*. Llamaremos $\epsilon^\mu(\vec{k}, 3)$ polarización *longitudinal* en el plano $n - k$ si $\epsilon_\mu(\vec{k}, 3)n^\mu = 0$ y $\epsilon_\mu(\vec{k}, 3)\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = -1$, es decir,

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \frac{k^\mu - (kn)n^\mu}{\sqrt{(kn)^2 - k^2}}. \quad (6.51)$$

Los otros dos vectores de polarización (*transversa*) $\epsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\epsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ los tomamos ortogonales entre sí y perpendiculares al plano $n - k$, de modo que

$$\epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (6.52)$$

Por ejemplo, en el sistema de referencia en el que el vector de propagación \vec{k} define el eje z y $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ de lo anterior deducimos que

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1), \quad (6.53)$$

y podemos escoger varias bases para las polarizaciones transversas, como

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (\text{lineales}) \quad (6.54)$$

o bien

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, L) = (0, \cos\theta, i\sin\theta, 0), \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, R) = (0, \cos\theta, -i\sin\theta, 0) \quad (\text{elípticas}) \quad (6.55)$$

(que se llaman circulares si $\theta = \pi/4$).

Ya hemos visto que el estado de polarización escalar $|\vec{k}, 0\rangle$ tiene norma negativa (3.116). Por otro lado, el campo electromagnético clásico *en ausencia de fuentes* (radiación) sólo tiene dos estados de polarización, mientras que su versión cuántica parece tener cuatro. Ambos problemas están relacionados y se resuelven, como ya hemos visto, imponiendo que $\partial_\mu A^\mu$ evaluado entre estados físicos se anula (cuantización de Gupta-Bleuler): solamente los dos estados de polarización transversos contribuyen a los observables físicos, así que no tenemos que preocuparnos por los escalares ni los longitudinales. Sin embargo *todos contribuyen al propagador*, que no es un observable. Veamos esto.

Tomemos, para empezar, el gauge de 't Hooft-Feynman ($\xi = 1$), en el que el propagador es

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (6.56)$$

que usando las relaciones de completitud (6.49) puede escribirse como

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{k}, \lambda). \quad (6.57)$$

Separando las contribuciones transversa, longitudinal y escalar tenemos

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{k}, \lambda) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right]. \quad (6.58)$$

Los dos últimos términos los podemos reescribir como suma de

$$\tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) = \frac{in^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2} \quad \text{y} \quad \tilde{D}_R^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2[(kn)^2 - k^2]} [k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)]. \quad (6.59)$$

Si tomamos el sistema de referencia en el que $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, es decir $n^\mu = g^{\mu 0}$ y $kn = k^0$, vemos que el primero de ellos es

$$\begin{aligned} D_C^{\mu\nu}(x - x') &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_C^{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-x')} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{-ik^0(x^0 - x'^0)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x^0 - x'^0). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Para entender el significado de las distintas contribuciones, consideremos un proceso de *scattering* mediado por el intercambio de un fotón (e.g. figura 6.1). En esta situación estamos en *presencia de fuentes*. El elemento de matriz de este proceso puede escribirse como

$$\int d^4 x \int d^4 x' j_{1\mu}(x) D_F^{\mu\nu}(x - x') j_{2\nu}(x') \quad (6.61)$$

donde $j_1^\mu(x)$ y $j_2^\mu(x')$ son dos densidades de corriente que interactúan mediante el campo del fotón. La parte $D_C^{\mu\nu}$ del propagador, en el sistema de referencia que hemos elegido, contribuye con

$$\int d^4 x \int d^4 x' \frac{j_1^0(x) j_2^0(x')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x^0 - x'^0), \quad (6.62)$$

que no es otra cosa que la *interacción instantánea de Coulomb* (¡en el mismo instante de tiempo!) entre las dos densidades de carga $j_1^0(x)$ y $j_2^0(x')$. En cuanto a la parte *restante* $D_R^{\mu\nu}$, nótese que (6.61) en el espacio de momentos es

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j_{1\mu} \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) j_{2\nu}(k) \quad (6.63)$$

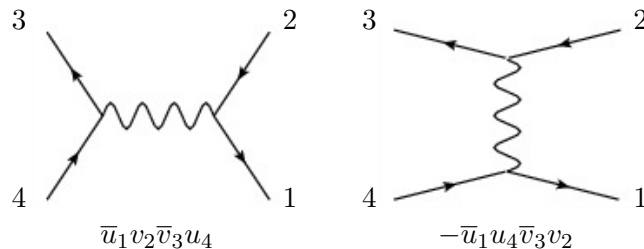
y que las corrientes son conservadas, es decir, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ o bien $k_\mu j^\mu(k) = 0$. Por consiguiente los términos proporcionales a k^μ ó k^ν en $\tilde{D}_F^{\mu\nu}$ son irrelevantes y $\tilde{D}_R^{\mu\nu}(k)$ *no contribuye a la interacción*. Por cierto, ésta es la razón por la que el gauge de 't Hooft-Feynman es válido: si no hubiéramos tomado $\xi = 1$ habría términos extra en el propagador proporcionales a $k^\mu k^\nu$, que son irrelevantes porque se acoplan a una corriente conservada.

Vemos que el campo de la interacción electromagnética tiene una triple naturaleza:^b una parte es completamente *arbitraria* (debido a la invariancia gauge); otra, llamado campo *constrained* o constreñido (la interacción coulombiana, en el sistema de referencia que hemos elegido), está totalmente determinada por las fuentes; y la tercera parte es *dinámica*, consistente en grados de libertad independientes, es la radiación electromagnética pura, que en electrodinámica cuántica se corresponde con los fotones. La parte dinámica, presente incluso en ausencia de fuentes, puede ser subdominante respecto a la constreñida. Así por ejemplo, es la interacción coulombiana la que explica en primera aproximación la estructura del átomo de hidrógeno: el potencial de Coulomb viene dado por la posición del electrón. Ésta última es un operador en mecánica cuántica (lo que determina que las órbitas estén cuantizadas) pero esto no significa que involucre grados de libertad cuánticos del campo electromagnético. Solamente si hacemos un tratamiento refinado descubriremos los efectos cuánticos (el efecto Lamb, por ejemplo).

6.3.2 Sobre los signos relativos entre diagramas

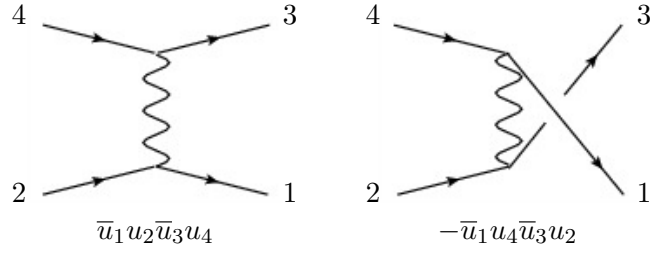
En QED se trabaja con campos espinoriales y ya hemos visto que hay que tener cuidado porque las contracciones de Wick de estos campos pueden dar lugar a signos relativos entre los distintos diagramas que contribuyen a la amplitud de un proceso. Recordemos que hay que mirar si la reordenación de los espinores corresponde a una permutación par o impar. Veamos unos cuantos ejemplos.

– *Scattering de Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$*

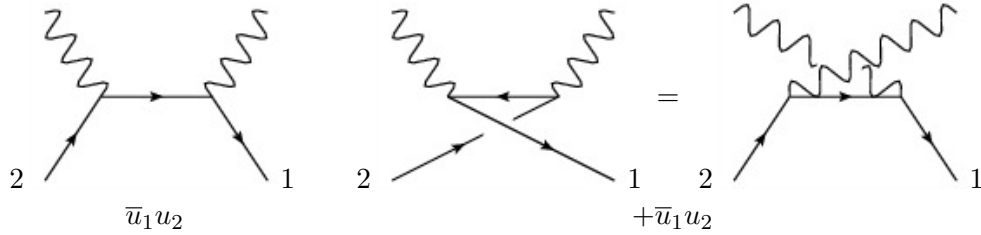


– *Scattering de Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$*

^bPasa igual con todas las fuerzas fundamentales.



– *Scattering de Compton*: $e\gamma \rightarrow e\gamma$ (¡no hay cambio de signo!)



