RECURSOS INTERACTIVOS PARA EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES

Análisis didáctico mediante la Teoría de las Funciones Semióticas[1]

J. D. Godino, A. M. Recio, F. Ruiz, R. Roa y J. L. Pareja[2]

RESUMEN

Se describen dos microprogramas interactivos, disponibles en Internet, para el estudio de las fracciones y se realiza un análisis a priori de sus características didácticas. El análisis se hace mediante las herramientas conceptuales y metodológicas de la Teoría de las Funciones Semióticas, permitiendo mostrar el sistema de objetos matemáticos que se ponen en juego en la utilización de los microprogramas y los procesos semióticos requeridos. Esta aplicación de la teoría sirve también de contexto para apoyar una reflexión sobre la naturaleza esencialmente discursiva de los conceptos matemáticos y el papel clave de los momentos de conceptualización en el proceso de estudio.

1. INTRODUCCIÓN

El número y variedad de programas de ordenador disponibles y que se pueden utilizar para facilitar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se incrementa cada día. Nos referimos a programas que van desde lenguajes como Logo, hojas electrónicas, paquetes de programas estadísticos, graficación y cálculo (Derive, Cabri, etc.) a programas más específicos que permiten explorar un concepto matemático, un pequeño campo conceptual, o facilitan la realización de cálculos o gráficos específicos.

Todos estos recursos necesitan ser investigados con el fin de explorar las mejores estrategias de empleo para el estudio de las matemáticas. Su uso debe ser integrado en las clases de matemáticas y articulado junto con otros medios, ya que potencialmente puede afectar a los propios contenidos matemáticos a enseñar, así como a las funciones docentes, discentes y los patrones de interacción didáctica.

En este trabajo realizamos un análisis didáctico de un tipo de programas interactivos disponibles en Internet que han sido diseñados como apoyos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en el nivel de educación primaria. En nuestro caso este análisis vamos a realizarlo en el contexto de la formación de profesores de primaria, utilizando algunas herramientas proporcionadas por la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) (Godino, 2003).

Los programas interactivos que hemos seleccionado permiten representar fracciones en la pantalla mediante gráficos de áreas y de la recta racional, estableciendo correspondencias semióticas entre las expresiones numéricas y las gráficas. Su carácter

---

[1] XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM, Grupo DMDC-SEIEM). Córdoba, Abril 2003. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/

[2] Equipo *Edumat-Maestros*, Universidad de Granada. Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación BS2002-02452, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Programa de Promoción General del Conocimiento.

limitado y específico, que ponen en juego unos pocos conceptos y técnicas matemáticas, nos lleva a referirnos a ellos como micro-programas interactivos (MPI). Este análisis se realiza con la finalidad de identificar criterios de uso en la educación primaria y plantear cuestiones de reflexión para los maestros en formación.

En una primera fase hemos realizado un análisis a priori de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en cada MPI, mostrando los objetos matemáticos y las funciones semióticas que se establecen entre ellos. También identificaremos las variables didácticas, sus valores y efectos potenciales. Esto permitirá determinar su utilidad para el aprendizaje, e identificar conflictos semióticos que deben ser tenidos en cuenta en la interacción didáctica.

En segundo lugar hemos realizado una experiencia de inserción curricular de estos MPIs en nuestro curso de Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Esta inserción en el proceso de estudio de la "didáctica de las fracciones" por los maestros en formación se ha hecho en dos modalidades:

- Uso colectivo en gran grupo, como apoyo del discurso del profesor (recuerdo e institucionalización de los conceptos de fracción, número racional y operaciones).
- Uso individual o por parejas de estudiantes interactuando directamente con los MPIs en el aula de informática.

En ambos casos se trata de analizar, con los maestros en formación, las posibilidades del uso de los MPIs en las clases de primaria y las estrategias óptimas de inserción curricular.

En este trabajo presentamos unos primeros resultados de la primera fase.

2. MICRO-PROGRAMAS INTERACTIVOS PARA EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES

En este apartado describimos y analizamos tres MPI que abarcan las principales nociones que configuran el estudio de las fracciones y racionales en la educación primaria. El análisis consistirá en identificar los objetos matemáticos que se ponen en juego en el uso de los MPIs, que en el marco de la TFS se clasifican en seis categorías: situaciones-problemas, lenguaje, acciones, conceptos, propiedades y argumentos. Así mismo, se tienen en cuenta las facetas o modalidades duales en que participan los objetos y se identifican las correspondencias (funciones semióticas) que se establecen entre estos objetos, las cuales son interpretadas como los conocimientos matemáticos necesarios para la realización de las actividades (Godino, 2002). Este análisis pormenorizado nos va a permitir mostrar el grado de complejidad de la actividad matemática que se realiza, identificar los conflictos semióticos potenciales y las acciones necesarias para su resolución, e identificar criterios de diseño de las situaciones didácticas que incorporen el uso de estos medios.

