MARCOS TEÓRICOS SOBRE EL CONOCIMIENTO Y EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO[1]

Juan D. Godino

CONTENIDO:

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo hacemos una síntesis de los principales marcos teóricos sobre aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instruccionales que servirán de punto de partida para la elaboración de un enfoque unificado del conocimiento y la instrucción matemática. Después de una breve reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos describimos:

— Las teorías referenciales y operacionales sobre el significado, así como el marco general de la semiótica y filosofía del lenguaje como punto de entrada al estudio de los objetos matemáticos.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Septiembre, 2010. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino)

- La posición de Wittgenstein como promotor de la visión antropológica sobre las matemáticas.
- Las nociones de representación interna y externa sobre el conocimiento, incluyendo la noción de esquema cognitivo y concepción en sus diversas acepciones.
- Enfoques epistemológicos (constructivismos, aprendizaje discursivo, teoría de situaciones, antropología cognitiva).

Concluimos el trabajo con unas reflexiones sobre la necesidad de progresar hacia un enfoque unificado del conocimiento matemático, en sus facetas personales e institucionales, y su desarrollo mediante la instrucción matemática.

Somos conscientes del carácter limitado de esta síntesis, dado que la diversidad de planteamientos teóricos sobre la cognición matemática, ha sido y es una constante en filosofía, lingüística, semiótica, psicología y demás ciencias y tecnologías interesadas por la cognición humana. Hemos optado por incluir las principales corrientes y modelos específicos sobre los que hemos basado nuestras reflexiones e indagaciones.

2. LA CUESTIÓN DEL SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La Didáctica de las Matemáticas se interesa por identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

La noción de significado, utilizada con frecuencia de modo informal en los estudios didácticos, es un tema central y controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. El análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en esta disciplina y permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación, particularmente las referidas a la evaluación de los conocimientos y la organización de los procesos instruccionales.

El papel relevante que la idea de significado tiene, por tanto, para la Didáctica se pone de relieve por el uso que hacen de ella algunos autores interesados por el fundamento de esta disciplina. Así, Balacheff (1990) cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas" (p. 258). Como cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática menciona las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?
- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?
- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

También Brousseau (1980) destaca como centrales las preguntas siguientes: "¿Cuáles son las componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?; ¿Cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado?" (p. 132). Asimismo, Brousseau (1986) se pregunta si existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, desconocida en lingüística, psicología o en matemáticas.

Otra autora que considera básica para la Didáctica de la Matemática la idea de significado es Sierpinska (1990), quien, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p. 35).

Dummett (1991) relaciona, asimismo, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (p. 372).

Desde el punto de vista de la psicología cultural, el objetivo principal de la misma, según Bruner (1990), es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos a la hora de crear significados en contextos culturales. "El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (Bruner, 1990, p. 47).

A pesar del carácter relevante que la idea de significado tiene, no sólo para la Didáctica de la Matemática, sino para la psicología en general, no se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pre-teórico. "Lo que entendemos por 'comprensión' y 'significado' está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos ontológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

3. LENGUAJE MATEMÁTICO: SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN

Como hemos indicado, el término 'significado' se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, ligado al de 'comprensión'. Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros.

Pero el 'significado' "es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje" (Ullmann, 1962, p. 62). En el texto clásico The Meaning of Meaning, Ogden y Richards (1923) recogieron no menos de diecisiete definiciones de 'significado'. Desde entonces se han añadido muchos nuevos usos, implícitos o explícitos, incrementando por tanto su ambigüedad. A pesar de esto la mayoría de los tratadistas, son reacios a abandonar un término tan fundamental; prefieren definirlo de nuevo y añadirle varias calificaciones[2].

La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.). Además, no sólo nos interesa analizar el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos" (situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.).

En términos generales hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por cómo opera, cómo se usan los medios de expresión y comunicación.

En este apartado vamos a sintetizar las principales características de estos enfoques semióticos, tratando de identificar sus respectivas potencialidades y limitaciones para su aplicación al estudio de la cognición matemática.

3.1. Teorías referenciales o analíticas del significado

El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos. La relación de significación se suele describir como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos directas y una indirecta, como se propone en el llamado "triángulo básico" de Ogden y Richards (1923) (Figura 1).

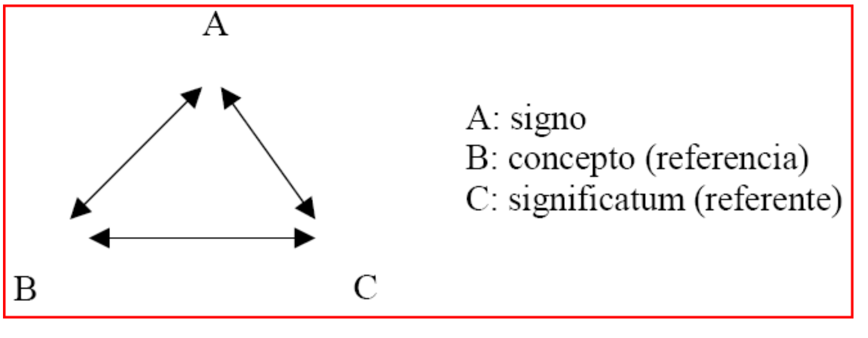


Figura 1: Triángulo semiótico

Por ejemplo, A es la palabra 'mesa', C es una mesa particular a la cual me refiero y B es el concepto de mesa, algo existente en mi mente. La relación entre A y C es indirecta por medio del concepto de mesa. Si consideramos que existe un concepto matemático C en algún mundo platónico, el concepto C sería el referente, A el significante matemático (palabra o símbolo) y B el concepto matemático individual

[2] Ullmann, o.p., p. 62.

del sujeto.

Este análisis ternario del proceso de significación plantea muchas cuestiones, en particular cuando se ponen en juego "objetos matemáticos", para los que no existe un acuerdo en las ciencias cognitivas. Por ejemplo, ¿cuál es el estatus psicológico u ontológico del concepto B? ¿El referente C, es un referente particular, es una clase de objetos, o más bien un representante de esta clase? El objeto C genera una imagen mental C' ¿Qué relación hay entre el concepto B y la imagen mental C'?

Como describe Font (2000b), la opción epistemológica "representacionalista", presupone que la mente de las personas produce procesos mentales y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas. La opción representacionalista presupone que tanto el referente como el significante tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza. Con este postulado, a los objetos A (significante) y C (referente) se les asocia otros objetos A' y C', que junto a B (referencia conceptual individual) se consideran como representaciones mentales. A sería una representación externa de C, mientras que C se considera un objeto exterior al sujeto. En esta opción representacionista del conocimiento, la mente se considera como un espejo en el que se reflejan los objetos del mundo exterior. Las posiciones epistemológicas no representacionistas rechazan el postulado básico del representacionismo según el cual existe una relación homeomórfica entre objetos mentales y objetos externos.

El término representación se usa con diferentes sentidos. Por una parte, la representación es considerada como un objeto, bien mental (A', C', B), o real A, C; pero también la representación es la relación o correspondencia que se establece entre dos objetos, de manera que uno de ellos se pone en lugar del otro. Esta relación puede darse entre objetos del mismo mundo, o entre mundos diferentes (Font, 2000b), lo que tiene implicaciones ontológicas muy diferentes. La relación entre objetos del mismo mundo es una manera débil y bastante admitida de considerar la representación, ya que se refiere a todo aquello que se puede interpretar a propósito de otra cosa. La relación entre objetos de mundos diferentes es una manera mucho más fuerte de entender la representación, ya que presupone una realidad exterior y su correspondiente imagen mental, así como una determinada manera de entender la percepción, el lenguaje y la cognición.

La problemática del significado nos lleva a la compleja cuestión: ¿cuál es la naturaleza del “significatum” del concepto?, o más general, ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

En matemáticas, los distintos tipos de definiciones que se utilizan (por abstracción, inducción completa, etc.) describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos. Pero en el campo de la psicología cognitiva, interesada por los procesos de formación de los conceptos, la concepción según la cual no existen atributos necesarios y suficientes que determinen completamente la estructura interna de los conceptos ha adquirido una posición dominante. Como indica Pozo (1989), a partir fundamentalmente de la obra de E. Rosch, se ha impuesto la idea de que los conceptos están definidos de un modo difuso. Esta nos parece que es la posición adoptada por Vergnaud (1982, 1990) quien propone una definición de concepto, adaptada para los estudios psicológicos y didácticos, en la cual incluye no solo las propiedades invariantes que dan sentido al concepto, sino también las situaciones y los significantes asociados al mismo.

De acuerdo con Kutschera (1979) las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías:

realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o figurativas) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. "Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34). Una palabra se hace significativa por el hecho de que se le asigna un objeto, un concepto o una proposición como significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, consistente en designar (en virtud de unas convenciones) ciertas entidades, por ejemplo:

- el significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre;
- los predicados (por ejemplo, esto es rojo; A es más grande que B) designan propiedades o relaciones o, en general, atributos;
- las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, Madrid es una ciudad)

En las teorías realistas (como las defendidas por Frege, Carnap, los escritos de Wittgenstein del Tractatus,...), por tanto, las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). La función semántica de las expresiones consiste simplemente en esa relación convencional, designada como relación nominal.