6.3.3 Sobre partículas idénticas

Recordemos también que si hay dos partículas idénticas en el estado final (por ejemplo, $\gamma\gamma$, e^+e^+ , e^-e^-) la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} . \tag{6.64}$$

6.3.4 Sobre las polarizaciones de los bosones vectoriales

– *Caso del fotón*. Tiene dos estados de polarización (*transversos*). Supongamos el sistema de referencia en el que $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ (nuestras conclusiones serán independientes de esta elección gracias a la covariancia Lorentz). Entonces, pueden ser

$$\begin{aligned} \text{lineales: } \epsilon^\mu(\vec{k}, 1) &= (0, 1, 0, 0) , & \epsilon^\mu(\vec{k}, 2) &= (0, 0, 1, 0) \\ \text{elípticas: } \epsilon^\mu(\vec{k}, L) &= (0, \cos \theta, i \sin \theta, 0) , & \epsilon^\mu(\vec{k}, R) &= (0, \cos \theta, -i \sin \theta, 0) . \end{aligned}$$

En cualquier caso, si sumamos sobre los dos estados de polarización,

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} , \quad Q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{6.65}$$

Veamos que, debido a la invariancia gauge, en la práctica podemos ignorar el término $Q_{\mu\nu}$. En efecto, la amplitud de un proceso arbitrario de QED que involucre un fotón externo con momento k (tomamos un fotón saliente) puede escribirse con toda generalidad como

$$\mathcal{M}(\vec{k}, \lambda) = \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) \tag{6.66}$$

y cualquier observable, en este sistema de referencia, será proporcional a

$$\sum_\lambda |\mathcal{M}(\vec{k}, \lambda)|^2 = \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) \mathcal{M}^{\nu*}(\vec{k})$$

$$= |\mathcal{M}^1(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^2(\vec{k})|^2 . \quad (6.67)$$

Ahora bien, sabemos que el campo del fotón se acopla a una corriente conservada mediante una interacción $\int d^4x j^\mu(x)A_\mu(x)$, con $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, así que

$$\mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = \int d^4x e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle \quad (6.68)$$

donde los estados inicial y final incluyen todas las partículas externas excepto el fotón en cuestión. Como la simetría gauge se debe preservar también a nivel cuántico, de la conservación de la corriente y la expresión anterior deducimos^c que

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = i \int d^4x e^{ikx} \langle f | \partial_\mu j^\mu(x) | i \rangle = 0 . \quad (6.69)$$

y por tanto,

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) = \omega \mathcal{M}^0(\vec{k}) - \omega \mathcal{M}^3(\vec{k}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}^0(\vec{k}) = \mathcal{M}^3(\vec{k}) . \quad (6.70)$$

Así que podemos reescribir (6.67) como

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \mathcal{M}^\mu(\vec{k}) \mathcal{M}^{\nu*}(\vec{k}) \\ &= |\mathcal{M}^1(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^2(\vec{k})|^2 + |\mathcal{M}^3(\vec{k})|^2 - |\mathcal{M}^0(\vec{k})|^2 . \end{aligned} \quad (6.71)$$

que equivale a reemplazar

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu} . \quad (6.72)$$

- *Caso de un bosón vectorial masivo.* Tiene tres estados de polarización (uno longitudinal y dos transversos). En este caso podemos elegir el sistema de referencia en reposo, $k^\mu = (M, 0, 0, 0)$ y los estados de polarización

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0) , \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0) , \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1) . \quad (6.73)$$

Si sumamos sobre polarizaciones,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} , \quad Q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (6.74)$$

en el sistema de referencia en reposo. Podemos obtener la expresión válida para $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ con $M^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$ haciendo un *boost* con $\gamma = k^0/M$, $\gamma\vec{\beta} = \vec{k}/M$,

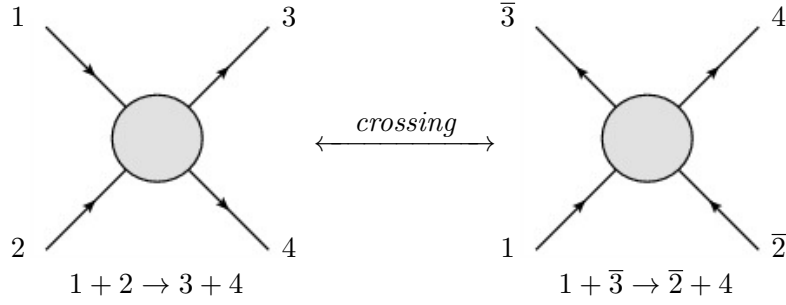
$$\Lambda^\mu_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 & \gamma \\ \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 & \gamma & \gamma\beta_1 \\ \gamma\beta_3 & \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

que conduce a

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \Lambda^0_{\mu} \Lambda^0_{\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} . \quad (6.76)$$

^c0 = $\int d^4x \partial_\mu [e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle] = ik_\mu \int d^4x e^{ikx} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle + \int d^4x e^{ikx} \langle f | \partial_\mu j^\mu(x) | i \rangle$.

6.3.5 Sobre la simetría de *crossing* y las variables de Mandelstam



Los elementos de matriz de procesos tales como $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ y $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ están relacionados mediante la llamada simetría de *crossing*: la matriz S es la misma reemplazando los momentos convenientemente. En este caso,

$$k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2 \xleftarrow{\text{crossing}} k_1, -p_1 \rightarrow -k_2, p_2 \quad (6.77)$$

Antes de poner algunos ejemplos de procesos cuyas amplitudes están relacionadas por la simetría de *crossing*, conviene introducir las *variables de Mandelstam* que resultan muy cómodas para describir la cinemática de los procesos de dos cuerpos \rightarrow dos cuerpos y facilitan mucho la aplicación de esta simetría. Para el proceso del ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2 \end{aligned} \quad (s, t, u) \xleftarrow[k_2 \leftrightarrow -p_1]{\text{crossing}} (t, s, u) \quad (6.78)$$

Es fácil comprobar que $s + t + u = \sum_i m_i^2$, la suma del cuadrado de las masas de las cuatro partículas externas. Así, en términos de variables de Mandelstam, la cinemática del proceso que hemos calculado antes en detalle, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, queda

$$q^2 = s, \quad (6.79)$$

$$(p_1 k_1) = (p_2 k_2) = (m^2 + M^2 - t)/2, \quad (6.80)$$

$$(p_1 k_2) = (p_2 k_1) = (m^2 + M^2 - u)/2, \quad (6.81)$$

$$(p_1 p_2) = (s - 2M^2)/2, \quad (6.82)$$

$$(k_1 k_2) = (s - 2m^2)/2 \quad (6.83)$$

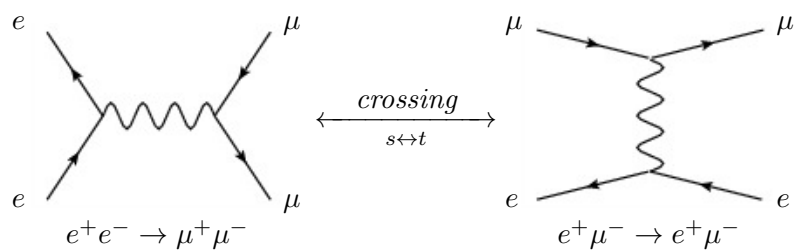
que conduce a

$$\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]. \quad (6.84)$$

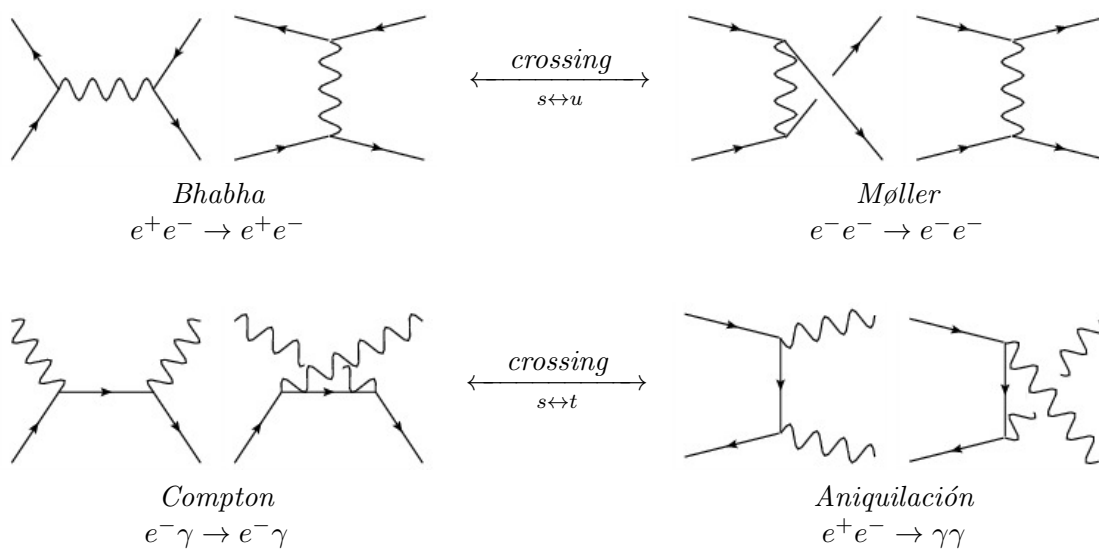
Se dice que este proceso tiene lugar en *canal s*. La simetría de *crossing* nos permite encontrar la amplitud del proceso “cruzado” $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$ intercambiando s con t en la expresión anterior,

$$\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}(e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right], \quad (6.85)$$

que tiene lugar en *canal t*:



Otros ejemplos, en los que contribuyen dos canales, son:



Tema 7

Introducción a las correcciones radiativas

7.1 Correcciones cuánticas: *Loops*

En esta sección veremos que el desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento, que hemos introducido en el tema anterior, es también un desarrollo en potencias de \hbar , es decir, en efectos cuánticos.^a Para comprobarlo, reinsertaremos las constantes \hbar , manteniendo aún un sistema de unidades en el que $c = 1$. En este sistema longitudes y tiempos tienen las mismas dimensiones y lo mismo ocurre con energías y momentos. Sin embargo, longitudes y energías no tienen dimensiones inversas, lo que sí ocurre en el sistema de unidades en el que $\hbar = 1$. Recordemos que

$$\hbar \approx 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \quad (7.1)$$

así que \hbar tiene dimensiones de energía (o momento) por tiempo (o longitud).