2.1. Comparación de fracciones, decimales y porcentajes

Descripción:

Este micro-programa interactivo está disponible en un servidor web del NCTM:

http://standard.nctm.org/.

La figura 1 muestra un ejemplo de las pantallas interactivas generadas. Se comparan simultáneamente tres notaciones (fracción, decimal y porcentaje) para expresar una parte de un todo, en los casos en que el todo (unidad) viene dado mediante un círculo, un rectángulo y un conjunto discreto de fichas circulares. Hay tres versiones, con distintas restricciones para los valores que toman los numeradores y denominadores

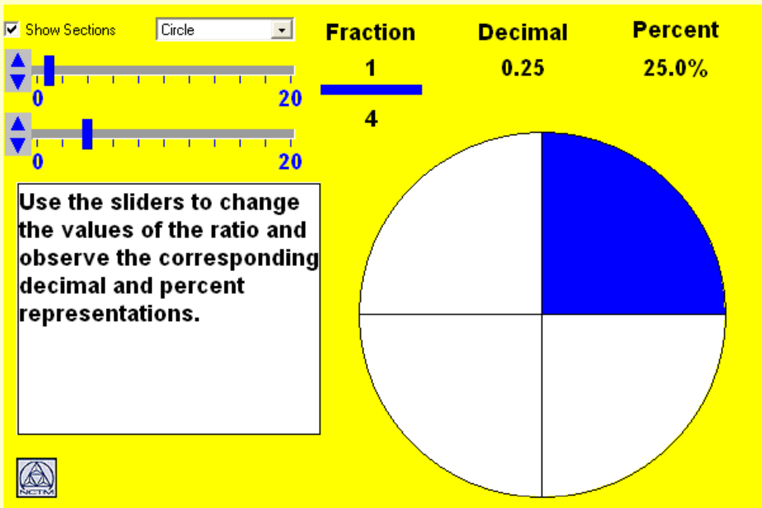

Figura 1: Fracciones, decimales y porcentajes

Sistema de tareas generadas

Se trata de introducir modos de expresión de una parte con relación a un todo considerado como unidad que ha sido dividido en partes iguales. La situación inicial, en este caso, el todo es un área circular dividida en 4 sectores iguales y una parte marcada de azul. La situación se propone como un caso de uso de la notación 1/4, y también las notaciones 0.25 y 25%. El texto no es autosuficiente ya que la conexión entre las notaciones y la comparación multiplicativa (1 de 4, 25 de 100) entre la parte y el todo no se comunica explícitamente.

Se trata de una situación dinámica, que incita a una acción y observar su resultado.

> *"Usa los cursores para cambiar los valores de la razón y observar las correspondientes representaciones decimales y porcentajes"*

El cambio sistemático de los valores del numerador y denominador, y los tres valores para el tipo de gráfico (circular, rectangular y conjuntista) permite generar una familia de situaciones de uso de la notación fraccionaria (decimal y porcentual) y apreciar las invariancias correspondientes. Son situaciones de uso de las fracciones de comparación multiplicativa de una parte respecto de un todo. El numerador puede ser mayor que el denominador, lo que da lugar al uso de fracciones impropias.

El tipo de discurso general que se desea introducir con esta familia de situaciones se puede formular del siguiente modo:

> "Si una unidad se divide en *d* partes iguales y se toman *n* de estas partes convenimos en decir que el tamaño de las partes tomadas con relación al todo unidad es *n*/*d* (o bien, *n* **de** *d*)". Para las fracciones impropias, por ejemplo 10/3, este discurso no es válido.

Variables didácticas (o de tarea):

Hay tres versiones del micro-programa que se distinguen por los valores que se puede dar a los numeradores (n) y denominadores (d):

Versión 1: $d \leq 20$; n puede ser 2, 4, 5 y 10, valores que son divisores de 20 para que los racionales sean decimales. El numerador n puede ser mayor que el denominador, por lo que los racionales pueden ser mayores que la unidad.

Versión 2: $d \leq 20$, $n \leq 20$; ahora n puede tomar valores no divisores de d, lo que produce racionales no decimales.

Versión 3: $d \leq 100$, $n \leq 100$, n puede ser mayor o menor que d.

Otra variable didáctica es el tipo o naturaleza de los objetos que se toman como unidad divisible, para la que se disponen de tres valores posibles: círculos, rectángulos y conjuntos discretos de discos.

La manera de introducir los valores para los numeradores y denominadores puede ser mediante cursores deslizantes sobre un segmento dividido en intervalos que se desplazan de manera continua, o mediante pulsadores discretos que aumentan o disminuyen de unidad en unidad.