3.2. Teorías operacionales o pragmáticas del significado

Una concepción enteramente diferente del significado es la formulada por Wittgenstein en Philosophical Investigations publicadas póstumamente en 1953, aunque un cuarto de siglo antes Bridgman (1927) había recalcado el carácter puramente operacional de conceptos científicos como "longitud", "tiempo" o "energía"[3]. "Entendemos por cualquier concepto nada más que una serie de operaciones; el concepto es sinónimo con el correspondiente conjunto de operaciones". Esta manera de concebir los conceptos científicos se extendió al significado de las palabras en general mediante la fórmula: "El verdadero significado de una palabra ha de encontrarse observando lo que un hombre hace con ella, no lo que dice acerca de ella". Wittgenstein da un paso más afirmando que el significado de una palabra es su uso: "Para un gran número de casos -aunque no para todos- en que empleamos la palabra "significado", este puede definirse así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje" (Wittgenstein, 1953, p. 20).

La concepción operacional del significado resalta el carácter instrumental del lenguaje. "Pensad en los utensilios de una caja de herramientas: hay allí un martillo, alicates, un serrucho, un destornillador, una regla, un bote de cola, cola, clavos y tornillos. Las funciones de las palabras son tan diversas como las funciones de estos objetos" (Wittgenstein, 1953, p. 6). Al igual que ocurre en el ajedrez, en el que "el significado" de una pieza debemos referirlo a las reglas de su uso en el juego, el significado de las palabras vendrá dado por su uso en el juego de lenguaje en que participa.

[3] Citado por Ullmann, o.c., p. 73.

El enfoque operacional tiene el mérito de definir el significado en términos contextuales, es decir, puramente empíricos, sin necesidad de recurrir a estados o procesos mentales vagos, intangibles y subjetivos. Sin embargo, aunque da cuenta perfectamente de la valencia instrumental del lenguaje, no así de la valencia representacional, de la que no se puede prescindir, como el propio Wittgenstein reconoce. Al indagar en los usos de los términos y expresiones encontraremos con frecuencia usos típicos extrayendo el rasgo o rasgos comunes de una selección representativa de contextos. De esta manera podemos asignar a las palabras o expresiones el uso prototípico identificado llegando de esta manera a una concepción referencial del significado. "La terminología sería diferente, pero reaparecería el dualismo básico, con el "uso", desempeñando el mismo papel que el "sentido", la "referencia" u otros términos de teorías más abiertamente referenciales" (Ullmann, 1962, p. 76).

En lo que respecta a la categoría operacional de las teorías del significado, calificadas también como pragmáticas, las dos ideas básicas son las siguientes:

- el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan;
- niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos, y por tanto, el punto de donde hay que partir en una investigación científica del lenguaje es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

Como hemos indicado, una concepción pragmática u operacional del significado es abiertamente defendida por Wittgenstein en su obra *Investigaciones filosóficas*. En su formulación una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa, no es preciso, pues, que haya algo que sea el significado de esa palabra.

Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística. Para este autor, hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y accionales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de estos contextos. El lenguaje puede formar parte de diversas "formas de vida"; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y accionales.

3.3. Complementariedad entre teorías realistas y pragmáticas del significado

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la Matemática se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, ...). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de las personas, en algún dominio ideal. El platonismo en matemáticas se puede definir como la conjunción de las siguientes tesis: 1) Existencia (existen objetos matemáticos; las sentencias y teorías matemáticas proporcionan descripciones verdaderas de tales objetos); 2) Abstracción (los objetos matemáticos son abstractos, esto es, entidades no espacio-temporales); 3) Independencia (los objetos matemáticos son independientes de agentes inteligentes y de su lenguaje, pensamiento y prácticas). Así, por ejemplo, en una visión platonista, la sentencia ‘3 es primo’ proporciona una descripción directa de un cierto objeto – esto es, el número 3 -   de la misma manera que la sentencia

‘Marte es rojo’ da una descripción de Marte. Pero mientras Marte es un objeto físico, el número 3 es (según el platonismo) un objeto *abstracto*. Y los platonistas nos dicen que los objetos abstractos son totalmente no físicos, no mentales, no espaciales, no temporales y no causales. En esta perspectiva, el número 3 existe independientemente de nosotros y de nuestro pensamiento, pero no existe en el espacio ni en el tiempo, ni entra en ninguna relación causal con ningún otro tipo de objeto. (Linnebo, 2009).

La concepción platonista de los objetos matemáticos implica, además, una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo estos supuestos el significado del término "función", por ejemplo, sería simplemente el concepto de función, dado por su definición matemática.

A pesar de los distinguidos representantes de esta corriente, entre los que se cuentan Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy, Gödel, ..., han aparecido nuevas tendencias en la filosofía de las matemáticas que aportan críticas severas a la perspectiva absolutista y platónica de las matemáticas. Una síntesis de estas críticas y una visión de las matemáticas desde una perspectiva falible, basada en el convencionalismo de Wittgenstein y en el cuasi-empiricismo de Lakatos, podemos encontrarla en Ernest (1991).

Desde el punto de vista epistemológico, la definición pragmática del significado "es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje" (Kutschera, 1979; p. 148).

Desde nuestro punto de vista, los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas (Ernest, 1998) llevan también a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realicen determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos", y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Según lo expuesto hasta ahora, encontramos un dilema entre las teorías realistas y pragmáticas que parece difícil de superar. Sin embargo, Ullman (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales). “Contiene la saludable advertencia que tanto los semánticos y los lexicógrafos harían bien en atender, de que el significado de una palabra solamente puede averiguarse estudiando su uso. No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro" (p`. 76-77).

Esta observación de Ullmann nos parece fundamental y sirve de apoyo para el modelo de significado que propone el denominado "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Para nosotros el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

3.4. Semiótica y filosofía del lenguaje

La teoría del lenguaje de Hjelmslev

Consideramos que la teoría del lenguaje del lingüista danés Hjelmslev (1943) puede ser de utilidad para describir la actividad matemática y los procesos cognitivos implicados, tanto en la producción, como en la comunicación de conocimientos matemáticos.

La descripción y análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la interacción didáctica. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes.

Partiendo del texto como dato, la teoría lingüística de Hjemslev intenta mostrar el camino que lleva a una descripción auto-consecuente y exhaustiva del mismo por medio del análisis. Dicho análisis se concibe como una progresión deductiva de la clase al componente y al componente del componente, así como a la identificación adecuada de las dependencias mutuas entre las distintas partes entre sí, sus componentes y el texto en su conjunto. El principio básico del análisis es que "tanto el objeto sometido a examen como sus partes tienen existencia sólo en virtud de las dependencias mutuas; la totalidad del objeto sometido a examen sólo puede definirse por la suma total de dichas dependencias. Así mismo, cada una de las partes puede sólo definirse por las dependencias que le unen a otras coordinadas, al conjunto, y a sus partes del grado próximo, y por la suma de las dependencias que estas partes del grado próximo contraen entre sí" (Hjelmslev 1943: 40).

Una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de función, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay función entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí. A los terminales de una función los llama *funtivos*, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros. Esta noción de función está a medio camino entre el lógico-matemático y el etimológico, más próximo en lo formal al primero, pero no idéntico a él. "Así podemos decir que una entidad del texto tiene ciertas funciones, y con ello pensar: primero, aproximándonos al significado lógico-matemático, que la entidad tiene dependencias con otras entidades, de tal suerte que ciertas entidades presuponen a otras; y segundo, aproximándonos al significado etimológico, que la entidad funciona de un modo definido, cumple un papel definido, toma una “posición” definida en la cadena” (p. 56).

La función de signo

La noción de signo que propone Hjelmslev está ligada a su consideración de la lengua como un sistema de signos. El concepto vago de signo, legado por la tradición, es que “signo” (o expresión de signo) se caracteriza primero y principalmente por ser signo de alguna otra cosa, lo que parece indicar que “signo” se define por una función. Un signo funciona, designa, denota; un signo, en contraposición a un no-signo, es el portador de una significación (p. 68). “Toda entidad, y por tanto todo signo, se define con carácter relativo, no absoluto, y sólo por el lugar que ocupa en el contexto” (p. 69).

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjemslev como función de signo y que Eco (1979: 83) presenta como *función semiótica*[4].

En esta teoría, y en consonancia con las propuestas de Saussure, la palabra 'signo' no se aplica a la expresión sino a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido. La expresión y el contenido son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia: "no puede concebirse una función sin sus terminales, y los terminales son únicamente puntos finales de la función y, por tanto, inconcebibles sin ella" (Hjelmslev, 1943: 75).

Con frecuencia se usa la palabra ‘signo’ para designar especialmente la forma de la expresión; pero parece más adecuado usar dicha palabra para designar la unidad que consta de forma de contenido y forma de expresión y que se establece mediante la solidaridad que este autor llama función de signo. La distinción entre expresión y contenido y su interacción en la función de signo es algo básico en la estructura de cualquier lengua. Cualquier signo, cualquier sistema de signos, cualquier lengua contiene en sí una forma de la expresión y una forma del contenido. La primera etapa del análisis de un texto debe consistir, por tanto, en un análisis que diferencie estas dos entidades.

Sugerimos tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales existen otras dependencias de naturaleza operatoria o actuativa entre distintas partes de un texto. Así mismo, dos o más partes de un texto pueden estar relacionadas de tal modo que conjuntamente cooperan para producir una unidad significativa más global.

Semiótica cognitiva de Eco

La semiótica cognitiva esbozada por Eco en su libro "Kant y el ornitorrinco", publicado en 1999, nos permite interpretar de manera complementaria las nociones de objeto y significado personal, que introdujimos en 1994 en nuestro modelo teórico (Godino y Batanero, 1994). Encontramos, por tanto, en esta semiótica apoyo para el enfoque unificado del conocimiento matemático que proponemos.