Hay dos fuentes principales de potencias de \hbar en el proceso de cuantización. La primera está en las relaciones de conmutación (o anticonmutación). Por ejemplo, en el caso escalar habría que reemplazar la ecuación (3.4) por

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \Rightarrow \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \hbar \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \quad (7.2)$$

Repitiendo los pasos necesarios para calcular el propagador de Feynman (véase §4.4) obtenemos entonces que cada propagador incluye una potencia de \hbar :

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (7.3)$$

El segundo lugar en el que tenemos que introducir explícitamente una potencia de \hbar es el vértice de interacción. La razón es que el producto Ht (acción), donde H es un hamiltoniano y t el tiempo, tiene las dimensiones de \hbar y por tanto en el operador evolución aparece con un factor $1/\hbar$ para que el argumento de la exponencial sea adimensional. Esto afecta a la teoría de perturbaciones discutida en §4.3. Por ejemplo, el campo en la imagen de interacción (4.33) se define

$$\phi_I(t, \vec{x}) \equiv e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (7.4)$$

^aHistóricamente se ha llamado correcciones radiativas a las correcciones cuánticas, porque se calcularon en primer lugar para sistemas atómicos en procesos donde se emite o se absorbe radiación electromagnética.

y así sucesivamente. Siendo cuidadosos con los factores de \hbar obtenemos que la teoría de perturbaciones toma la forma final


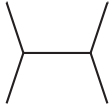
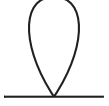

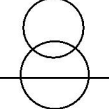
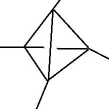
$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle = \frac{\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\exp\left[-i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)/\hbar\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\left\{\exp\left[-i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)/\hbar\right]\right\}|0\rangle}. \quad (7.5)$$

Al desarrollar en serie las exponenciales obtendremos que por cada vértice de nuestra teoría de perturbaciones tenemos que añadir una potencia de $1/\hbar$.

Con estas dos reglas, cada propagador introduce una potencia de \hbar y cada vértice una de \hbar^{-1} , podemos discutir la relación entre el número de *loops* y el de potencias de \hbar en un diagrama de Feynman conexo amputado arbitrario.^b Podemos definir el número de *loops* como el número L de cuadrimentos no fijados por la regla de conservación del momento sobre los que tenemos que integrar para calcular el resultado de la amplitud correspondiente. Así, en un diagrama con I líneas internas y V vértices tenemos

$$L = I - (V - 1) = I - V + 1. \quad (7.6)$$

En efecto, tenemos I cuadrimentos circulando por las líneas internas, sobre los que imponemos $V - 1$ restricciones (una por cada vértice, excepto la global que corresponde a conservación del cuadrimento total). Veamos algunos ejemplos:

	$L = 0 - 1 + 1 = 0$		$L = 1 - 2 + 1 = 0$	
	$L = 1 - 1 + 1 = 1$		$L = 2 - 2 + 1 = 1$	(7.7)
	$L = 2 - 1 + 1 = 2$		$L = 3 - 4 + 1 = 0$	

Nótese que normalmente L coincide con el número de lazos en el diagrama de Feynman. Pero no siempre, como se ve en el último ejemplo, en el que hay 4 lazos pero $L = 3$.

Aplicando ahora que cada propagador conlleva una potencia de \hbar y cada vértice una de \hbar^{-1} vemos que un diagrama conexo amputado con L *loops* es de orden $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$. Por tanto, el desarrollo en *loops* corresponde a un desarrollo en potencias de \hbar .

Puede sorprender sin embargo que el primer término del desarrollo perturbativo sea proporcional \hbar^{-1} , pero esto se debe a que hemos normalizado la acción dividiendo por \hbar por argumentos dimensionales, de manera que debemos descontar ese factor y concluir que realmente la contribución de cero *loops* (orden \hbar^0) corresponde al límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$).

Otro comentario importante es que en teorías con un único acoplamiento, el desarrollo perturbativo en ese acoplamiento y el desarrollo en *loops* coinciden, si fijamos el número de patas externas. La razón es que en ese caso existe una relación entre L y V . Por ejemplo, en la teoría $\lambda\phi^4$ cada vértice tiene cuatro patas, así que

$$4V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V - E/2 + 1, \quad (7.8)$$

^bAunque hayamos mostrado el ejemplo explícito del caso escalar, la misma regla aplica al caso de campos de espines arbitrarios.

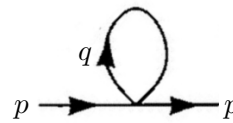
siendo E el número de patas externas e I el de líneas internas. Esta relación viene de que $4V$ es el número total de líneas que confluyen en vértices, pero las que corresponden a líneas internas cuentan dos veces. Es fácil comprobar que esta relación se cumple en todos los ejemplos de (7.7), excepto para el primero de la columna de la derecha, en el que los vértices tienen tres patas, pues corresponden a una teoría $\lambda\phi^3$ y la relación es entonces

$$3V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V/2 - E/2 + 1 . \quad (7.9)$$

7.2 Divergencias ultravioletas

El hecho de que los cálculos a uno o más *loops* involucren una integración sobre momentos, cuyos módulos van de cero hasta infinito, conduce a una intrigante propiedad de la teoría cuántica de campos: la posible aparición de divergencias en los cálculos perturbativos. El origen y naturaleza de estas divergencias es diverso y su estudio da lugar a algunos de los aspectos más interesantes de la teoría cuántica de campos, como el grupo de renormalización. En este curso nos vamos a limitar a hacer una breve introducción a algunos de estos fenómenos, poniendo énfasis en la realización de cálculos explícitos.

Veamos en un ejemplo concreto cómo aparecen algunas de estas divergencias. Tomemos de nuevo la teoría $\lambda\phi^4$ y calculemos el diagrama amputado que aparece en (4.115)



$$-iB = \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} . \quad (7.10)$$

Esta integral puede abordarse más fácilmente en el espacio Euclídeo, haciendo el cambio de variables $q^0 = iq_E^0$ (rotación de Wick), manteniendo $\vec{q} = \vec{q}_E$ y por tanto sustituyendo $q^2 = -q_E^2$. De esta forma la integral factoriza en el producto de una integral angular en cuatro dimensiones por una integral sobre la coordenada radial q_E entre cero e infinito (estudiaremos en detalle este procedimiento en un número arbitrario de dimensiones en la sección §7.3):

$$B = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E q_E^3 \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2} . \quad (7.11)$$

La integral resultante es divergente. Para poder dar sentido al resultado *regularizaremos* la integral para aislar la divergencia. En esta ocasión usaremos como *regulador* un *cut-off* en momentos, es decir, integraremos hasta un valor finito Λ que al final haremos tender a infinito. Haciendo esto tenemos

$$B = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\Lambda^2 + m^2 \ln \frac{m^2}{m^2 + \Lambda^2} \right) . \quad (7.12)$$

Vemos por tanto que este diagrama presenta una *divergencia ultravioleta*, es decir, en el límite de momento infinito. En ocasiones un diagrama puede también tener divergencias infrarrojas (en el límite de momento cero).

En el resto de este tema veremos cómo clasificar, regularizar e interpretar las divergencias ultravioletas que aparecen en cálculos a nivel de uno o más *loops* en teoría cuántica de campos.

El comportamiento ultravioleta de un diagrama se puede caracterizar por su *grado superficial de divergencia*, D , que se define como la diferencia entre el número de potencias del momento de integración en el numerador menos las del denominador. En teorías en las que los vértices no dependen del momento, el grado superficial de divergencia depende del número de *loops* (potencias positivas del momento) y del número y tipo de propagadores (potencias negativas del momento, simples para fermiones, dobles para bosones). Así por ejemplo tenemos

$$\lambda\phi^n \ (n \geq 3) \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I \tag{7.13}$$

$$\text{QED} \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I_\gamma - I_f \tag{7.14}$$

donde $I_{\gamma,f}$ se refiere al número de líneas internas fotónicas y fermiónicas, respectivamente. En general, un diagrama divergerá logarítmicamente, linealmente, cuadráticamente y así sucesivamente para $D \geq 0$, aunque esto es *condición necesaria pero no suficiente*, pues hay excepciones a esta regla. Antes, reescribamos D de una manera más útil en términos del número de patas externas y vértices. La expresión depende de la teoría en cuestión. Estudiemos cada caso por separado.

7.2.1 $\lambda\phi^n$

En este caso (7.13) conduce a

$$D = 4L - 2I = (n - 4)V - E + 4, \tag{7.15}$$

donde hemos usado las relaciones

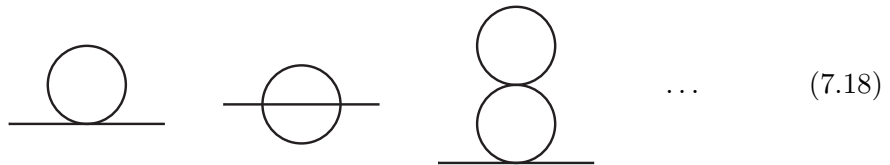
$$L = I - V + 1, \quad nV = E + 2I. \tag{7.16}$$

Vemos que cuanto mayor es el número de patas externas, a igual número de vértices, menor es D . Tenemos pues un número finito de posibles diagramas divergentes ($D \geq 0$), llamados *divergencias primitivas*. Veamos cuáles son en el caso de $\lambda\phi^4$ ($n = 4$), es decir

$$D = 4 - E \geq 0. \tag{7.17}$$

Nótese que en este caso E es siempre par.