La ejecución del MPI pone al usuario ante un ejemplo de situación de uso de la fracción 1/4: aparece un círculo dividido en cuatro partes iguales y una de ellas se resalta con un color; la correspondencia entre la notación 1/4 y el fraccionamiento de la unidad de la que se separa una parte no es explícita y requiere la intervención del docente o persona que conoce el convenio. La principal utilidad del MPI está en las posibilidades que ofrece de generar una familia potencialmente ilimitada de situaciones mediante la actuación sobre las variables didácticas en las cuales se usa un mismo convenio notacional.

La inclusión de la notación decimal y porcentaje simultáneamente con las fracciones pretende que el usuario asuma el convenio de que 1/4, 0.25 y 25% son formas de expresión que se usan para designar la misma situación de fraccionamiento de la unidad y separación de una parte. Esta equivalencia no queda justificada de manera inmediata, siendo necesario implementar una secuencia de acciones que muestre la equivalencia entre las fracciones 1/4 y 25/100, lo que sólo se puede hacer en la versión 3 del MPI. Este es un ejemplo de conflicto semiótico de tipo situacional: la equivalencia de situaciones de uso de la notación fraccionaria y decimal no puede ser reconocida directamente para cualquier par de valores para el numerador y denominador, sino sólo para algunos de ellos que deben ser planificados.

El micro-programa crea situaciones de uso de las fracciones del contexto de separación de partes de un todo unitario dividido en partes iguales. No se tienen en cuenta los restantes usos de las fracciones (situaciones de medida, intercambio multiplicativo de cantidades, operador, algebraico), por lo que el significado institucional implementado es parcial.

Lenguajes

- Numérico: fracción, decimal y porcentual.

- Términos del lenguaje natural: fracción, decimal, porcentaje, razón.

- Expresión del lenguaje natural: el enunciado de la tarea (en inglés), "Usa los cursores para cambiar los valores de la razón y observa las representaciones decimales y porcentuales correspondientes"

- Gráfico:

Regiones planas circulares, rectangulares y conjuntos discretos de fichas; rectas numéricas naturales (0 a 20, 0 a 100) para asignar valores al numerador y el denominador. Iconos (flechas y cursores) para indicar los contadores. El contenido de estos iconos es la acción correspondiente de variación de los valores de los numeradores y denominadores. Ventana de selección del tipo de gráfico (circular, rectangular o conjuntista) con su pestaña de pulsación. La manipulación de este dispositivo implica conocer estos significados actuativos.

La opción de asignar valores al numerador y denominador mediante cursores que se desplazan de manera continua puede sugerir erróneamente que el numerador y denominador podrían tomar valores no enteros.

La disposición en columna de los términos fracción, decimal y porcentaje y los respectivos valores numéricos indica la correspondencia semiótica entre ambos pares de objetos. Otra correspondencia esencial es la establecida implícitamente entre los términos, los valores numéricos y las regiones planas marcadas. Hay que relacionar las posiciones de los cursores, los números y las regiones representadas.

Acciones

Se pide cambiar los cursores y observar los cambios que se producen en los números y las regiones que se dibujan. El MPI se hace cargo de la escritura de la fracción, el cálculo del decimal y porcentaje y de la graficación correspondiente. Esta es una característica esencial de todos los MPI y su motivación: calcular y graficar de manera dinámica e interactiva. El significado de las técnicas de cálculo y representación cambian radicalmente con el uso de los MPI: basta pulsar en determinados puntos de la pantalla del ordenador. Esta acción, no obstante, también requiere un aprendizaje; en este caso el uso de los pulsadores y cursores requiere una cierta destreza y coordinación.

Se espera que el usuario ponga en relación sus acciones, los números que aparecen en la pantalla y el contenido pretendido, esto es, que identifique la invariancia que permite expresar las relaciones entre las partes y el todo con las mismas escrituras fraccionarias.

Es muy probable que los cambios en los valores de los decimales y porcentajes sean incomprensibles. Es necesario reconocer la equivalencia de 1/4, con 25/100, y asumir los convenios de expresión que 0.25 y 25% quieren decir lo mismo que 25/100.

Conceptos (invariantes semióticos):

El concepto matemático pretendido con el uso de este MPI es el de fracción, en su sentido de "parte de un todo", así como la equivalencia notacional entre las fracciones, decimales y porcentajes. Esta equivalencia de notaciones se basa en la equivalencia de fracciones, y por tanto, pone en juego el número racional (1/4 = 25/100 = 25%). Como conceptos que contribuyen o componen al de fracción tenemos los conceptos de numerador y el denominador.