En el libro mencionado, Eco introduce las nociones de tipo cognitivo (TC), contenido nuclear (CN) y

[4] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1976, 83-84).

contenido molar (CM). Aclara estas nociones mediante un ejemplo sobre el conocimiento de los caballos por parte de los aztecas cuando los vieron por primera vez al ser llevados a América por los españoles.

El tipo cognitivo (TC) es el procedimiento o regla que permite a un sujeto construir las condiciones de reconocibilidad e identificación de un objeto (por ejemplo, el objeto caballo, o el objeto matemático mediana). Concretamente afirma, "En nuestro caso, sea lo que sea el TC, es ese algo que permite el reconocimiento" (p. 154). Esta noción pretende sustituir a la noción de concepto o concepción, entendida tradicionalmente como la idea que alguien tiene sobre algo en su cabeza.

Junto al tipo cognitivo, Eco propone la noción de contenido nuclear (CN) y la describe como el conjunto de interpretantes[5] a que da lugar un TC. "Si estos interpretantes estuvieran a disposición de forma integral, no sólo aclararían cuál era el TC de los aztecas, sino que circunscribirían también el significado que asignaban a la expresión maçatl (caballo). Este conjunto de interpretantes lo denominaremos contenido nuclear" (p. 160). "Tales contenidos nucleares se expresan a veces con palabras, a veces con gestos, a veces mediante imágenes o diagramas" (p. 162). Se concibe, por tanto, como un complejo multimedia, incluyendo, en el caso del caballo, no sólo su imagen sino también su olor, y los usos en los que participa.

La relación entre TC y CN la establece Eco del siguiente modo: "Un TC es siempre un hecho privado, pero se vuelve público cuando se interpreta como CN, mientras que un contenido nuclear público puede dar instrucciones para la formación de los tipos cognitivos. Por tanto, en cierto sentido, aunque los tipos cognitivos sean privados, están sometidos continuamente al control público, y la comunidad nos educa paso a paso a adecuar los nuestros a los ajenos" (p. 256).

El hecho que el CN puede ser distinto según los contextos institucionales le lleva a introducir la noción de contenido molar (CM). El CM será la serie controlable de lo que se puede decir sobre, o hacer con los caballos (o sobre el objeto mediana) de manera específica y que es compartida socialmente.

El constructo "contenido molar" tiene una gran similitud con la noción de "sistemas de prácticas institucionales" (Godino, y Batanero, 1994), que consideramos como "el significado del objeto institucional" correspondiente. Parece que en la semiótica cognitiva de Eco faltaría la noción que podría ser como el equivalente institucional al "tipo cognitivo" (que para nosotros equivaldría al "objeto personal"). En nuestro caso introducimos el objeto institucional como "emergente del sistema de prácticas institucionales", que podría interpretarse, en términos de Eco, como "aquello que permite el reconocimiento público de un objeto", esto es, las definiciones matemáticas de un objeto.

3.5. El pragmatismo y la semiótica de Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914) escribió una gran cantidad de trabajos sobre temas diversos relacionados con la filosofía, la matemática, la semiótica, entre otras disciplinas, los cuales están recibiendo una atención especial en los últimos años en diversos campos. En este apartado incluimos algunas ideas que consideramos de especial interés, las cuales son usadas como marco teórico de referencia en diversas investigaciones en educación matemática (Otte, 2006; Campos, 2010).

[5] Expresiones que aclaran lo que quiere decir una palabra o expresión.

Pragmatismo

El pragmatismo es una corriente filosófica que surgió a finales del siglo XIX en los Estados Unidos. William James y Charles S. Peirce fueron los principales impulsores de la doctrina, que se caracteriza por la búsqueda de las consecuencias prácticas del pensamiento. El pragmatismo sitúa el criterio de verdad en la eficacia y valor del pensamiento para la vida. Se opone, por lo tanto, a la filosofía que sostiene que los conceptos humanos representan el significado real de las cosas. Para los pragmáticos, la relevancia de los datos surge de la interacción entre los organismos inteligentes y el ambiente. Esto lleva al rechazo de los significados invariables y de las verdades absolutas: las ideas, para el pragmatismo, son sólo provisionales y pueden cambiar a partir de investigaciones futuras. Al establecer el significado de las cosas a partir de sus consecuencias, el pragmatismo suele ser asociado a la practicidad y a la utilidad. Sin embargo, una vez más, esta concepción depende del contexto.

La orientación del pragmatismo de Peirce (quien prefería nombrar su posición como 'pragmaticismo' para evitar ciertas interpretaciones del pragmatismo) no fue la investigación de cómo los signos significan en el seno de la vida social, sino la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. "Su teoría del pragmaticismo (es decir, la lógica de la abducción) es la base de su semiótica. Por esta razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta" (Radford, 2006, p. 9).

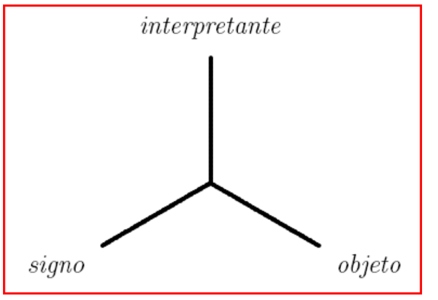
En el trabajo titulado, *How to make your ideas clear?* defendió su idea pragmaticista de cómo entender con claridad los conceptos. La "máxima pragmática" es un enunciado de lógica que propuso como recomendación normativa o principio regulativo cuya función es guiar el pensamiento hacia el logro de su propósito, aconsejando sobre la manera óptima de "lograr claridad en la aprehensión". Peirce enunció la máxima pragmática de diversas maneras a lo largo de los años. Una que nos parece más comprensible es la siguiente:

> "In order to ascertain the meaning of an intellectual conception one should consider what practical consequences might conceivably result by necessity from the truth of that conception; and the sum of these consequences will constitute the entire meaning of the conception". (Peirce, 1905, CP. 5.9) "Con el fin de determinar el significado de una concepción intelectual se debería considerar qué consecuencias prácticas pueden concebiblemente resultar por necesidad de la verdad de esa concepción; y la suma de estas consecuencias constituirá el significado completo de la concepción".

Burch (2010, p. 8) nos aclara el significado de la máxima pragmática. Cuando Peirce dice que el significado completo de una clara concepción consiste en el conjunto completo de sus consecuencias prácticas, tiene en mente que una concepción significativa debe tener algún tipo de "valor experiencial efectivo", debe, de alguna manera, estar relacionado con algún tipo de colección de observaciones empíricas posibles bajo condiciones especificables. Peirce insistió en que el significado completo de una concepción significativa consiste en la totalidad de tales especificaciones de posibles observaciones.

Los signos y sus tipos

Para Peirce el mundo de las apariencias es un mundo constituido enteramente de signos. Los signos son cualidades, relaciones, sucesos, estados, regularidades, hábitos, leyes, etc., que tienen significados o interpretaciones. Un signo es uno de los términos de una tripleta de términos que están indisolublemente conectados uno con otro por una relación triádica esencial que Peirce llama "la relación de signo". En la definición que dio Peirce de signo en 1897: "algo que está por algo para alguien" (CP 2.228) están explícitos los tres elementos básicos: signo, objeto, interpretante.



El signo, en sí mismo, (también llamado representamen) es el término en la relación de signo que usualmente se dice que representa o significa algo. Los otros dos términos en esta relación son llamados el objeto y el interpretante. El objeto es lo que ordinariamente se dice que es la "cosa" significada o representada por el signo, aquello para lo que el signo es signo de. El interpretante de un signo es aquello para lo que el signo representa el objeto. "Lo que Peirce quiere decir exactamente como interpretante es difícil de precisar. Es algo como una mente, un acto mental, un estado mental, o una característica o cualidad de la mente; de cualquier modo el interpretante es inexcusablemente mental". (Burch, 2010, p.9).

Nótese que el modelo no tiene forma triangular. Es, más bien, un trípode, de modo que el punto axial crea una interrelación entre un componente y otro componente del signo de la misma manera en que se crea la misma interrelación entre estos dos componentes y el tercer componente. Y así, se completa el signo triádico. El interpretante de un signo, en virtud de la definición que Peirce da de la relación de signo, debe ser él mismo un signo, y un signo además del mismo objeto que es (o fue) representado por el signo (original). El interpretante es un segundo significante del objeto, solo que uno que ahora tiene abiertamente un estatus mental. Pero, simplemente siendo un signo del objeto original, este segundo signo debe él mismo tener un interpretante, que a su vez es un nuevo, tercer signo del objeto, y de nuevo es uno con un estatus abiertamente mental. Y así sucesivamente. Así pues, si hay un signo de cualquier objeto, entonces hay una secuencia de signos del mismo objeto. Por tanto, cualquier cosa del mundo de las apariencias, puesto que es un signo, comienza una secuencia infinita de interpretantes mentales de un objeto.

Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce realiza la siguiente clasificación:

Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto. Los diagramas, tan usados en matemáticas y otros campos, se consideran ejemplos de iconos por la semejanza estructural con lo que representan.

Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.