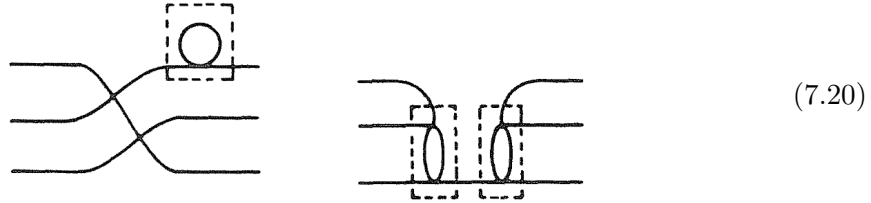
- $E = 0$: Los diagramas vacío-vacío que aparecen en (4.100). Son cuárticamente divergentes ($\propto \Lambda^4$) y contribuyen a la *energía del vacío*, pero no son relevantes para hallar las amplitudes de scattering pues se cancelan en la fórmula LSZ.
- $E = 2$: Las funciones de Green de dos puntos. Son cuadráticamente divergentes ($\propto \Lambda^2$) y contribuyen a la *autoenergía del campo*:



- $E = 4$: Las funciones de Green de cuatro puntos. Son logarítmicamente divergentes ($\propto \ln \Lambda$) y contribuyen a la *corrección al vértice*:



Podría pensarse que diagramas con $D < 0$, es decir $E \geq 6$ son finitos, pero esto solamente es cierto si no contienen subdiagramas divergentes (con $E = 2$ o $E = 4$). Por ejemplo, los siguientes diagramas con $D = -2$ ($E = 6$) son divergentes:



En realidad, para que un diagrama sea finito, su grado superficial de divergencia D y el de todos sus subdiagramas debe ser negativo (teorema de Weinberg).

Vemos por tanto que en la teoría $\lambda\phi^4$ hay un número finito de divergencias primitivas (dos en este caso) que afectan a la predicción de nuestros observables: la autoenergía del campo y la corrección al vértice. Cuando esto ocurre la teoría es *renormalizable* que, como veremos, quiere decir que podemos reabsorber todos los infinitos que aparezcan con un número finito de medidas, estando el resto de predicciones de la teoría bien definidas. Este proceso de reabsorber infinitos se denomina *renormalización* y lo discutiremos brevemente más adelante, en el caso de la QED.

La teoría $\lambda\phi^3$ también tiene un número finito de divergencias primitivas, pues en este caso $D = 4 - E - V$. Al aumentar el número de patas externas, independientemente del número de vértices, llegaremos a $D < 0$. Pero, además, en este caso ocurre que diagramas con el mismo número de patas externas son cada vez más convergentes haciéndose finitos a partir de un número determinado de *loops*. Este tipo de teorías se llaman *super-renormalizables*.

Teorías $\lambda\phi^n$ con $n > 4$, por el contrario, son *no renormalizables* puesto que, cualquiera que sea el número de patas externas de un diagrama, D siempre será positivo para un número suficientemente alto de vértices. Esto quiere decir que hay un número infinito de divergencias primitivas, que requerirían un número infinito de medidas para ser reabsorbidas.

El hecho de que $\lambda\phi^n$ con $n \leq 4$ sean teorías renormalizables es un ejemplo del *criterio de renormalizabilidad* que establece que un lagrangiano de interacción cuyos coeficientes (constantes de acoplamiento) tengan dimensiones de masa elevada a una potencia positiva o nula (adimensionales) es renormalizable. En nuestro ejemplo, como $[\mathcal{L}] = M^4$ y $[\phi] = M$, las constantes tienen dimensiones $[\lambda] = M^{4-n}$. Podemos entender el criterio de renormalizabilidad del siguiente modo: si cada vértice de interacción introduce un acoplamiento con dimensiones de masa negativas entonces, por argumentos dimensionales, éste debe compensarse con algún otro parámetro con dimensiones positivas de masa (por ejemplo el *cut-off* Λ) si no hay cancelaciones debidas a alguna simetría. En tal caso habrá un número indeterminado de funciones de Green que serán divergentes cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ y por tanto no podremos reabsorber todos los infinitos en un número finito de medidas.

Hemos visto ejemplos (7.20) en los que D puede ser negativo y aún así el diagrama es divergente. Pero también puede ocurrir lo opuesto: diagramas con grado superficial de divergencia positivo, y por tanto a priori divergentes, que den un resultado finito. Esto es debido a la presencia de simetrías que reducen el grado de divergencia de algunos diagramas. Esto es lo que ocurre en QED, como veremos a continuación.

7.2.2 QED

En este caso (7.14) conduce a

$$D = 4L - 2I_\gamma - I_f = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_f \quad (7.21)$$

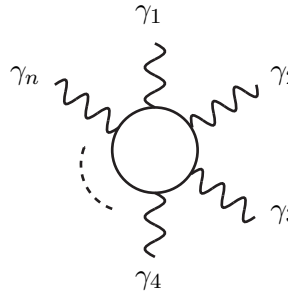
donde hemos usado las relaciones

$$L = I - V + 1 = I_\gamma + I_f - V + 1, \quad V = E_\gamma + 2I_\gamma, \quad 2V = E_f + 2I_f. \quad (7.22)$$

Vemos pues que en QED los diagramas con divergencias primitivas son potencialmente aquellos para los que $D \geq 0$, es decir

$$E_\gamma + \frac{3}{2}E_f \leq 4. \quad (7.23)$$

Antes de discutir todas las posibilidades conviene demostrar el *Teorema de Furry* que establece que funciones de Green sin líneas externas fermiónicas ($E_f = 0$) y con un número impar de líneas externas fotónicas ($E_\gamma = \text{impar}$) son cero a todo orden en teoría de perturbaciones debido a la *conservación de la conjugación de carga* de la QED:



$$= 0, \quad n \text{ impar} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (CA_{\mu_1}(x_1)C) \cdots (CA_{\mu_n}(x_n)C) C e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} C | 0 \rangle \\ &= (-1)^n \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (7.25)$$

donde hemos usado $C^2 = 1$, $C|0\rangle = |0\rangle$, $CA_\mu C = -A_\mu$ y $C\mathcal{H}_{\text{QED}}C = \mathcal{H}_{\text{QED}}$. Para n impar estas funciones de Green coinciden con su opuesta y por tanto deben anularse.

Una vez descartadas estas funciones de Green, clasifiquemos el resto que cumplen (7.23), es decir $D = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_f \geq 0$:

- $E_f = 0$
 - $E_\gamma = 0$: *Energía del vacío*. Cuárticamente divergente pero irrelevante para procesos de scattering.
 - $E_\gamma = 2$: *Autoenergía del fotón*. A priori cuadráticamente divergente, aunque la simetría gauge hace que la divergencia sea en realidad logarítmica.



$$\dots \quad (7.26)$$


- $E_\gamma = 4$: *Light by light scattering*. A priori logarítmicamente divergente aunque de nuevo la simetría gauge la protege haciéndola finita.



... (7.27)

■ $E_f = 2$

- $E_\gamma = 0$: *Autoenergía del fermión*. A priori linealmente divergente, aunque en este caso la simetría quiral reduce la divergencia a logarítmica.



... (7.28)

- $E_\gamma = 1$: *Corrección al vértice*. Divergencia logarítmica.



... (7.29)

Las divergencias primitivas en QED son por tanto la autoenergía del fotón, la autoenergía del fermión y la corrección al vértice. Sus contribuciones a un *loop* se muestran en (7.26), (7.28) y (7.29), respectivamente.

7.3 Regularización dimensional

Hemos anunciado previamente que en teoría cuántica de campos se pueden hacer predicciones precisas y sin ambigüedades a pesar de la aparición de infinitos en los cálculos a uno o más *loops*. El procedimiento, denominado *renormalización*, consiste en absorber los infinitos en un número finito de medidas experimentales de manera que todos los demás observables serán finitos. Pero antes tenemos que regularizar los infinitos para poder manipularlos. En la sección anterior usamos un regulador muy sencillo, un *cut-off* en el momento del *loop*, pero este regulador no resulta óptimo. La razón es que viola explícitamente algunas de las simetrías de la teoría que son importantes a la hora de implementar el proceso de renormalización. En particular, en (7.12) se viola la invariancia Lorentz. En esta sección estudiaremos, mediante el ejemplo concreto de la autoenergía del electrón, un tipo de regularización que sí mantiene todas las simetrías relevantes, incluyendo las invariancias Lorentz y gauge. El método que emplearemos se conoce como *regularización dimensional* y consiste en asumir que en lugar de 4 dimensiones espacio-temporales trabajamos en $d \equiv 4 - \epsilon$.^c Eligiendo el valor de ϵ adecuado cualquier diagrama se puede hacer finito. Al

^cNo confundir este ϵ con el $\epsilon \rightarrow 0^+$ de la prescripción de Feynman para los propagadores, que en adelante se sobreentiende y no escribiremos.

Para hallar $\Sigma(p)$ se procede orden a orden en TP:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \circlearrowleft \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} \quad (1 \text{ loop}) \\
 &+ \text{---} \text{---} \text{---} \quad + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (2 \text{ loops}) \\
 &+ \dots \quad (7.38)
 \end{aligned}$$

Vamos a calcularla ahora a 1 *loop* para ilustrar el método de regularización dimensional:

$$-i\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie)\gamma^\mu \frac{i(\not{q} + m_0)}{q^2 - m_0^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p-q)^2} (-ie)\gamma^\nu . \quad (7.39)$$

Como hemos dicho esta integral es divergente y para regularizarla la hallaremos en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones:

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (\not{q} + m_0) \gamma_\mu}{(q^2 - m_0^2)(p-q)^2} , \quad (7.40)$$

donde hemos introducido un parámetro μ con dimensiones de masa, para que Σ mantenga las dimensiones correctas independientemente del valor de d . Este parámetro no es físico, lo hemos introducido por consistencia en el proceso de regularización y no afectará a ningún observable físico, aunque puede aparecer en cálculos intermedios de magnitudes no observables.