El concepto de fracción no es otra cosa que el invariante lingüístico ligado al tipo de situaciones de comparación multiplicativa entre las partes de un todo unitario dividido en partes iguales. "Siempre que tenemos un dibujo de una región plana que se ha dividido en *d* partes iguales y se marcan o separan *n* de dichas partes decimos que el tamaño de la parte separada es *n* **de** *d*, n/d". Podemos decir que el concepto de fracción, como cualquier otro concepto matemático no es otra cosa que un invariante semiótico: **una correspondencia entre una expresión lingüística con un contenido que es un tipo de acciones, condiciones de realización de esas acciones y sus respectivos resultados.**

La ventaja que aporta el MPI es que el sujeto ve y manipula, no una situación aislada, sino una secuencia de situaciones, lo que permite tener presente el tipo o generalidad de dichas situaciones. Se pasa de tener una situación concreta a una colección potencialmente ilimitada de situaciones a la que se asocia el término 'fracción', y la notación a/b.

Hay que ser conscientes, no obstante, que la generalidad que referimos como "fracción" trasciende a los modelos gráficos de sectores, rectángulos o cualquier otro tipo de colecciones, por lo que parece necesaria la intervención del docente generalizando a otros contextos y situaciones, particularmente situaciones de medida, intercambio de cantidades de magnitudes diferentes (p.e, precios por kilos), transformación (secuencias de división y multiplicación entre números enteros), división no entera (solución de la ecuación a = bx, con a y b enteros y b no divisor de a)

Debemos tener presente que el MPI, a pesar de la interactividad que permite es inerte con relación a los objetos conceptuales que se ponen en juego. El profesor tiene que incluir el discurso que falta, para que el usuario participe de los significados pretendidos, para que comience a usar las fracciones de la manera y ante los tipos de situaciones que hemos convenido socialmente. La intervención del profesor es estrictamente necesaria para ampliar el campo de uso de las fracciones y racionales más allá de los contextos geométricos presentados, para formular en toda su generalidad los conceptos de fracción y número racional, entendidos como invariantes semióticos.

Propiedades

- La relación de equivalencia entre fracciones, que lleva al uso de los números racionales.

- La relación entre las expresiones de fracción, decimal y porcentaje.

Se quiere mostrar que 1/4 = 0.25 = 25%. Sin embargo, la justificación no se deriva directamente de las acciones del usuario y sus resultados gráficos. Con la versión 3 del MPI, que permite introducir valores de 0 a 100, tanto para el numerador como para el denominador, se puede mostrar que convenimos en decir que 1/4 = 25/100 ya que se obtiene el mismo resultado, en términos de comparación de áreas de sectores. Por razones de comodidad convenimos en expresar 25/100 como 0.25 o como 25%.

En cada apartado hemos ido identificando conflictos semióticos potenciales que reclaman la intervención del docente, y que deben ser previstos. Esta información es crítica para el desarrollo del proceso de instrucción usando este recurso y para insertarlo de manera eficiente en el mismo en cooperación con otros medios, particularmente apoyando el discurso del docente. Habrá que estudiar la selección de los valores idóneos para las variables didácticas, que permitan movilizar los conocimientos pretendidos, y los criterios de diseño de trayectorias didácticas eficientes.

Para los números racionales no decimales se presenta un conflicto de significados institucionales que nos parece crítico. Con las versiones 2 y 3 se pueden seleccionar valores para *d* y *n* que indican, por ejemplo, 1/3 = 0.3333 = 33.33%, cuando en realidad se trata de una aproximación; este racional no es decimal y le corresponde una escritura decimal periódica. El MPI establece la equivalencia entre expresiones decimales finitas con fracciones representantes de racionales no decimales. El docente deberá discutir con los alumnos este problema para superar este conflicto de significados institucionales.

Argumentación

La argumentación que indirectamente ofrece el MPI es de tipo empírico-ostensiva.

"Observa cómo cambian los decimales y porcentajes (el numerador y denominador de las fracciones y los gráficos) cuando mueves los cursores".

Parece claro que simplemente mirando no se verá lo que se pretende que se vea, porque esto no es visible. Son maneras de hablar, invariantes lingüísticos asociados a tipos potencialmente ilimitados de situaciones que trascienden las experiencias ostensivas que se muestran. Los objetos matemáticos son entidades intradiscursivas (Sfard, 2000), reglas gramaticales del discurso que usamos para describir nuestros mundos (Wittgenstein). La generalidad de las situaciones de uso de fracciones y racionales sólo puede describirse mediante el lenguaje, que tiene que ser implementado por el profesor.

Los MPI son soportes del discurso del profesor, un micromundo construido cuya estructura relacional se describe de manera eficiente con el lenguaje de las fracciones, decimales y porcentajes.

La familia de situaciones generada con el MPI facilita la introducción de los convenios de uso de la terminología de los números racionales. Esto es, puede ser un soporte para motivar los conceptos de fracción, decimal y porcentaje. Este MPI no permite la exploración de relaciones de manera autónoma.