Símbolos: Frente a los iconos y los índices (o síntomas), según Peirce los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tránsito.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse; en el caso particular de la fotografía, por ejemplo, se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto) pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Fases del método científico

Para Peirce, el método científico implica tres fases o etapas: abducción (formular conjeturas o crear hipótesis), deducción (inferir lo que corresponde si las hipótesis se cumplen), a inducción (probar las hipótesis). El proceso de paso por las tres etapas debería ser realizado con la preocupación de conseguir la economía de la investigación.
La deducción viene a significar para Peirce la obtención de conclusiones en cuanto al fenómeno que se espera observar si la hipótesis es correcta. La inducción significa el proceso completo de experimentación e interpretación realizada al servicio de la prueba de la hipótesis. La abducción no es siempre inferencia a la mejor explicación, sino que es inferencia a alguna explicación o al menos a algo que clarifica o hace rutinaria alguna información.

4. NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS SEGÚN WITTGENSTEIN

Entre las diversas cuestiones filosóficas tratadas por Wittgenstein sobresalen las referidas a las matemáticas, no sólo en las "Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas" (Wittgenstein, 1976), sino también en diversos apartados de las "Investigaciones filosóficas" y otros ensayos.

Sin embargo, a pesar de la extraordinaria repercusión que las ideas de Wittgenstein han tenido en la filosofía contemporánea y en otras disciplinas, como la sociología, psicología, etc., encontramos escasas referencias a las mismas en los trabajos publicados sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una excepción notable la encontramos en Weinberg y Gavelek (1987) donde se presentan los principales rasgos de una teoría socioconstructivista de la instrucción y el desarrollo de la cognición matemática basada en Wittgenstein y Vigotsky. También encontramos una estrecha relación entre la filosofía de Wittgenstein y las ideas recientes de Sfard (2000) sobre los objetos matemáticos, que sintetizamos en la sección 2.4.3, así como en el enfoque sobre el aprendizaje matemático que Kieran, Forman y Sfard (2001) designan como discursivo o comunicacional (sección 2.6.3).

La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein se sitúa en el extremo opuesto de las corrientes de tipo platónico-idealista y también de los enfoques psicologistas. Plantea el reto de superar el platonismo dominante, y por tanto dejar de hablar de objetos matemáticos como entidades ideales que se descubren, y dejar de considerar las proposiciones matemáticas como descripción de las propiedades de tales objetos. Nos propone una visión alternativa: Las proposiciones matemáticas deben verse como instrumentos, como reglas de transformación de proposiciones empíricas. Por ejemplo, los teoremas de la geometría son reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos, de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas.

Podemos decir que la revolución Wittgensteiniana - aún no digerida del todo en la epistemología y las ciencias cognitivas (McDonough, 1989)- debería conducir a una profunda revisión de gran parte de las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Cómo cambiaría la práctica de la enseñanza de las matemáticas asumiendo una epistemología de tipo antropológico como propone Wittgenstein? ¿Qué modelos instruccionales serían coherentes con la misma?

A continuación presentamos una síntesis de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein siguiendo el análisis de Baker y Hacker (1985).

4.1. El lenguaje matemático como herramienta

La concepción realista (Agustiniana) del significado de las palabras se basa en tratar cada palabra significante como un nombre. Esta idea informa la mayor parte de la reflexión sobre la filosofía de las matemáticas y de la psicología. Las expresiones matemáticas tales como '0', '-2'; (raíz de -1); 'alef subcero', o incluso '+', 'x^4', 'e^x', se toman como nombres de entidades, y la cuestión, "¿Qué significan", se reduce a, "¿En lugar de qué están"?

Durante mucho tiempo los matemáticos han sostenido que nada corresponde al uso de los números negativos, que estos símbolos están en lugar de nada. Producir una explicación rigurosa de en lugar de qué está un símbolo, por ejemplo, identificar un número negativo con una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales, se toma como demostración de que un símbolo tiene un significado. (Es sorprendente que tales explicaciones no juegan ningún papel en transmitir a un neófito cómo usar estos símbolos en las aplicaciones de los cálculos matemáticos, esto es, en emplear los números enteros negativos en las operaciones bancarias o en mecánica). Wittgenstein sostiene que la preconcepción de que los términos significantes son nombres oculta profundas diferencias en uso bajo una terminología uniforme engañosa. Además estimula el mito de que las diferencias en uso fluyen misteriosamente de las diferencias en la naturaleza de los objetos supuestamente nombrados.

Wittgenstein argumentó que deberíamos considerar las palabras como herramientas y clarificar sus usos en nuestros juegos de lenguaje. No debemos perder de vista el hecho de que las palabras-numéricas son instrumentos para contar y medir, y que los fundamentos de la aritmética elemental, esto es, el dominio de la serie de números naturales, se basa en el entrenamiento en el recuento.

Los filósofos se desvían pronto de estos puntos familiares tratando de buscar fundamentos más profundos para la aritmética. Frege ejemplificó este error. Comienza sus investigaciones de los números a partir de un examen de enunciados de recuento extra-matemáticos tales como 'Júpiter tiene cuatro lunas'. Pero después descartó su 'insight' mediante su convicción de que los numerales son nombres de objetos platónicos. Sucumbió al poder hipnotizante de la cuestión filosófica "¿Qué son los números?" y buscó una definición rigurosa como respuesta. Wittgenstein pensó que esta cuestión era engañosa ("¿Cuál es el significado de la palabra 'cinco'"? - "Aquí no se cuestiona tal cosa, sólo como se usa la palabra 'cinco'"). "Lo que estamos buscando no es una definición del concepto de número, sino una exposición de la gramática de la palabra 'número' y de los numerales". La asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

Las proposiciones matemáticas se deben distinguir también de las descripciones. Las deberíamos ver como instrumentos e indagar sobre sus papeles, sus usos en la práctica. Veremos entonces que su uso característico es como regla de transformación de proposiciones empíricas, o, de manera más general, como reglas de representación para encuadrar (framing) descripciones.

Por ejemplo, los teoremas geométricos funcionan como reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos y de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas. El contraste entre proposiciones descriptivas y proposiciones matemáticas que sirven como reglas de descripción es de la mayor importancia. El fallo en hacer esta distinción es fuente de confusiones al reflexionar sobre las matemáticas, arrastrando tras de sí otras sobre los conceptos de verdad, aserción, conocimiento y verificación.

Además, alimenta mitologías filosóficas tales como el Platonismo, que observa correctamente que las proposiciones matemáticas no son descripciones de signos y salta a la conclusión de que deben ser descripciones de otra cosa, esto es, entidades abstractas. Es igual de sencillo caer en la reacción formalista al Platonismo, creyendo que las proposiciones matemáticas describen algo: si no describen entidades abstractas entonces describen signos, y que elimina la distinción entre aplicar las técnicas matemáticas dentro de ellas mismas y aplicarlas fuera de las matemáticas.

Un enunciado como 'Los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales' parece un notable descubrimiento sobre objetos matemáticos, pero es parte de la construcción de un cálculo matemático, no un descubrimiento de hechos matemáticos sino la creación de nuevas normas de descripción (Baker y Hacker, 1985, p. 10).

La hipótesis acrítica de que cada palabra significativa es un nombre y cada sentencia es una descripción ocasiona tantos estragos a nuestro pensamiento sobre la mente como a nuestras reflexiones sobre las matemáticas. Los malentendidos de la imagen agustiniana se ramifican en ideas distorsionadas sobre los símbolos, la explicación y la comprensión de palabras, la comunicación, la representación, el sentido y no-sentido, etc.

4.2. Alternativa al platonismo y mentalismo

El análisis del uso del lenguaje matemático que hace Wittgenstein está dirigido de manera central a la superación del platonismo. Por ejemplo, decimos que '2+2 = 4' es una afirmación sobre números. Ciertamente no es un enunciado sobre signos (marcas sobre papel), ni sobre cómo la gente usa tales signos. De igual modo decimos que el enunciado 'Los leones son carnívoros' es una afirmación sobre los leones. Pero hay que insistir en la radical diferencia entre ambas sentencias. Los enunciados sobre leones nos dicen hechos sobre leones, pero lo que llamamos 'enunciados sobre números' tienen el papel de reglas para el uso de las palabras numéricas o numerales. Se trata de que evitemos pensar en la existencia de un dominio de objetos matemáticos, de manera similar a lo que ocurre con las proposiciones sobre leones que sí se refieren a un dominio de seres vivos.

El fallo en distinguir estos diferentes usos de 'referir' es uno de los muchos estímulos para apoyar el mito de que las proposiciones necesarias se refieren a tipos especiales de entidades, objetos abstractos, Objetos Ideales o Universales que constituyen la esencia de las cosas. Pensamos que si afirmamos una proposición matemática 'sobre' $\aleph_0$ estamos hablando sobre un ciudadano de un fantástico y misterioso dominio del número, 'el paraíso de Cantor'. Pero no estamos hablando de un dominio de nada, sólo dando reglas para el uso de '$\aleph_0$'. Cuando se especifican estas normas de representación podemos usar '$\aleph_0$' para hacer enunciados empíricos falsos o verdaderos (Baker y Hacker, 1985, p. 283).

Somos propensos a pensar de la geometría como la ciencia sobre Objetos Ideales. Decimos que una línea euclídea no tiene amplitud mientras que todas las líneas trazadas con un lápiz la tienen, que un triángulo euclídeo tiene exactamente 180º, mientras que todos los triángulos mundanos se desvían más o menos. Esta es una imagen ofuscada. Una geometría no es una teoría del espacio, sino más bien un sistema de reglas para describir objetos en el espacio.