A continuación describiremos, usando este ejemplo como ilustración, algunas de las técnicas estándar en cálculos a un *loop*.

1. En primer lugar necesitamos extender las reglas de la *Diracología* a d dimensiones. Para ello hay que notar que los índices espacio-temporales recorren las d dimensiones mientras que las matrices de Dirac siguen siendo matrices 4×4 (espacio espinorial). Se cumplen por tanto las siguientes relaciones:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4} , \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = d , \quad (7.41)$$

que conducen a las identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \mathbf{1}_{4 \times 4} = (4 - \epsilon) \mathbf{1}_{4 \times 4} , \quad (7.42)$$

$$\gamma^\mu \not{q} \gamma_\mu = -\not{q} \gamma^\mu \gamma_\mu + 2\not{q} = -(d-2)\not{q} = -(2-\epsilon)\not{q} . \quad (7.43)$$

2. Otra técnica consiste en la introducción de *parámetros de Feynman*, que nos permiten agrupar el producto de propagadores en una expresión que manipularemos después de forma sencilla. La forma general para n propagadores se basa en la siguiente igualdad (fácilmente demostrable):

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n} . \quad (7.44)$$

En nuestro cálculo hay dos factores en el denominador (dos propagadores),

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA_1 + (1-x)A_2]^2} \quad (7.45)$$

que podemos identificar como $A_2 = q^2 - m_0^2$ y $A_1 = (p - q)^2$, así que

$$\frac{1}{(q^2 - m_0^2)(p - q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + x(p^2 - 2pq) - (1-x)m_0^2]^2}. \quad (7.46)$$

3. Lo interesante de esta parametrización es que ahora podemos hacer un cambio de variable para *completar un cuadrado perfecto* en el denominador, *desplazando el momento de integración*. En nuestro caso, si introducimos un nuevo momento

$$\ell \equiv q - xp \quad (7.47)$$

en (7.40), usamos las identidades (7.42) y (7.43), e introducimos el parámetro de Feynman de (7.46) tenemos

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{-(2-\epsilon)(\not{\ell} + x\not{p}) + (4-\epsilon)m_0}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (7.48)$$

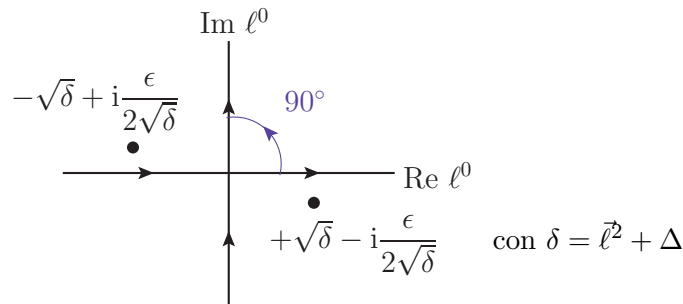
donde

$$\Delta \equiv -x(1-x)p^2 + (1-x)m_0^2. \quad (7.49)$$

Una cuestión muy importante es que el cambio de variable realizado no es más que una traslación, que no introduce ningún factor jacobiano. Sin embargo, sólo tenemos garantizado que la integral no cambia bajo esa traslación de la variable de integración si la integral es finita, lo cual se cumple gracias a que la hemos regularizado antes de hacer estas manipulaciones.

4. Para integrar (7.48) realizamos lo que se conoce como *rotación de Wick*, que consiste en hacer un nuevo cambio de variable:

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \vec{\ell} = \vec{\ell}_E \Rightarrow \ell^2 = (\ell^0)^2 - \vec{\ell}^2 = -(\ell_E^0)^2 - \vec{\ell}_E^2 = -\ell_E^2. \quad (7.50)$$



(Δ es una función de x definida positiva en la región de momentos de interés, como pronto veremos.)

El subíndice E nos recuerda que con la rotación de Wick pasamos del espacio de Minkowski al espacio Euclídeo, en el que el módulo al cuadrado de un cuadrivector es la suma de los cuadrados de todas sus componentes, sin signo relativo entre la componente temporal y las espaciales.

De nuevo es necesario hacer un comentario importante. El cambio de variable que genera la rotación de Wick puede resultar extraño a primera vista, pues define momentos complejos. Sin embargo lo único que estamos haciendo es girar el contorno de integración originalmente sobre el eje ℓ^0 real, rotándolo 90° en el sentido opuesto a las agujas del reloj. El teorema de Cauchy garantiza que la integral no varía pues en este giro los contornos no cruzan ninguno de los polos definidos por la prescripción $i\epsilon$ de Feynman.

5. Ahora que la integral se calcula en el espacio Euclídeo podemos descomponerla en una parte radial y otra angular en d dimensiones. Supongamos que el exponente del denominador es n en lugar de 2, para resolver un caso más general. Entonces

$$\int d^d \ell_E \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \int d\Omega_d \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (7.51)$$

donde $d\Omega_d$ es el elemento de ángulo sólido en d dimensiones. En efecto:

- a) A partir de la integral de una gaussiana:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp \left\{ - \sum_i x_i^2 \right\} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \int d\Omega_d \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t} = \int d\Omega_d \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \end{aligned} \quad (7.52)$$

donde hemos introducido la función *Gamma de Euler*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t}. \quad (7.53)$$

Por tanto,

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)}. \quad (7.54)$$

- b) En cuanto a la parte radial:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(t + \Delta)^n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \int_0^1 dz z^{n-\frac{d}{2}-1} (1-z)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n - d/2) \Gamma(d/2)}{\Gamma(n)} \end{aligned} \quad (7.55)$$

donde se ha hecho el cambio $z = \Delta/(t + \Delta)$ y hemos introducido la función *Beta de Euler*:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dz z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (7.56)$$

6. Conviene conocer algunas *propiedades de la Gamma de Euler*:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \quad (7.57)$$

$\Gamma(x)$ tiene polos simples en $x = 0, -1, -2, \dots$. Desarrollando en serie en torno a los polos,

$$x = 0 ; \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) , \quad (7.58)$$

$$x = -1 ; \quad \Gamma(x) = -\frac{1}{(x+1)} + \gamma - 1 + \dots + \mathcal{O}(x+1) , \quad (7.59)$$

donde $\gamma = 0.5772 \dots$ es la constante de Euler-Mascheroni. En particular, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ ($d \rightarrow 4$) tenemos

$$\Gamma(2 - d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (7.60)$$

$$\Gamma(d/2) = \Gamma(2) = 1 . \quad (7.61)$$

Ya podemos calcular la integral (7.48), haciendo la rotación de Wick (7.50) y usando el resultado (7.51) para $n = 2$:

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\epsilon/2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon/2) [-(2-\epsilon)x\not{p} + (4-\epsilon)m_0] \Delta^{-\epsilon/2} , \quad (7.62)$$

donde hemos utilizado que la integral sobre $\not{\ell}$ es cero por ser el integrando impar y el dominio de integración simétrico. Ahora, además de desarrollar en serie la función Gamma, debemos también desarrollar las potencias cuyo exponente es proporcional a ϵ

$$(4\pi)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (7.63)$$

$$\left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) . \quad (7.64)$$

Poniéndolo todo junto obtenemos finalmente

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ x\not{p} \left[-2 \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) + 2 \right] + m_0 \left[4 \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) - 2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (7.65)$$

donde hemos definido

$$\Delta_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi . \quad (7.66)$$

Este resultado presenta varias propiedades interesantes. En primer lugar, hemos parametrizado las divergencias ultravioletas en forma de polos en ϵ . En segundo lugar, $\Sigma(p)$ depende a un *loop* explícitamente del parámetro μ . Esto puede ocurrir porque Σ no es un observable. Centrando nuestra atención en la parte divergente^d podemos hacer fácilmente la integral sobre el parámetro de Feynman obteniendo

$$\Sigma^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\not{p} + 4m_0) + \text{finito} . \quad (7.67)$$

^dHemos ignorado una *divergencia infrarroja*, que se puede tratar introduciendo una masa ficticia para el fotón (evita que Δ se anule) que al final del cálculo se hace tender a cero.