2.2. Comparación de fracciones. Densidad de Q

Descripción:

Este micro-programa interactivo está disponible en el servidor web siguiente:

La figura 2 muestra un ejemplo de las pantallas interactivas generadas. Se presentan dos fracciones (numérica y gráficamente) de distinto denominador. Pide escribir dos fracciones equivalentes con igual denominador. Después pide marcar sobre una recta las fracciones dadas y otra comprendida entre ellas. Permite actuar sobre el número de divisiones marcadas en la recta.

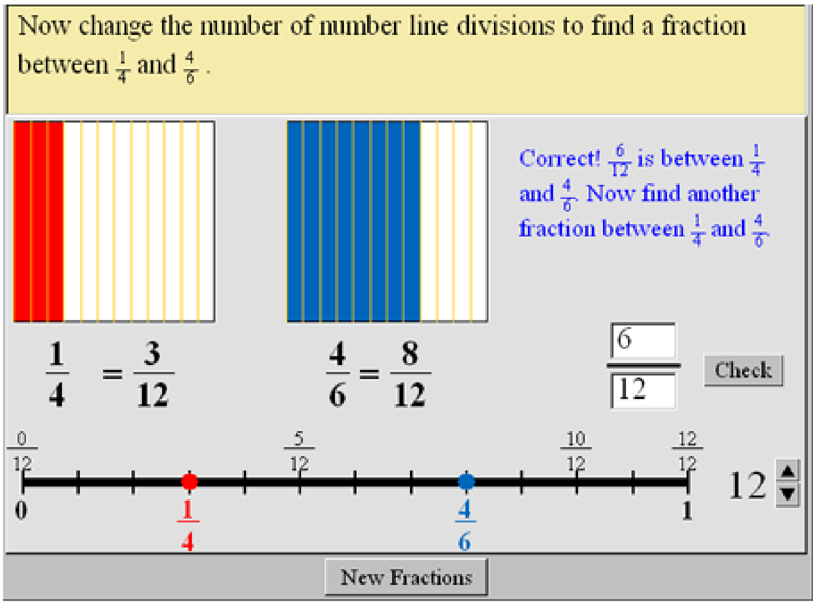

Figura 2: Comparación de fracciones

Sistema de tareas generadas

Este micro-programa presenta una secuencia de tres tipos de situaciones. En la primera se pide “Encontrar diferentes nombres para dos fracciones usando el mismo número de divisiones para las áreas (el mismo denominador)”. El MPI selecciona al azar dos fracciones propias con denominadores que varían entre 2 y 11. No es posible al usuario elegir un par de fracciones determinadas; en el ejemplo mostrado han resultado las fracciones 1/4 y 4/6.

Actuando sobre los pulsadores situados debajo de los cuadrados se puede lograr que la misma área quede dividida en 12 partes (o 24). Las áreas marcadas quedarán divididas en un número de partes que será el numerador de cada fracción. Pulsando “check” se sanciona la solución escrita, aunque sin ninguna justificación. La comprobación es ostensiva. Se comprueba que ¼ = 3/12 porque veo que las partes marcadas coinciden. Da igual si divido en 4 y toma 1, (1 de 4) que si divido en 12 y tomo 3 (3 de 12). Si no se introducen valores adecuados el programa informa que se debe "introducir valores diferentes para los denominadores y/o numeradores". El objetivo de este módulo del MPI es la visualización de dos pares de fracciones equivalentes.

En el segundo módulo se pretende mostrar la utilidad de la reducción de fracciones a común denominador para encontrar racionales intermedios a otros dados. Para ello se pide marcar en la recta numérica ¼, lo que se hace teniendo en cuenta su equivalencia con 3/12, y después marcar 4/6, apoyándose en su equivalencia con 8/12.

Este módulo ofrece un medio para apoyar el discurso sobre el uso de las fracciones como parte de un todo (modelo de áreas) y como medida no entera (recta racional). También se comprueba la propiedad que entre dos racionales dados existe otro racional (densidad de Q). Se usa la técnica de reducción a común denominador.

Este recurso muestra cómo un mismo punto de la recta, indicativo de una posición y de una distancia al origen, "cambia de nombres" (fracciones) al ir variando el número de divisiones del intervalo [0, 1], lo que motiva el uso de los racionales.

El último módulo introduce una nueva técnica para encontrar racionales situados entre otros dos dados: *"Ahora cambia el número de divisiones en la recta para encontrar una fracción entre 1//4 y 4/6"*. Al aumentar el número de divisiones del intervalo [0,1] van apareciendo más puntos entre los marcados, los cuales permanecen fijos y etiquetados como ¼ y 1/6. En este caso, la explicación del profesor es necesaria para evitar connotaciones empiristas y resaltar la generalidad de las técnicas y del resultado.