No hay ninguna cosa como 'un Objeto Ideal', o 'un objeto abstracto' (p. 283). Debemos recordar que se comienza a hablar de Objetos Ideales para significar cosas que no son reales, que no tienen ninguna existencia salvo como ideas de la imaginación. Decir que un cierto símbolo 'a' significa un Objeto Ideal es decir algo sobre el significado, y por tanto el uso de 'a'. En particular, supone decir que este uso es en cierto aspecto similar al de signos que significan un objeto pero que 'a' no significa un objeto en absoluto. A veces se sostiene que Frege, en los Fundamentos de la Aritmética mostró que si uno cree en la objetividad de las matemáticas, entonces no hay ninguna objeción en pensar en términos de objetos matemáticos o concebirlos como si esperasen ser descubiertos. Pero esto es bastante equivocado.

Debido a que pensamos que las proposiciones necesarias expresan verdades de modo análogo a las proposiciones empíricas, porque creemos que se refieren a entidades de diverso tipo, pensamos de modo natural que algún tipo de realidad les corresponde. Y por tanto, no queremos decir meramente que tales proposiciones son verdaderas, sino que, por ejemplo, 'la verdad matemática es parte de la realidad objetiva'. La verdad de una proposición matemática es enteramente independiente de cómo sean las cosas en la realidad. ... Las proposiciones matemáticas son reglas de representación. Se dicen que son verdaderas si son proposiciones primitivas del sistema o si son probadas. Pero ciertamente el sistema es enormemente útil... (Baker y Hacker, 1985, p. 285).

4.3. Creación intradiscursiva de los objetos matemáticos

El análisis de las relaciones entre los símbolos y los objetos matemáticos que realiza Sfard (2000) proporciona un punto de vista que podemos calificar de no realista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y que consideramos necesario tener en cuenta para progresar hacia un enfoque unificado de la cognición matemática. La visión sobre las relaciones entre la realidad perceptible (que denomina realidad de hecho), el lenguaje, y la "realidad virtual" de los objetos matemáticos guarda una estrecha relación con la filosofía de las matemáticas propuesta por Wittgenstein, razón por la cual incluimos su análisis en esta sección.

Contrasta el discurso de la realidad de hecho (perceptible), (por ejemplo, "Las expresiones 'el fundador del psicoanálisis' y 'Sigmund Freud' significan lo mismo porque se refieren a la misma persona") y el discurso matemático (por ejemplo, "Los símbolos 2/3 y 12/18 significan lo mismo porque se refieren al mismo número") que considera refiriendo a una realidad virtual. Entre ambos discursos existen grandes similitudes, pero considera fundamental tomar conciencia de las diferencias entre los tipos de objetos referidos en cada caso, así como las relaciones entre los dos mundos.

El problema que aborda, expresado en términos semióticos, es: "Los símbolos matemáticos refieren a algo -¿pero a qué?, ... ¿Cuál es el estatuto ontológico de estas entidades?, ¿De dónde vienen? ¿Cómo podemos acceder a ellas (o construirlas)?" (p. 43)

Sfard rechaza la concepción que propone los signos y los significados como entidades independientes y adopta la visión de psicólogos como Vygotsky y semióticos como Peirce, de que los signos (el lenguaje en general) tiene un papel constitutivo de los objetos de pensamiento y no meramente representacional. Está de acuerdo básicamente con el postulado Wittgensteiniano de que el "significado de una palabra está en su uso en el lenguaje", pero tiene también la convicción de que desde el punto de vista psicológico, el problema del significado no se puede reducir sólo al análisis lingüístico.

La tesis central que defiende Sfard en este trabajo es que "el discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos: La actividad discursiva, incluyendo la producción continua de símbolos, es la que crea la necesidad de los objetos matemáticos; y son los objetos matemáticos (o mejor el uso de símbolos mediado por los objetos) los que, a su vez, influyen en el discurso y le lleva hacia nuevas direcciones" (p. 47).

4.4. Características y limitaciones del convencionalismo de Wittgenstein como modelo de cognición matemática

Las ideas de Wittgenstein sobre las matemáticas nos parecen de gran utilidad y relevancia para la educación matemática, aunque también pensamos que necesitan ser estudiadas críticamente y complementadas para que puedan constituir un marco pertinente para analizar en su complejidad los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas. En la problemática de la enseñanza de las matemáticas -particularmente de las actividades de planificación de la instrucción y la evaluación de los aprendizajes- nos parece necesario revisar algunos presupuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein.

La metáfora del objeto matemático nos parece una herramienta útil tanto para estructurar el cuerpo de conocimientos matemáticos (o si se prefiere la gramática matemática), como también para organizar los procesos de estudio de las matemáticas. Pensamos que dentro de la ilimitada variedad de usos de los términos, símbolos y expresiones matemáticas es posible identificar 'patrones de comportamiento' o 'prácticas prototípicas' locales, estructuradas en ciertos niveles de generalidad en torno a campos de problemas, que constituyen una guía para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el contexto de enseñanza de un saber constituido o en vías de constitución parece natural hablar de objeto matemático para referirnos a los componentes de dicho saber, que están dados como entidades culturales cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso básico de la institución correspondiente. La adopción en el seno de las instituciones educativas de una epistemología “realista”, no necesariamente platonista, y una semiótica referencial parece útil. Ahora bien, las entidades matemáticas deben ser concebidas en términos socioculturales, no como entidades ideales absolutas. Pensamos que es posible y necesario compatibilizar los enfoques realistas y pragmáticos para lograr un modelo de la cognición matemática adaptado a las necesidades de la educación matemática. La posición de Ullmann (1962) al respecto es un buen apoyo para esta articulación.

En la literatura de educación matemática nos parece difícil seguir la recomendación de Wittgenstein de evitar hablar del 'objeto matemático'. Incluso en el enfoque antropológico propuesto por Chevallard (1992) se introduce como noción clave la 'relación con el objeto' como sustituto de la idea de comprensión, conocimiento, etc. Los trabajos de Douady, con su dialéctica útil-objeto, la idea de 'reificacion' de Sfard y Dubinsky, o la expresión 'significado de un objeto matemático' (Godino y Batanero, 1994), son indicaciones de la, al menos aparente, utilidad del objeto. La metáfora del objeto parece ser un recurso útil del pensamiento y la comunicación, aunque también puede ocultar algunos aspectos, de modo que tenemos que aprender a controlar su uso[6].

Se debe estudiar si el considerar que tales objetos (conceptos, proposiciones, teorías) no son otras entidades que las reglas gramaticales de Wittgenstein (al menos desde el punto de vista institucional) permitiría resolver el dilema y evitar las confusiones de las que nos advierte.

Es cierto que el hacer matemático conlleva una faceta de creación, invención de reglas gramaticales para el uso de símbolos y expresiones, pero también supone descubrimiento de regularidades (patrones) en el mundo empírico y en el propio mundo matemático, que son el motivo de sus inventos. Tales regularidades persuaden de la conveniencia de extender el sistema conceptual en una cierta dirección. Como afirma Cañón (1993), la matemática es creación y descubrimiento; tras el estudio de Wittgenstein, y teniendo en cuenta las reflexiones y aportaciones de las investigaciones didácticas podríamos decir que la matemática es gramática y es heurística.

Como hemos visto, Wittgenstein enfatiza la dimensión constructiva de las matemáticas, su aspecto convencional y creativo como única vía para explicar el carácter necesario de las proposiciones matemáticas. Ahora bien, ¿cómo explicar la eficacia de las matemáticas para resolver problemas empíricos?. Nos parece que el reconocer la existencia de ciertas regularidades en el mundo que nos rodea, las cuales son la motivación de la adopción de las convenciones matemáticas, abre la vía al reconocimiento de la dimensión heurística de las matemáticas. Pensamos que la motivación de las estructuras matemáticas proviene de las regularidades perceptibles sobre el mundo que nos rodea. Por ejemplo, la curva normal de probabilidades es una de las estructuras matemáticas que organiza las regularidades observables en los errores de medición.

La filosofía de Wittgenstein nos parece insuficiente para basar en ella el análisis de los procesos de estudio de las matemáticas. Concebir la matemática como la gramática del uso de símbolos y expresiones resuelve el problema de explicar el carácter necesario de las proposiciones, pero no para explicar la eficacia de su aplicación, ni la motivación de su adopción. ¿Cómo se generan las reglas? No basta con saber seguir las reglas, hay que conocer su motivación, su aplicación, y sobre todo saber derivar nuevas reglas útiles para organizar nuestros mundos.

5. REPRESENTACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

En este apartado hacemos una síntesis de las principales nociones teóricas usadas como herramientas para describir la cognición en las investigaciones que se realizan en educación matemática. Predominan los constructos que designan los conocimientos del sujeto (representaciones mentales o internas) y sus relaciones con los objetos ostensivos (notaciones, símbolos, gráficos, materiales manipulativos, etc.), que se consideran como representaciones externas de los conocimientos individuales.

5.1. Sistemas de representación en educación matemática

[6] El papel de las metáforas en la formación de los conceptos matemáticos es un tema relevante en la investigación en educación matemática, como se muestra en los trabajos de Van Dormolen (1991), English, (1997), Lakoff y Núñez (2000), Font, Godino, Planas y Acevedo (2010).