7.4 Renormalización de la QED

Hemos visto que las divergencias primitivas de la QED son la autoenergía del electrón, la del fotón y la corrección al vértice. Acabamos de calcular la primera a un *loop* en regularización dimensional:

$$\text{Diagrama de un loop de electrón} = -i\Sigma^{(1)}(p) . \quad (7.68)$$

Procediendo de forma análoga pueden hallarse las otras dos

$$\text{Diagrama de un loop de fotón} = i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) , \quad \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) \equiv (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi^{(1)}(k^2) , \quad (7.69)$$

$$\text{Diagrama de un vértice de electrón} = ie\Lambda_\mu^{(1)}(p, p') . \quad (7.70)$$

En (7.69) se ha introducido $\Pi(k^2)$, llamada *polarización del vacío* por razones que veremos enseguida, asumiendo una estructura tensorial para la *autoenergía del fotón* $\Pi_{\mu\nu}(k^2)$ que está justificada por covariancia Lorentz,

$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = A(k^2)g_{\mu\nu} + B(k^2)k_\mu k_\nu \quad (7.71)$$

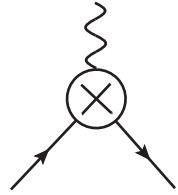
e invariancia gauge,^e

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0 . \quad (7.72)$$

Para ver sus implicaciones, desarrollemos perturbativamente en términos de funciones de dos puntos 1PI:

$$\begin{aligned} \mu \text{ wavy line } \nu &= \text{wavy line} + \text{wavy line} \textcircled{1PI} \text{ wavy line} + \text{wavy line} \textcircled{1PI} \textcircled{1PI} \text{ wavy line} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{k^2} [i(k^2 g^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma) \Pi(k^2)] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{k^2} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{k^2} \Delta^\rho_\nu \Pi(k^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{k^2} \Delta^\rho_\sigma \Delta^\sigma_\nu \Pi^2(k^2) + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{k^2} \Delta^\rho_\nu [\Pi(k^2) + \Pi^2(k^2) + \dots] \\ &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{i}{k^2} [1 + \Pi(k^2) + \Pi^2(k^2) + \dots] - \frac{i}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 [1 - \Pi(k^2)]} + \frac{ik_\mu k_\nu}{k^4} \frac{\Pi(k^2)}{1 - \Pi(k^2)} \end{aligned} \quad (7.73)$$

^eEsta propiedad del tensor $\Pi_{\mu\nu}$ se obtiene a partir de la *identidad de Ward-Takahashi* (7.113-7.116), que es una consecuencia de la invariancia gauge.



$$= ie\gamma^\mu \delta Z_1 \quad (7.87)$$

4. Los *contratérminos* se relacionan con las constantes de renormalización que hemos introducido mediante:

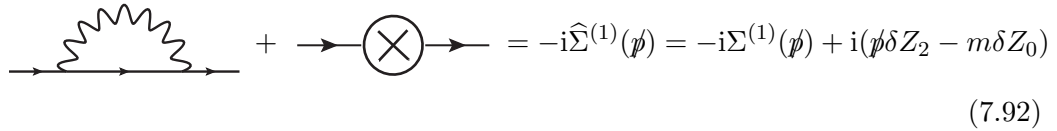
$$Z_2 = 1 + \delta Z_2 = Z_\psi, \quad (7.88)$$

$$Z_0 = 1 + \delta Z_0 = Z_m Z_\psi, \quad (7.89)$$

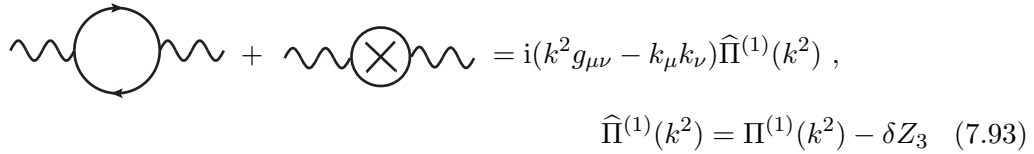
$$Z_1 = 1 + \delta Z_1 = Z_e Z_\psi Z_A^{1/2}, \quad (7.90)$$

$$Z_3 = 1 + \delta Z_3 = Z_A. \quad (7.91)$$

5. Las *funciones renormalizadas* $\widehat{\Sigma}(\not{p})$, $\widehat{\Pi}(k^2)$ y $\widehat{\Lambda}_\mu(p, p')$ se obtienen añadiendo diagramas con contratérminos (7.85), (7.86) y (7.87). Así por ejemplo, a 1 *loop*:



$$= -i\widehat{\Sigma}^{(1)}(\not{p}) = -i\Sigma^{(1)}(\not{p}) + i(\not{p}\delta Z_2 - m\delta Z_0) \quad (7.92)$$



$$= i(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\widehat{\Pi}^{(1)}(k^2),$$

$$\widehat{\Pi}^{(1)}(k^2) = \Pi^{(1)}(k^2) - \delta Z_3 \quad (7.93)$$

6. Los contratérminos se calculan orden a orden en TP y se fijan mediante *condiciones de renormalización* de modo que las divergencias se cancelan. Existen distintos modos de lograr este objetivo, llamados *esquemas de renormalización*. El mismo contratérmino en dos esquemas de renormalización distintos difiere a lo sumo en una cantidad finita.

En QED se utiliza el *esquema de renormalización on-shell*, en el que los contratérminos se fijan mediante las siguientes condiciones de renormalización:

- El propagador renormalizado del electrón es

$$\frac{i}{\not{p} - m - \widehat{\Sigma}(\not{p})} = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - m} + \text{regular cerca de } \not{p} = m, \quad (7.94)$$

donde

$$Z_\psi = \left(1 - \left. \frac{d}{d\not{p}} \widehat{\Sigma}(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} \right)^{-1}. \quad (7.95)$$

Para que la masa que aparece en el propagador sea la masa física debe imponerse

$$\boxed{\widehat{\Sigma}(m) = 0 \Rightarrow m\delta Z_0 = -\Sigma(m)} \quad (7.96)$$

y el residuo del propagador debe ser $Z_\psi = 1$, lo que implica:

$$\boxed{\left. \frac{d}{d\not{p}} \widehat{\Sigma}(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0 \Rightarrow \delta Z_2 = \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m}} \quad (7.97)$$

- El propagador renormalizado del fotón es

$$-\frac{ig_{\mu\nu}Z_A}{k^2} + \dots \quad (7.98)$$

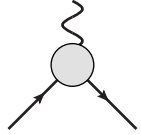
donde

$$Z_A = \frac{1}{1 - \widehat{\Pi}(0)} . \quad (7.99)$$

Para que coincida con el propagador de un fotón sin masa el residuo debe ser $Z_A = 1$, lo que implica:

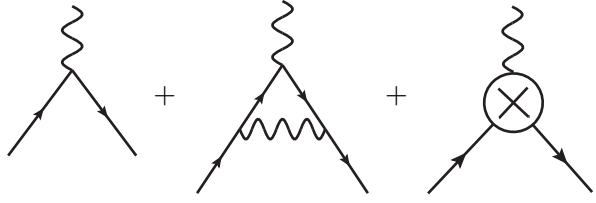
$$\boxed{\widehat{\Pi}(0) = 0 \Rightarrow \delta Z_3 = \Pi(0)} \quad (7.100)$$

- El vértice renormalizado del electrón es



$$= ie\Gamma^\mu(p, p') = ie\gamma^\mu + ie\widehat{\Lambda}^\mu(p, p') \quad (7.101)$$

donde, por ejemplo a 1 *loop*:



$$= ie\gamma_\mu + ie\Lambda_\mu^{(1)} + ie\gamma_\mu\delta Z_1 . \quad (7.102)$$

Se puede demostrar que la estructura Lorentz más general de este vértice para electrones *on-shell* es

$$ie\Gamma^\mu(p, p')\Big|_{p^2=p'^2=m^2} = ie \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + iF_2(q^2)\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] , \quad (7.103)$$

donde los factores de forma F_1 y F_2 están relacionados con la carga y el momento dipolar magnético anómalo, respectivamente. La unidad de carga eléctrica e se define a partir del acoplamiento de un electrón *on-shell* con un fotón cuando el momento transferido $q = p' - p \rightarrow 0$ (*límite de Thomson*):

$$ie\Gamma^\mu(p, p) = ie\gamma^\mu . \quad (7.104)$$

Por tanto

$$\boxed{\widehat{\Lambda}(p, p) = 0 \Rightarrow \delta Z_1 = -\delta F_1(0)} \quad (7.105)$$

donde hemos definido por conveniencia $F_1(q^2) \equiv 1 + \delta F_1(q^2)$. Nótese que a 1 *loop* a F_2 no contribuye ningún contratérmino que pueda usarse para absorber una divergencia, y de hecho es finito. Esto ocurre en teorías renormalizables con los factores de forma que acompañan a operadores de dimensión canónica mayor que 4 (en este caso $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$, que tiene dimensión 5).