En resumen, el sistema de tareas que se propone realizar consiste en la "reducción a común denominador de dos pares de fracciones propias, representación de los racionales correspondientes en la recta numérica (intervalo [0,1])y escritura de otros racionales intermedios". Los objetos y conocimientos matemáticos que se ponen en juego, además del sistema de tareas descrito, se describen a continuación.

Lenguaje:

- Fracciones (registro numérico, gráficos de áreas y lineal). En ambos casos se trata de cantidades de magnitudes geométricas discretizadas. El lenguaje numérico fraccionario viene motivado por la necesidad de comunicar cantidades no enteras.
- Lenguaje natural: "*Encuentra nombres diferentes para las dos fracciones usando el mismo número de piezas de división (el mismo denominador)*". Se evita hablar de números racionales, introduciendo una expresión no estándar "nombres diferentes para una misma fracción", cuando en realidad se trata de fracciones distintas para el mismo racional. El docente deberá aclarar correctamente la naturaleza de los objetos e introducir modos de expresión correctos desde el punto de vista institucional matemático.
- La escritura de los pares de fracciones equivalentes (con denominador común) se supone que deben corresponderse con las representaciones gráficas, cambiando las divisiones de los círculos o cuadrados dados inicialmente. Sin embargo, el programa continúa sin que las nuevas divisiones se hagan correctamente si se escriben las fracciones equivalentes. Esto puede resultar conflictivo a algunos alumnos.
- En el segundo módulo: "*¡Bien! Ahora marca sobre la recta numérica el punto donde se localiza 1/4"*. El usuario debe recordar que 1/4 = 3/12, y señalar esta fracción sobre la recta. La identificación del punto correspondiente se facilita mediante la división del intervalo [0,1] en 12 partes iguales, y la escritura de algunas fracciones.
- En el tercer módulo: "Ahora cambia el número de divisiones de la recta numérica para encontrar una fracción entre 1/4 y 4/6". La acción sobre los pulsadores correspondientes situados a la derecha del eje permite aumentar o disminuir el número de divisiones del intervalo [0,1] con lo que aparecen nuevos puntos de división y nuevas fracciones escritas a lo largo del eje. Esto facilita encontrar puntos intermedios y marcarlos.

Acciones:

- Escritura de fracciones en las celdas correspondientes, marcar en los pulsadores correspondientes y señalar puntos sobre el segmento [0,1] dividido en partes iguales. Estas acciones tienen que ponerse en correspondencia con los resultados de las mismas (obtención de fracciones equivalentes y racionales intermedios) y las condiciones de realización de la acción. Por ejemplo, el número de divisiones del intervalo [0,1] se hará de modo que se obtengan nuevos puntos marcados entre los dados, para los cuales se pueda leer fácilmente su expresión fraccionaria.

- La interacción con el programa irá orientada al desarrollo de la técnica de obtención de pares de fracciones equivalentes mediante la reducción a un denominador común.
- Desarrollo de una técnica de encontrar racionales comprendidos entre otros dos dados, basada en la representación sobre recta de dos fracciones equivalentes con denominador común.

Conceptos:

- Fracción, numerador, denominador; mínimo común múltiplo.
- Número racional, implícito al usar fracciones equivalente y su representación en el mismo punto de la recta racional.
- Equivalencia de fracciones. Ordenación de fracciones y racionales.
- Recta racional y sus convenios de representación.

Propiedades:

- Todas las fracciones equivalentes entre sí se corresponden con un mismo punto en la recta, o sea son medidas de la misma cantidad de longitud obtenidas al cambiar la unidad de medida. Este hecho se expresa diciendo que definen el mismo número racional.
- Entre dos números racionales siempre existe otro número racional (densidad de Q).
- Al multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente.

Argumentaciones

El tipo de argumentación que soporta el MPI es de tipo empirista. “Mira lo que pasa en este caso”.

2.3. Multiplicación de fracciones

Descripción

Este micro-programa interactivo se encuentra disponible en el servidor web:

La figura 3 muestra una de las pantallas producidas. Se presenta con gráficos de áreas la multiplicación de fracciones. Simultáneamente se muestra las operaciones con símbolos numéricos. Al desplazar los cursores varían las áreas y los valores numéricos de las fracciones, viéndose la relación entre ambas representaciones.