Goldin (1998) presenta la noción de sistemas de representación y sus diversos tipos como el constructo clave de un modelo psicológico unificado del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Sugiere que los avances en los campos de la psicología, lingüística formal, semántica y semiótica, junto con el estudio de las estructuras matemáticas y la necesidad práctica de comprender las interacciones de los estudiantes con los entornos basados en el uso de ordenadores han motivado un intenso trabajo sobre las representaciones y los sistemas de símbolos en la psicología de la educación matemática. Esto se refleja en los trabajos publicados en los dos números monográficos dedicados al tema en la revista Journal of Mathematical Behavior (1998).

En este apartado vamos a identificar las características que se atribuye a la noción de representación en el campo de la psicología de la educación matemática. Esto facilitará su contraste con otras herramientas cognitivas desarrolladas desde diferentes marcos teóricos, así como identificar algunas limitaciones para que pueda servir de noción clave en el análisis de la cognición matemática, en su dimensión institucional y personal.

Interpretaciones del término 'representación'

El término 'representación' y la expresión 'sistema de representación', en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tiene las siguientes interpretaciones (Goldin y Janvier, 1998, p. 1):

1. Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas;

2. Una materialización lingüística, o un sistema lingüístico mediante el que se plantea un problema o se discute un contenido matemático, con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica.

3. Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas -incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.

4. Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Carácter sistémico

Las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación o una fórmula específica, una disposición concreta de bloques multibase, una gráfica particular en un sistema cartesiano adquieren sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones que se han establecido. "Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras" (Goldin y Stheingold, 2001,p. 2)

Dentro de cada sistema representacional se incluyen las convenciones que lo configuran así como las relaciones con otros objetos y sistemas matemáticos. El numeral 12, por ejemplo, debe interpretarse incorporando las reglas del sistema de numeración posicional decimal y todas las relaciones que guarda con otros sistemas de numeración y con todo el sistema de números reales.

Representaciones externas

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micromundos basados en el uso de ordenadores. Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar). El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: En el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica.

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, lenguajes de programación, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos (Goldin, 1998, p. 4).

Carácter convencional y ambigüedad

Los sistemas de representación son constructos convencionales, en el mismo sentido que lo puede ser un sistema de axiomas matemáticos. La decisión de donde empieza y termina un sistema, o si una estructura adicional es intrínseca a un sistema dado o procede de una relación simbólica entre dos sistemas, es arbitraria y está motivada por la conveniencia y simplicidad de la descripción. Por tanto, en un sistema representacional puede haber una cierta ambigüedad, que afecta al conjunto de reglas sintácticas y semánticas del sistema, en cuanto puede haber excepciones a tales reglas. En la práctica, la ambigüedad se resuelve teniendo en cuenta el contexto en el que el signo, la configuración, o la relación simbólica ambigua aparece.

Carácter bidireccional de la representación

La relación de representación (simbolización, codificación) entre dos sistemas es reversible. Dependiendo del contexto un gráfico puede proporcionar una representación geométrica de una ecuación de dos variables, y alternativamente una ecuación ($x^2 + y^2 =1$) puede proporcionar una simbolización algebraica de un gráfico cartesiano.

Representaciones internas

Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. Goldin incluye también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las configuraciones cognitivas internas pueden tener, o no tener, semejanza estructural con los sistemas externos, al menos en el modelo unificado que propone Goldin (1998, p. 147); la relación simbólica se puede establecer con sistemas externos o entre sistemas internos.

Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

Como tipos de representaciones cognitivas Goldin (1998) describe los siguientes:

- Verbales o sintácticas: capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los individuos, vocabulario matemático y no matemático, incluyendo el uso de la gramática y la sintaxis.
- Sistemas figurales (imagistic) y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales y visuales, o "imágenes mentales"; esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación)
- Procesos estratégicos y heurísticos: "ensayo y error", "descomposición en fases", etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a las matemáticas.

Interacción entre representaciones externas e internas

Se considera que la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Objetivo instruccional

Se considera que entre los fines fundamentales de la educación matemática están los objetivos representacionales: el desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente, e interactúen bien, con los sistemas externos convencionalmente establecidos de las matemáticas.

Remitimos al lector a Godino y Font (2010) para una descripción más extensa de la teoría de las representaciones desarrollada por G. Goldin, y su interpretación y valoración desde el “enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático” (Godino, Batanero y Font, 2007).

5.2. Registros de representación, comprensión y aprendizaje

Una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Un autor que se ha interesado particularmente por este uso variado de los sistemas de representación semiótica es Duval (1995), quién se pregunta: "¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?" (p. 3) Considera que esta pregunta sobrepasa el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje y apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano.

Duval da una respuesta afirmativa a esta cuestión aportando los siguientes argumentos:

1) No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

2) Existen representaciones mentales, conjunto de imágenes, conceptos, nociones, ideas, creencias, concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. "Permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible". (p. 20). Las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales lo están a una interiorización de las percepciones.

3) Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural.

4) Diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes e independientes. La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto de sus representaciones mentales. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas la expresa Duval afirmando que "no hay noesis[7] sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (p. 5). La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto.

[7] Noesis, aprehención conceptual de un objeto; semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

5) La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea; la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico. El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de sistemas de representación y los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis.

6) Las actividades cognitivas inherentes a la semiosis son tres: formación de representaciones en un registro semiótico particular, para "expresar" una representación mental, o para "evocar" un objeto real; el tratamiento o transformación de una representación dentro del mismo registro; conversión, cuando la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

5.3. Esquemas cognitivos

Invariantes operatorios y esquemas

Dentro de las teorías que postulan la pertinencia de considerar representaciones internas como constituyentes del conocimiento de los sujetos destacamos la elaborada por Vergnaud (1990, 1998). Con la noción de esquema, adaptada de la propuesta por Piaget, se propone una visión alternativa a los "sistemas de representación". Además de incorporar los elementos lingüísticos atribuye un papel esencial a la acción del sujeto en la constitución de los esquemas cognitivos, relativizándolos a una clase de situaciones. "Un esquema es la organización invariante de la conducta para una cierta clase de situaciones" (Vergnaud, 1990, p. 136).

Afirma que “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto constituyentes de los esquemas operatorios.

Un esquema es una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Comporta los siguientes componentes:

- Invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
- Anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
- Reglas de acción del tipo si ... entonces ... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
- Inferencias (o razonamientos) que permiten “calcular” las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Para Vergnaud "el concepto de esquema es el concepto más importante de la psicología cognitiva si aceptamos que la psicología se debe interesar por teorizar sobre la acción y la actividad" (Vergnaud, 1998, p. 172).

Como ejemplos de esquemas perceptivos-gestuales en matemáticas están:

- contar un conjunto de objetos;
- dibujar la imagen simétrica de una figura plana poligonal sobre papel cuadriculado;
- dibujar la imagen simétrica de una figura plana sólo con regla y compás;
- dibujar un gráfico o un diagrama.

En la aplicación de estos esquemas se ponen en juego conceptos y teoremas matemáticos. Contar un conjunto de objetos implica al menos el concepto de correspondencia uno a uno y el concepto de número cardinal. Usar un juego de escuadras y compás implica al menos el concepto de ángulo recto y el teorema de que la simetría conserva los ángulos.

Vergnaud propone una noción de concepto a la que atribuye una naturaleza cognitiva, al incorporar en la misma los invariantes operatorios “sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas”. Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización.

La abstracción reflexiva y los esquemas cognitivos en las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado (Dubinsky y cols.)

En Estados Unidos ha surgido un grupo de investigadores que, interesados principalmente por la enseñanza y aprendizaje del análisis matemático, han comenzado a aplicar y desarrollar las ideas de Piaget sobre la génesis de conceptos lógico.-matemáticos. Partiendo del concepto de abstracción reflexiva "se trata de elaborar un marco teórico que se pueda usar, en principio para describir cualquier concepto matemático junto con su adquisición " (Dubinsky, 1991, p. 97). Entre las nociones claves que introducen están, las de "acción, objetos, procesos y esquemas" (APOS) y descomposición genética de un concepto matemático.

La abstracción reflexiva se concibe como la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre tales objetos. En el desarrollo del pensamiento lógico-matemático se distinguen cinco tipos de construcciones: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

La noción de esquema se adopta e interpreta como una colección más o menos coherente de objetos y procesos. "La tendencia de un sujeto a invocar un esquema con el fin de comprender, tratar con, organizar o dar sentido a una situación problema dada es su conocimiento de un concepto matemático particular" (p. 103). Existen esquemas para situaciones que implican números, aritmética, funciones, proposiciones, cuantificadores, demostración por inducción, etc. Estos esquemas deben estar interrelacionados en una organización compleja más amplia. Uno de los fines pretendidos con la teoría general desarrollada es aislar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de las posibles relaciones entre esquemas. Esta descripción de relaciones entre esquemas relativos a un concepto es la descomposición genética de dicho concepto. Se interpreta como una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante pone en juego al desarrollar su comprensión del concepto matemático.

5.4. Conceptos y concepciones en educación matemática

Los términos 'concepto' y 'concepción' se utilizan con frecuencia en la investigación en didáctica de la matemática para describir las cogniciones de los sujetos, incluso también, para designar cogniciones de tipo institucional.

Sfard (1991) usa la palabra 'concepto' (a veces sustituida por "noción") para referirse a "una idea matemática en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro "del universo formal del conocimiento ideal". Por el contrario, el término "concepción" designa "al aglomerado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto - la contrapartida del concepto en el universo interno o subjetivo del conocimiento humano" (p. 3).