Las constantes de renormalización que acabamos de fijar no son independientes, sino que están relacionadas por la simetría gauge mediante la *identidad de Ward-Takahashi*:

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{d\Sigma}{dp^\mu} . \quad (7.106)$$

Analicemos esto brevemente. Recordemos que la simetría gauge determina la forma de la interacción (acoplamiento mínimo), que a nivel árbol (orden cero) es

$$ie\Gamma_\mu^{(0)}(p, p') = ie\gamma_\mu , \quad (7.107)$$

Por tanto, podemos escribir

$$q^\mu \Gamma_\mu^{(0)}(p, p+q) = \not{q} = (\not{p} + \not{q} - m) - (\not{p} - m) = \left[i\tilde{S}_F^{-1}(p+q) - i\tilde{S}_F^{-1}(p) \right]^{(0)} . \quad (7.108)$$

Esta relación resulta ser *válida a todo orden* en TP, así que también se cumple

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p+q) = \left[i\tilde{S}_F^{-1}(p+q) - i\tilde{S}_F^{-1}(p) \right] , \quad i\tilde{S}_F^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p) . \quad (7.109)$$

Esta igualdad, que es la base de la identidad (7.106), relaciona funciones de Green de dos y de tres puntos. Si ahora usamos (7.101) la expresión anterior implica

$$q^\mu \Gamma^\mu(p, p+q) = \not{q} + q^\mu \Lambda_\mu(p, p+q) = \not{q} - \Sigma(p+q) + \Sigma(p) . \quad (7.110)$$

Tomando el límite $q \rightarrow 0$ obtenemos finalmente (7.106). La identidad de WT se define para el lagrangiano original. Para conseguir que el lagrangiano renormalizado preserve la simetría gauge, hemos de imponer que las contribuciones de los contratérminos también verifiquen la igualdad (7.106). A partir de (7.92) y (7.102),

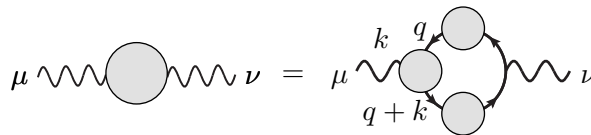
$$\Lambda_\mu^{\text{CT}} = \gamma_\mu \delta Z_1 , \quad \Sigma^{\text{CT}} = -(\not{p} \delta Z_2 - m \delta Z_0) \quad (7.111)$$

así que,

$$\Lambda_\mu^{\text{CT}} = -\frac{d\Sigma^{\text{CT}}}{dp^\mu} \Rightarrow \delta Z_1 = \delta Z_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2 , \quad (7.112)$$

que es la relación constantes de renormalización que habíamos anunciado.

La identidad de WT (7.110) implica (7.72). En efecto, diagramáticamente:

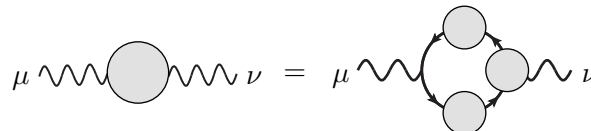


$$\mu \text{ wavy } \text{blob} \text{ wavy } \nu = \mu \text{ wavy } \text{blob} \text{ wavy } \nu \quad (7.113)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}(k^2) = -\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ ie\gamma_\nu \tilde{S}_F(q+k) ie\Gamma_\mu(q, q+k) \tilde{S}_F(q) \right\} \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) &= -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \tilde{S}_F(q+k) k^\mu \Gamma_\mu(q, q+k) \tilde{S}_F(q) \right\} \\ &= -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \left[\tilde{S}_F(q) - \tilde{S}_F(q+k) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.115)$$

donde se ha usado (7.109) y se ha desplazado la variable de integración de q a $q+k$. Para demostrar que también $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0$ basta escribir:



$$\mu \text{ wavy } \text{blob} \text{ wavy } \nu = \mu \text{ wavy } \text{blob} \text{ wavy } \nu \quad (7.116)$$

Nótese que hemos representado el diagrama dos maneras (7.113) y (7.116) pero no podemos poner Γ en ambos vértices pues en tal caso estaríamos contando dos veces diagramas como el siguiente:


(7.117)

La identidad de WT (7.112) tiene otra importante consecuencia: la renormalización de la carga es *universal*, independiente del fermión, pues se debe exclusivamente a las correcciones cuánticas al propagador del fotón, ya que como $Z_1 = Z_2$ tenemos

$$e_0 = Z_e e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e = Z_3^{-1/2} e \Rightarrow e = \sqrt{Z_3} e_0, \quad Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}. \quad (7.118)$$

Veamos que la carga (constante de acoplamiento) que encontramos experimentalmente cuando medimos la intensidad de una interacción electromagnética (figura 7.1) no es la carga física e sino una *carga efectiva* $e(Q^2)$ que depende del momento transferido en el proceso (convencionalmente $Q^2 \equiv -q^2 \geq 0$):^g

$$\frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{e^2 Z_3^{-1}}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{e^2}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(0)]} = \frac{e^2}{1 - \widehat{\Pi}(q^2)} \equiv e^2(Q^2) \quad (7.119)$$

De hecho vemos que en efecto la carga física es $e = e(0)$, la correspondiente al límite de Thomson ($q \rightarrow 0$) en el que el electrón no se desvía, es decir, las cargas están muy alejadas. Si calculamos $\Pi(q^2)$ a un *loop* usando regularización dimensional obtenemos

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2 - x(1-x)q^2}{\mu^2} \right], \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (7.120)$$

Si nos vamos a distancias muy cortas,

$$\Pi(Q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\Delta_\epsilon + \frac{5}{3} \right) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}, \quad Q^2 = -q^2 \gg m^2. \quad (7.121)$$

Así que usando (7.119) podemos definir una *constante de acoplamiento efectiva*

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - [\Pi(Q^2) - \Pi(Q_0^2)]} = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (7.122)$$

de modo que el parámetro μ que se introduce en regularización dimensional cobra un significado: $\mu = Q_0$ es la *escala a la que sustraemos las divergencias* que es la *escala a la que medimos* experimentalmente la constante de acoplamiento. Llamamos *running* a esta dependencia de la constante de acoplamiento con la escala.

A distancias grandes ($Q^2 \ll m^2$) la dependencia no es logarítmica en realidad, pero no importa, pues entonces podemos escribir (7.120)

$$\Pi(Q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \Delta_\epsilon + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\ln \left(1 + \frac{x(1-x)Q^2}{m^2} \right) + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]$$

^gPara ver que un fotón intercambiado en canal t tiene $q^2 \leq 0$ elijamos el sistema de referencia en el que el electrón inicial está en reposo. Entonces $q^2 = (p' - p)^2 = 2(m^2 - pp') = 2m(m - E')$ que es negativo o nulo porque $E' \geq m$. Por otro lado el límite de $Q^2 \rightarrow 0$ corresponde en el sistema CM a ángulos de *scattering* $\theta \rightarrow 0$, lo que se ve más claramente en el límite ultrarrelativista ($E, E' \gg m$) pues entonces $Q^2 \equiv -q^2 = 2(E E' - \vec{p} \cdot \vec{p}') = 2E E' (1 - \cos \theta)$.

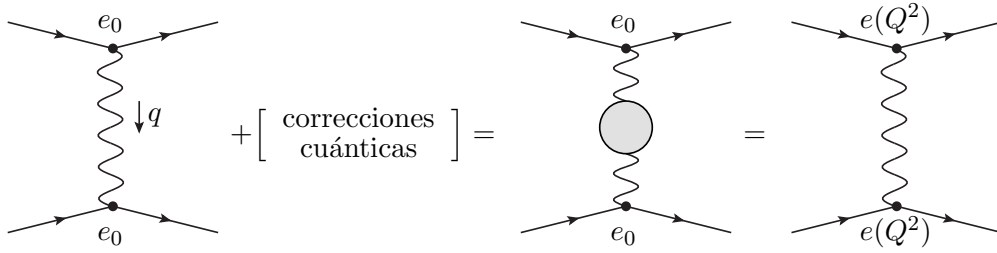


Figura 7.1: La modificación del acoplamiento se debe exclusivamente a las correcciones cuánticas al propagador del fotón, lo que da lugar a un acoplamiento efectivo que depende del momento transferido en el proceso y es independiente del fermión. Nótese que éstos no son todos los diagramas que intervienen en el proceso de *scattering*, sino los relevantes para corregir la carga.

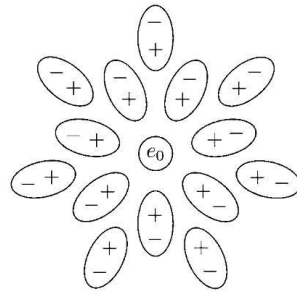


Figura 7.2: Polarización del vacío.

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{\alpha}{3\pi}\Delta_\epsilon + \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{m^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x^2(1-x)^2\frac{Q^2}{m^2} \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi}\Delta_\epsilon + \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{m^2}{\mu^2} + \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Q^2}{m^2}, \quad Q^2 \ll m^2, \end{aligned} \tag{7.123}$$

así que si $Q^2, Q_0^2 \ll m^2$ prácticamente no hay *running*:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Q^2 - Q_0^2}{m^2}} \approx \alpha(Q_0^2) \approx \alpha(0) \equiv \alpha. \tag{7.124}$$

Esta corrección a la carga dependiente de la escala/distancia puede interpretarse como el resultado del *apantallamiento* de la carga desnuda (e_0) en un medio dieléctrico (el vacío), según se ilustra en la figura 7.2: a grandes distancias ($Q^2 \ll m_e^2$) la carga que observamos es (infinitamente) menor que e_0 pues ésta se encuentra apantallada por la creación de *pares virtuales* $f\bar{f}$ en el vacío. Por eso a $\Pi(q^2)$ se le llama *polarización del vacío*. El *running* se ha observado experimentalmente midiendo $\alpha(Q^2)$ a distintas escalas, pasando de $\alpha(0) \approx 1/137$ a $\alpha(M_Z^2) \approx 1/128$ de acuerdo con la predicción de la QED. Para calcular esta predicción a un *loop* debemos tener en cuenta que no sólo contribuyen electrones ($m_e \approx 0.511$ MeV) al loop fermiónico, sino también el resto de fermiones cargados del Modelo Estándar cuyas masas m cumplan $M_Z \gg m$ (recordemos que $M_Z \approx 91$ GeV): muones ($m_\mu \approx 106$ MeV) y taus ($m_\tau \approx 1.78$ GeV) que son también leptones de carga -1 ; quarks *up* ($m_u \approx 2$ MeV) y *charm* ($m_c \approx 1.5$ GeV) de carga $2/3$; y quarks *down* ($m_d \approx 5$ MeV), *strange* ($m_s \approx 150$ MeV) y *bottom* ($m_b \approx 5$ MeV) de carga $-1/3$. El quark top es demasiado pesado