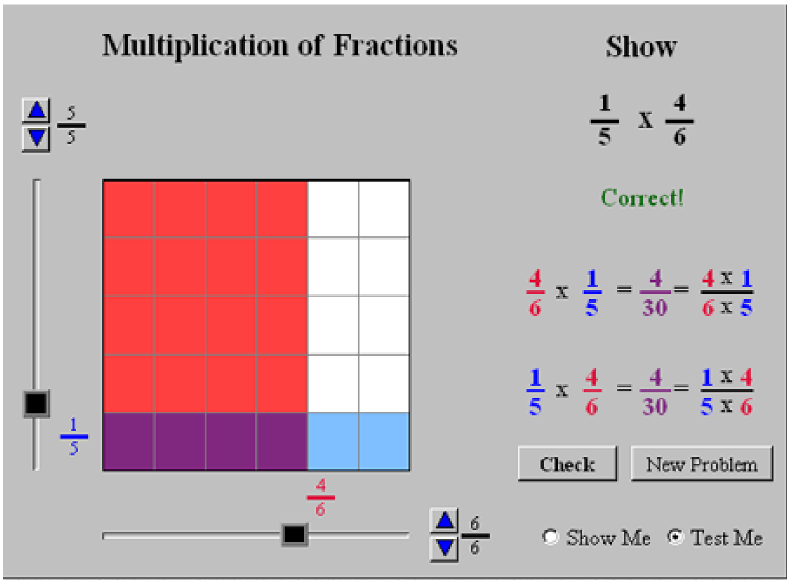

Figura 3: Multiplicación de fracciones

Sistema de tareas generadas

Este MPI tiene dos opciones:

Show Me (presentación de la multiplicación de fracciones): Muestra la multiplicación de dos fracciones. Se establecen correspondencias semióticas entre la multiplicación simbólica de dos fracciones y su uso como partes de una región cuadrada. Las fracciones se usan para designar regiones rectangulares, partes del todo unitario cuadrangular.

Los numeradores y denominadores pueden tomar los valores desde 1 hasta 8 ambos inclusive; por tanto, la multiplicación se realiza sólo para fracciones menores o iguales a la unidad.

Test Me (evaluación de la competencia):

Evalúa la competencia en la multiplicación de fracciones. Se propone una multiplicación y el usuario debe cambiar los pulsadores y cursores para que aparezca en la pantalla la representación gráfica del producto resultante.

Dado que no se requiere transformar las fracciones en otras equivalentes no se moviliza el concepto de número racional.

Además del sistema de tareas o situaciones descritas se ponen en juego los siguientes objetos y significados:

Lenguaje

- 2/5 de 3/7 (fracción de otra fracción; aplicación sucesiva de la transformación que produce una fracción sobre un todo)
- Numérico; gráfico de áreas.
- Pulsadores, para incrementar o disminuir el número entero de divisiones del intervalo [0,1] , cursores que al desplazarse producen una fracción menor o igual que la unidad en el registro numérico y gráfico.

En este MPI se está dando significado al uso del signo de multiplicación x, aplicado a las fracciones y números racionales. Es el mismo contenido que la expresión "f1 **de** f2".

Acciones

- Movimiento de los cursores y pulsadores que dan como resultado las fracciones que se multiplican y el resultado de la multiplicación. El producto se interpreta como la intersección de las regiones que se corresponden con las fracciones que se multiplican.
- Cada acción sobre los cursores y pulsadores se muestra también en el registro numérico mediante el producto de los numeradores y denominadores.

La correspondencia entre los registros gráficos y numéricos se hace de manera implícita. Se espera que el usuario asigne al denominador 30 del producto el número de cuadrados unitarios en el gráfico y al numerador 4 el número de cuadrados unitarios de la región que se obtiene mediante la intersección de las regiones coloreadas que indican las fracciones que se multiplican.

Se requiere, por tanto, la acción del recuento del número de cuadrados unitarios.

Se establecen dos técnicas de multiplicar las fracciones:

- Numérica: Se multiplican numeradores y denominadores.

- Gráfica: Se fracciona el área según la transformación indicada por un factor; a continuación, el área resultante se fracciona según la transformación indicada por el segundo factor; el área resultante de ambas transformaciones es la fracción resultante de la multiplicación (comparación multiplicativa de las partes resultantes con el todo inicial).

Conceptos

- Multiplicación de fracciones y racionales. La colección de ejemplos de multiplicación de fracciones que se puede generar con el MPI pretende servir de apoyo para formular la siguiente generalización (invariante semiótico):

  "La multiplicación de dos fracciones es la fracción que tiene por numerador el productor de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores".

  "La multiplicación de dos fracciones es la fracción que se obtiene como resultado de aplicar sucesivamente a un todo unidad las fracciones dadas" (fracción de fracción).

Propiedades

- Las dos definiciones dadas anteriormente (numérica-algorítmica y fenomenológica) son equivalentes.
- Se puede mostrar que al multiplicar dos fracciones equivalentes se obtiene el mismo resultado.

Argumentos:

La equivalencia de la definición numérica-algorítmica y la definición gráfica /empírica (composición de acciones) requiere argumentos deductivos basados en las definiciones de las fracciones (en este caso, como partes de un todo).