Tanto para los conceptos como para las concepciones Sfard propone distinguir dos tipos de facetas o descripciones: operacional y estructural, a las cuales atribuye una complementariedad mutua. El concepto puede verse como un objeto abstracto, con una cierta estructura descrita mediante definiciones estructurales; esto lleva a considerarlo como una cosa real -una estructura estática que existe en algún lugar del espacio y del tiempo. Esto supone reconocer la idea a primera vista y a manipularla como un todo, sin especificar los detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica considerarlo como una entidad más bien potencial, que adquiere existencia en cada circunstancia mediante una secuencia de acciones. Por ejemplo, la noción de función dada como un conjunto de pares ordenados responde a una descripción estructural, mientras que al proporcionar un proceso de cálculo de los valores imágenes a partir de los originales se tiene una descripción operacional.

Este carácter dual de los conceptos matemáticos se traslada también a las concepciones del sujeto sobre dichos objetos, identificándose una concepción operacional y otra estructural, ambas relacionadas de manera dialéctica y complementaria. "Un cierto grado de dominio en la realización de estos procesos, debería a veces ser visto como una base para la comprensión de los tales conceptos más bien que su resultado" (p. 10).

En este modelo cognitivo encontramos un cierto paralelismo y apoyo para el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática que proponemos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002): la distinción entre las facetas institucionales (ideas o conceptos matemáticos) y personal (concepciones), en ambos casos distinguiendo dos polos duales y complementarios (operacional y estructural).

La noción de concepción es el constructo usado con más frecuencia para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas, como puede inferirse del estudio que hace Artigue (1990). No se distingue claramente en la bibliografía de otras nociones como representación (interna), modelo implícito, etc. Como describe Artigue (1990, p. 265), "trata de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas".

En la descripción que hace Artigue se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento, que viene a corresponder al concepto según lo describe Sfard) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así Artigue (1990) habla de, "un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (p. 268); y también se habla de "las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)".

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) La concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado con relación a un objeto. En este caso sería el análogo subjetivo del concepto, entendido como la tripleta de Vergnaud (situaciones, invariantes y significantes).

b) La concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Imagen y definición conceptual

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual en relación a un concepto matemático.

Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Se considera que durante los procesos mentales de recuerdo y manipulación de un concepto se ponen en juego muchos procesos asociados, de manera consciente o inconsciente, que afectan a su significado y uso. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (p. 152). Se construye a lo largo de los años por medio de las experiencias de todo tipo y cambia a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y a medida que madura.

Se reconoce que la imagen conceptual de un sujeto sobre un concepto no tiene por qué ser coherente todo el tiempo a medida que se desarrolla ni estar de acuerdo plenamente con el concepto formal matemático. En una situación particular en la que se pone en juego un concepto matemático el sujeto activa solo una porción de su imagen conceptual: es la imagen conceptual evocada. En momentos diferentes, o incluso simultáneamente, distintas imágenes conceptuales parciales pueden no ser coherentes y entrar en conflicto.

Tall y Vinner se esfuerzan por describir la "imagen conceptual" como una entidad mental, pero no elaboran una descripción aceptable del concepto matemático (formal) entendido como objeto institucional o cultural. De los conceptos se tienen en cuenta casi exclusivamente su definición: "una configuración de palabras usadas para especificar el concepto" (p. 152). Se considera que mediante la definición el concepto queda "encapsulado" como una entidad unitaria.

Esta definición puede ser aprendida por un individuo de manera memorística o de un modo más significativo y relacionada en mayor o menor grado con el concepto como un todo. En un momento dado el sujeto puede expresar con sus propias palabras la definición de un concepto, lo que es interpretado como la encapsulación lingüística de su imagen conceptual. Esta definición personal del concepto puede diferir de la definición conceptual formal, esto es, la definición del concepto aceptada por la comunidad matemática en su conjunto.

Estas herramientas teóricas son usadas por Tall y Vinner para analizar las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales de estudiantes de último curso de secundaria sobre los conceptos de límite de sucesiones, límite de una función en un punto y la continuidad de funciones. El estudio se centra en la identificación de factores conflictivos potenciales entre distintos componentes de las imágenes y definiciones conceptuales, contrastadas con las definiciones formales de los conceptos matemáticos.

Los conceptos y campos conceptuales en G. Vergnaud

La noción de concepto

Vergnaud (1982), presenta una noción de concepto matemático que puede ser interpretada en términos semánticos. Este autor define un concepto como una tripleta (S, I, z) en la cual cada símbolo representa lo siguiente:

> S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;
>
> I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;
>
> z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (pág. 36).

En el trabajo de 1990, Vergnaud describe a S como la referencia (del concepto); I el significado ("el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas"); z, el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

La noción de campo conceptual

La primera descripción que hace Vergnaud (1990) de un campo conceptual es la de "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. "En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas." (p. 147). El campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En esta descripción del campo conceptual no se mencionan elementos de tipo subjetivo por lo que considero que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de “matemáticos”, nociones que no son teorizadas; la noción de concepto matemático, no parece ser la misma que la noción cognitiva de concepto que acaba de definir como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes.

6. EPISTEMOLOGÍAS Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

6.1. Constructivismos. Epistemología genética y enactivismo

En este apartado hacemos una síntesis de los aspectos ontológicos y epistemológicos que subyacen en las dos versiones de constructivismo más relevantes, el radical y el social, siguiendo, entre otros, los trabajos de Ernest (1994; 1998; 2010). Siguiendo la influencia de Piaget, el constructivismo emerge como el principal paradigma de investigación en psicología de la educación matemática.

La metáfora de la construcción

Lo que las diversas formas de constructivismo comparten es la metáfora de la construcción. Describe la comprensión del sujeto como la construcción de estructuras mentales, y el término "reestructuración", con frecuencia usado como sinónimo de "acomodación" o "cambio conceptual", contiene esta metáfora. Lo que la metáfora de la construcción no sugiere es que la comprensión se realice a partir de piezas de conocimiento recibidas. Reconoce que el conocer es activo, que es individual y personal, y que se basa sobre el conocimiento previamente construido.

El proceso es recursivo (Kieren y Pirie, 1991), y por ello los "bloques constructivos" de la compresión son ellos mismos producto de actos previos de construcción. De este modo, la distinción entre la estructura y el contenido de la comprensión sólo pueden ser relativos en el constructivismo. Las estructuras previamente construidas se convierten en el contenido en las siguientes construcciones.

La metáfora de la construcción está contenida en el primer principio del constructivismo según lo expresa von Glasersfeld (1989: 182): "el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido".

Constructivismo radical

Aunque se origina con Piaget, y fue anticipado por Vico, el constructivismo radical ha sido trabajado en su forma más moderna y completa en términos epistemológicos por von Glasersfel, en una serie de publicaciones a lo largo de los últimos 15 años. El constructivismo radical se define mediante el primero y el segundo de los principios de von Glasersfeld. El segundo afecta profundamente a la metáfora del mundo, así como a la de la mente: "la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica." (von Glasersfeld, 1989: 182).

Por consiguiente, "De explorador condenado a buscar 'propiedades estructurales' de una realidad inaccesible, el organismo inmerso en la experiencia se convierte ahora en un constructor de estructuras cognitivas que pretenden resolver tales problemas según los percibe o concibe el organismo" (von Glasersfel, 1983: 50).

La metáfora subyacente de la mente o sujeto cognitivo es la que corresponde a un organismo sujeto a evolución, modelada según la teoría de Darwin, con su concepto central de 'supervivencia del adaptado'. Esto viene indicado por la noción de Piaget de adaptación al entorno, y su discusión explícita de la evolución cognitiva, como se presenta en Piaget (1979). Según la metáfora evolutiva, el sujeto cognitivo es una criatura con entradas sensoriales, que aportan datos que son interpretados (o mejor construidos) mediante las lentes de sus estructuras cognitivas; también comprende una colección de aquellas estructuras siempre que esté adaptado; y un medio de actuar sobre el mundo exterior. El sujeto cognitivo genera esquemas cognitivos para guiar las acciones y representar sus experiencias. Estas son contrastadas según cómo se 'ajusten' al mundo de su experiencia. Aquellos esquemas que se 'ajustan' son tentativamente adoptados y retenidos como guías para la acción. La cognición depende de un bucle de retroalimentación subyacente.

Así pues, por una parte, hay una analogía entre la evolución y supervivencia del mejor adaptado de los esquemas en la mente del sujeto cognitivo y la evolución biológica de las especies en su conjunto. Los esquemas evolucionan, y mediante la adaptación llegan a acoplar mejor el mundo experiencial del sujeto. Los esquemas también se dividen y ramifican, y quizás algunas líneas se extinguen. Por otra parte, el propio organismo como un todo, se adapta al mundo de sus experiencias, en cierta medida por medio de la adaptación de sus esquemas.

En conjunto, el constructivismo radical es neutral en su ontología, no haciendo ninguna suposición sobre la existencia del mundo tras el dominio subjetivo de experiencia. La epistemología es decididamente falibilista, escéptica y anti-objetivista. El hecho de que no haya un último conocimiento verdadero posible sobre el estado de las cosas en el mundo, o sobre dominios como las matemáticas, es consecuencia del segundo principio, que es propio de la relatividad epistemológica. Como su nombre implica, la teoría del aprendizaje es radicalmente constructivista, todo conocimiento se construye por el individuo sobre la base de sus procesos cognitivos en diálogo con su mundo experiencial.