($m_t \approx 173$ GeV). Además cada quark tiene 3 colores, así que

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \widehat{\Pi}(Q^2)} \quad (7.125)$$

donde, para $m_t^2 \gtrsim Q^2 \gg m_b^2$,

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}(Q^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} (-1)^2 \left[\ln \frac{Q^2}{m_e^2} + \ln \frac{Q^2}{m_\mu^2} + \ln \frac{Q^2}{m_\tau^2} - 3 \times \frac{5}{3} \right] \\ &+ 3 \times \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left[\ln \frac{Q^2}{m_u^2} + \ln \frac{Q^2}{m_c^2} - 2 \times \frac{5}{3} \right] \\ &+ 3 \times \frac{\alpha}{3\pi} \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \left[\ln \frac{Q^2}{m_d^2} + \ln \frac{Q^2}{m_s^2} + \ln \frac{Q^2}{m_b^2} - 3 \times \frac{5}{3} \right]. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Por tanto,

$$\alpha^{-1}(M_Z^2) = \alpha^{-1}(0) \left[1 - \widehat{\Pi}(M_Z^2) \right] \approx 137(1 - 0.0672) \approx 128. \quad (7.127)$$

Como comentario final, nótese que además de acusar el efecto de apantallamiento de la carga, el vértice renormalizado depende de factores de forma que son función de q^2 ,

$$ie\Gamma^\mu(p, p+q) = \frac{ie}{1 - \frac{1}{2}[\Pi(q^2) - \Pi(0)]} \left\{ [1 + \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)] \gamma^\mu + iF_2(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right\}. \quad (7.128)$$

7.5 Teorema óptico. Resonancias

Hemos hallado en §5.2 la anchura de desintegración de una partícula inestable A de masa m a un estado final f de n_f partículas, que en el sistema CM es

$$d\Gamma(A \rightarrow f) = \frac{1}{2m} |\mathcal{M}(p \rightarrow \{p_f\})|^2 d\Phi_{n_f}, \quad d\Phi_{n_f} = \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^2 2E_j} \delta^4 \left(p - \sum_{j=1}^n p_j \right). \quad (7.129)$$

Sin embargo no está claro que esta expresión tenga sentido, pues una partícula inestable no puede ser un estado asintótico. Veamos cómo la fórmula LSZ y el teorema óptico nos conducen al mismo resultado y nos permiten entender su rango de validez.

En (4.5) y (4.6) obtuvimos el teorema óptico como consecuencia de la unitariedad de la matriz $S = 1 + iT$,

$$2 \operatorname{Im} T = T^\dagger T. \quad (7.130)$$

Consideremos el proceso de *scattering* $a \rightarrow b$ con $|a\rangle = |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$ y $|b\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$. Usando la relación de completitud (5.12)

$$1 = \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} |\{\vec{q}_f\}\rangle \langle\{\vec{q}_f\}| \quad (7.131)$$

y escribiendo la matriz T en términos de la matriz invariante \mathcal{M} (4.125) tenemos que

$$\text{Im} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \text{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b), \quad (7.132)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle &= \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger | \{\vec{q}_f\} \rangle \langle \{\vec{q}_f\} | T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \\ &= \sum_f \int \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^2 2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_j q_j) \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - \sum_j q_j) \mathcal{M}(a \rightarrow f) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \sum_f \int d\Phi_{n_f} \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f). \end{aligned} \quad (7.133)$$

El teorema óptico (7.130) conduce entonces a:

$$2\text{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b) = \sum_f \int d\Phi_{n_f} \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f). \quad (7.134)$$

Si ahora tomamos $\vec{k}_i = \vec{p}_i$ obtenemos una forma del teorema óptico que relaciona la *sección eficaz total* de un proceso con la *amplitud de scattering forward* (hacia delante):

$$2\text{Im} \mathcal{M}(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_f \int d\Phi_{n_f} |\mathcal{M}(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \rightarrow f)|^2 \quad (7.135)$$

$$\Rightarrow \text{Im} \mathcal{M}(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}_1 \vec{k}_2) = 2E_{\text{CM}} |\vec{k}| \sigma(\vec{k}_1 \vec{k}_2 \rightarrow \text{todo}), \quad (7.136)$$

siendo \vec{k} el momento de cada partícula en el sistema CM (se ha usado (5.32) y (5.34)).

Éste es un resultado interesante, pero volvamos al caso de la desintegración de una partícula inestable. Nótese que la expresión (7.134) es igualmente válida si tomamos como $|a\rangle$ el estado de una sola partícula de momento p . Consideremos el caso de espín cero, por simplicidad. Recordemos que la función de Green de dos puntos de una partícula escalar es (4.118)

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \quad (7.137)$$

donde la cantidad $-iM^2(p^2)$ es la suma de todas las inserciones 1PI en el propagador (4.117), lo que también puede verse como la suma de todos los diagramas amputados de un hipotético proceso de *scattering* $1 \rightarrow 1$:

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \text{---} \text{amp} \text{---} \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \text{---} \text{1PI} \text{---} \longrightarrow \end{array} = -iM^2(p^2). \quad (7.138)$$

Por tanto, aplicando la fórmula LSZ (4.124) tenemos que

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(p \rightarrow p) &= \sqrt{Z}^2 \begin{array}{c} \longrightarrow \text{---} \text{1PI} \text{---} \longrightarrow \end{array} \\ \mathcal{M}(p \rightarrow p) &= -ZM^2(p^2). \end{aligned} \quad (7.139)$$

Ahora podemos distinguir dos casos:

1. La partícula es *estable*: $\mathcal{M}(p \rightarrow f) = 0$. Entonces a partir de (7.135) y (7.139)

$$\mathcal{M}(p \rightarrow f) = 0 \Rightarrow \text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow p) = 0 \Rightarrow M^2(p^2) \in \mathbb{R} . \quad (7.140)$$

Ya sabemos que entonces cerca de $p^2 = m^2$ (4.121)

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \longrightarrow \end{array} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} \quad (7.141)$$

donde la masa física y la constante de renormalización del campo son (4.122)

$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2) , \quad Z = \left(1 - \left. \frac{dM^2}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right)^{-1} . \quad (7.142)$$

2. La partícula es *inestable*: $\mathcal{M}(p \rightarrow f) \neq 0$. Entonces a partir de (7.135) y (7.139)

$$\mathcal{M}(p \rightarrow f) \neq 0 \Rightarrow \text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow p) \neq 0 \Rightarrow M^2(p^2) \in \mathbb{C} . \quad (7.143)$$

En este caso, la masa física y la constante de renormalización del campo vienen dadas por

$$m^2 = m_0^2 + \text{Re} M^2(m^2) , \quad Z = \left(1 - \left. \frac{d \text{Re} M^2}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right)^{-1} . \quad (7.144)$$

ya que

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \longrightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \longrightarrow \end{array} &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \text{Re} M^2(p^2) - i \text{Im} M^2(p^2)} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \text{Re} M^2(m^2) - \left. \frac{d \text{Re} M^2}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) - i \text{Im} M^2(p^2)} \\ &= \frac{i}{(p^2 - m^2) \left(1 - \left. \frac{d \text{Re} M^2}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right) - i \text{Im} M^2(p^2)} \\ &= \frac{iZ}{(p^2 - m^2) - iZ \text{Im} M^2(p^2)} \end{aligned} \quad (7.145)$$

Si esta partícula inestable se intercambiara en canal s en un proceso de *scattering* se produciría una *resonancia* cerca de $s = p^2 = m^2$. La sección eficaz sería

$$\sigma \propto \frac{1}{|s - m^2 - iZ \text{Im} M^2(s)|^2} \quad (7.146)$$

que toma la forma de una *distribución de Breit-Wigner*:

$$\sigma_{\text{BW}} \propto \frac{1}{|s - m^2 + im\Gamma|^2} = \frac{1}{(s - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \quad (7.147)$$

donde Γ es la anchura de la partícula. Comparando ambas expresiones, vemos que *si la resonancia es estrecha* podemos identificar

$$\Gamma = -\frac{Z}{m} \text{Im} M^2(m^2) . \quad (7.148)$$

Usando (7.139) y el teorema óptico (7.134) con $a = b = p$ tenemos

$$\Gamma = \frac{\text{Im} \mathcal{M}(p \rightarrow p)}{m} = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Phi_{n_f} |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2 \quad (7.149)$$

que es exactamente la expresión (7.129) que queríamos justificar.

Bibliografía

- [1] M. Maggiore,
A Modern Introduction to Quantum Field Theory,
Oxford University Press, 2005.
- [2] M. Schwartz,
Quantum Field Theory and the Standard Model,
Cambridge University Press, 2014.
- [3] A Lahiri, P. B. Pal,
A first book of Quantum Field Theory,
Narosa Publishing House, 2nd edition, 2005.
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder,
An Introduction to Quantum Field Theory,
Addison-Wesley, 1995.
- [5] L. H. Ryder,
Quantum Field Theory,
Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.
- [6] M. Kaku,
Quantum Field Theory. A Modern Introduction,
Oxford University Press, 1993.
- [7] C. Itzykson and J. B. Zuber,
Quantum Field Theory,
McGraw-Hill, 1980.