3. ALGUNAS IMPLICACIONES TEÓRICAS

3.1. Los conceptos matemáticos como invariantes semióticos

El análisis que hemos realizado de la actividad matemática y didáctica que permiten desplegar los MPI estudiados apoya la adopción del postulado lingüístico para los conceptos matemáticos, como propone la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Backer y Hacker, 1984). Esta visión de las matemáticas tiene consecuencias radicales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los conceptos no se muestran, ni se construyen: los conceptos se hablan, se dialogan, se convienen; y son relativos a tipos o familias de situaciones. Ahora bien, este diálogo conceptual no se produce en el vacío; tiene lugar a propósito de un tema, de una situación. Los MPI pueden servir de soporte para introducir el uso contextualizado de nuevos términos y expresiones que denotan invariancias en las acciones, circunstancias y resultados de dichas acciones.

> ¿Cuál es el papel de la traducción, conversión y tratamiento de registros semióticos? ¿Qué papel juega la variabilidad perceptiva, la visualización en la conceptualización matemática?

Si aceptamos el postulado de que los objetos matemáticos deben ser interpretados como invariantes discursivos, no como abstracciones empíricas, entonces el uso de una variedad de representaciones puede obstaculizar el proceso de conceptualización, o aumentar innecesariamente su complejidad. Por ejemplo, el racional 1/7 se puede asociar solamente al reparto de tartas (grandes, chicas, medianas, de fresa, chocolate, etc.). Lo que hacemos y decimos en el reparto de tartas lo podemos hacer con cualquier otras cantidades de magnitudes arbitrarias. Por muchas situaciones y registros diversos que se utilicen, no se podrá abarcar la ilimitada variedad posible, por lo que en última instancia se tiene que aceptar la convención semiótica (sin duda motivada) que fija el significado de los términos y expresiones matemáticas.

El uso de los MPI permite manipular ejemplos particulares de situaciones, acciones, resultados de acciones que responden a reglas de validez general, no restringida al ámbito de dichos casos. La intervención del profesor es imprescindible para atribuir a los conceptos el carácter de regla de validez general (generalidad y abstracción).

3.2. Los momentos de conceptualización en el proceso de estudio

El proceso de enseñanza y aprendizaje de un tema matemático, o del estudio de un tipo de problemas, se puede describir como un proceso estocástico multidimensional compuesto por cuatro subprocesos (Godino, 2003). Estos subprocesos se refieren a la secuenciación temporal de los conocimientos matemáticos (trayectoria epistémica), de las tareas o funciones docentes (trayectoria docente), las tareas discentes (trayectoria discente) y los medios o recursos que soportan la interacción entre el profesor y los alumnos a propósito de los conocimientos matemáticos pretendidos (trayectoria mediacional).

El enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática (Godino, 2002) incluye a los conceptos como uno de los componentes de los significados sistémicos de los objetos matemáticos. Aquí hemos complementado esta manera de ver los conceptos como invariantes semióticos, esto es como "maneras de hablar" reguladas ante una cierta clase de situaciones, acciones, circunstancias y resultados de acciones. Son esas maneras de hablar, reguladas, convenidas, las que en última instancia constituyen los conceptos matemáticos (fracción, numero racional, decimal), y son el punto de partida del razonamiento matemático. "Puesto que hemos convenido en llamar fracción a esto, entonces (necesariamente) la suma de fracciones deberá ser ..."

El diseño y análisis de procesos de instrucción matemática deberá atribuir un papel crucial a los *momentos de conceptualización*, esto es, los momentos en los cuales se fija el uso de términos para identificar invariantes operatorios y se regula su uso con un determinado ámbito de generalidad, así como los momentos en que tales reglas generales se interpretan y aplican en circunstancias particulares. Este tipo de momentos del proceso de estudio se deben añadir a los momentos que propone la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997): acción-exploración, formulación-comunicación, validación, institucionalización.

Si bien nuestros momentos de conceptualización guardan relación con la institucionalización, lo que añadimos nosotros es que la conceptualización tiene lugar mediante la fijación de reglas de correspondencias semióticas y también en las interpretaciones de dichas reglas. Estos procesos son densos por doquier en el estudio de un tema o problema matemático, y reclaman la participación activa del docente o director del proceso de estudio, que puede ser el propio resolutor.

En los procesos de estudio matemáticos los actos semióticos de conceptualización son densos por doquier. Pero el primer encuentro con un concepto matemático es un acto social: el director del proceso de estudio (habitualmente el profesor) es quien sanciona la regla semiótica de atribución de contenido a los términos y expresiones conceptuales matemáticas.

Referencias

Baker G. P. y Hacker P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations*. Glasgow: Basil Blackwell.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2 y 3):

Godino, J. D. (2003). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Departamento de Didáctica de la Matemática. Documento de trabajo para el curso de doctorado, "Teoría de la Educación Matemática". Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/Doctorado/Documentos03.htm/

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizin and communicating in mathematics classrooms* (pp.38-75). London: Lawrence Erlbaum.