Constructivismo social

El constructivismo social considera al sujeto individual y el dominio de lo social como indisolublemente interconectados. Las personas están formadas mediante sus interacciones con los demás (así como por sus procesos individuales). Por tanto no hay ninguna metáfora subyacente para la mente individual completamente aislada. Ciertamente, la metáfora subyacente corresponde a la de las personas en conversación, abarcando a las personas en interacción lingüística y extra-lingüística significativas. La mente se ve como parte de un contexto más amplio, la 'construcción social del significado'.

De igual modo, el modelo constructivista social del mundo se corresponde con un mundo socialmente construido que crea (y es constreñido por) la experiencia compartida de la realidad física subyacente. La realidad construida humanamente está siendo todo el tiempo modificada e interactúan para adaptarse a la realidad ontológica, aunque nunca puede dar una 'verdadera imagen' de ella.

Adoptando las personas en conversación como metáfora subyacente, en el constructivismo social, se concede un lugar destacado a los seres humanos y a su lenguaje para la presentación del conocimiento. Siguiendo los trabajos germinales de Wittgenstein, Vygotsky, el Interaccionismo Simbólico y la Teoría de la Actividad, se considera el lenguaje como el conformador, y producto resultante, de las mentes individuales. Se concede una atención creciente al impacto del lenguaje en gran parte de la investigación en la psicología de la educación matemática, como al papel cognitivo desempeñado por características del lenguaje tales como la metonimia y la metáfora. Se reconoce cada vez más que una gran parte de la instrucción y el aprendizaje tiene lugar directamente por medio del lenguaje. Incluso el aprendizaje manipulativo y enactivo, enfatizado por Piaget y Bruner, tiene lugar en un contexto social de significado y es mediatizado de algún modo por el lenguaje y las interpretaciones asociadas socialmente negociadas.

En resumen, el paradigma de investigación del constructivismo social adopta una ontología relativista modificada (hay un mundo exterior soportando las apariencias a las que tenemos un acceso compartido, pero no tenemos un conocimiento seguro de él). Se basa en una epistemología falibilista que considera el 'conocimiento convencional' como aquel que es 'vivido' y aceptado socialmente. La teoría del aprendizaje asociada es constructiva (en el sentido compartido por sociólogos tales como Schutz, Berger y Luckman, así como los constructivistas), con un énfasis en la naturaleza esencial y constitutiva del lenguaje y la interacción social.

El constructivismo Piagetiano parece enfatizar los procesos cognitivos internos a expensas de la interacción social en la construcción del conocimiento por el aprendiz. Sin embargo el constructivismo tiene necesidad de acomodar la complementariedad entre la construcción individual y la interacción social.

Enactivismo

El enactivismo se ha convertido en una teoría del aprendizaje con una cierta importancia entre los investigadores en educación matemática. Según esta teoría de la cognición el individuo no es un simple observador del mundo sino que está corporalmente inmerso en el mundo y está conformado, cognitivamente y como un organismo físico completo, por su interacción con el mundo (Ernest, 2010, p. 42). Otra fuente del enactivismo es la teoría sobre la base corporal del pensamiento, vía el papel de las metáforas, de acuerdo con los trabajos de Lakoff y Johnson (1980) y Johnson (1987). Según estos autores toda la comprensión humana, incluyendo el significado, la imaginación y la razón, está basada sobre esquemas del movimiento corporal y de su percepción. Estos esquemas se extienden vía el uso de metáforas, las cuales proporcionan la base de cualquier comprensión, pensamiento y comunicación humana. En el libro de Lakoff y Núñez (2000) se desarrolla y aplica esta idea al caso de las matemáticas.

T. Kieren explica del siguiente modo algunos principios de una visión enactiva de la cognición matemática.

— La cognición matemática es vista como un proceso interactivo corporizado co-emergente con el entorno en el que la persona actúa. No es una representación reactiva con el entorno que intenta encajar el entorno. No es simplemente un fenómeno emergente de funciones corporales y cerebrales más primarias.

— La cognición matemática se observa como una acción progresiva corporizada con un entorno. La estructura de una persona determina la acción que la persona realiza. El entorno proporciona la ocasión y el espacio para la acción. De este modo ambos están co-implicados en la actividad matemática de una persona.
— La cognición matemática y la comprensión son vistos como procesos no lineales, recursivos, auto-organizados, por medio de los cuales uno construye y actúa en un mundo matemático.
— El profesor está en medio de las acciones matemáticas del estudiante, y se observa como formando una parte clave del entorno que proporciona las ocasiones para las acciones cognitivas observadas.

Ernest (2010, p. 42) considera que este enfoque de la cognición y el aprendizaje no es muy diferente de la epistemología y teoría del aprendizaje de Piaget y del constructivismo radical al que dio lugar.

Después de todo, el mecanismo central de equilibración de Piaget (el logro del equilibrio en el sujeto que conoce en respuesta a perturbaciones) está basado en un modelo biológico similar a un ser en interacción con su entorno. Piaget enfatiza la "abstracción reflexiva" como un mecanismo por el que los conceptos y los esquemas son abstraídos y generalizados, y el pensamiento metafórico puede ser visto como de una de sus modalidades. Ernest considera también que el uso de nociones y acciones educativas basadas en la cognición corporizada y el uso de las metáforas no está exento de debilidades y puede dar origen a ciertas dificultades, en particular provocar la aparición de concepciones incorrectas sobre determinados conceptos matemáticos.

6.2. Aprendizaje discursivo o comunicacional

El número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics*, editado por Kieran, Forman y Sfard (2001), agrupa un conjunto de trabajos que describen una nueva dirección en la educación matemática, tanto en la manera de considerar el aprendizaje de las matemáticas como incluso el propio pensamiento matemático.

En la literatura de investigación predomina aún el uso de nociones cognitivas tales como esquemas mentales, concepciones, conflictos cognitivos, pero se observa la progresiva introducción de otras nociones teóricas como actividad, patrones de interacción, fallo de comunicación. El aprendizaje, concebido como una adquisición personal está siendo complementado por una nueva visión del aprendizaje como un proceso de participación en un hacer colectivo. Lo importante no es el cambio del aprendiz individual sino el cambio en los modos de comunicarse con los demás.

El nuevo marco de investigación comienza a designarse como discursivo o comunicacional por el énfasis que atribuyen las investigaciones al lenguaje y a la comunicación, siendo una de las diversas implementaciones posibles del enfoque sociocultural, ligado a la escuela de pensamiento de Vygotsky y a la filosofía de Wittgenstein. Esta aproximación propone una visión del pensamiento humano como algo esencialmente social en sus orígenes y dependiente de factores históricos, culturales y situacionales de manera compleja.

Según Sfard (2001) la aproximación comunicacional a la cognición se basa en el principio teórico de que "la comunicación no debería considerarse como una mera ayuda al pensamiento sino casi como equivalente al mismo pensamiento" (p. 13). El pensamiento se concibe como un caso especial de actividad de comunicación y "el aprendizaje matemático significa llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman y Sfard, 2001, p. 5). El aprendizaje se concibe en términos de discurso, actividad, cultura, práctica, y su desarrollo se centra en las interacciones interpersonales.

La dicotomía problemática entre lo individual y lo social se resuelve cuando se reconoce que los enfoques cognitivistas e interaccionistas no son sino dos maneras de mirar algo que es básicamente un mismo fenómeno: el fenómeno de la comunicación, "que se origina entre las personas y que no existe sin el colectivo aunque incluso temporalmente involucre a un solo interlocutor" (p. 10).

Sfard (2001) presenta la metáfora del aprendizaje mediante la participación y comunicación como complementaria a la del aprendizaje como adquisición del conocimiento, tanto en el caso de considerarlo como recepción pasiva como mediante construcción activa. Los psicólogos que asumen el enfoque sociocultural ponen en duda la pertinencia de hablar de rasgos del individuo independientes del contexto, como puede ser la posesión (construcción o adquisición) de esquemas cognitivos. Prefieren considerar el aprendizaje "como llegar a convertirse en participantes de ciertas actividades específicas en el seno de comunidades de prácticas, en la iniciación en un discurso".

En el enfoque comunicacional o discursivo la dicotomía entre pensamiento y lenguaje prácticamente desaparece; el lenguaje deja de ser una mera "ventana de la mente", como una actividad secundaria del pensamiento que expresa algo ya disponible. Aunque pensamiento y lenguaje se deban considerar como dos entidades diferentes, "ambas se tienen que comprender básicamente como aspectos de un mismo fenómeno, sin que ninguno de ellos sea anterior al otro" (Sfard, 2001, p. 27).

El aprendizaje como iniciación en un discurso

En la aproximación comunicacional /participativa que describe Sfard el centro de atención de la investigación está en el discurso, término que designa cualquier ejemplo específico de comunicación, tanto si es diacrónica como sincrónica, si se realiza con otras personas o con uno mismo, tanto si es predominantemente verbal o con la ayuda de otro sistema simbólico. Los discursos se analizan como actos de comunicación, por lo que cualquier objeto que acompaña a la comunicación e influye en su efectividad - gestos, claves de la situación, las historias de los interlocutores, etc. - se deben incluir en el análisis. El aprendizaje matemático se debe definir en esta perspectiva como una iniciación en el discurso matemático, esto es, iniciación en una forma especial de comunicación conocida como matemática.

Como factores a tener en cuenta en el aprendizaje se deben considerar los útiles mediadores que las personas usan como herramientas de comunicación, y las reglas meta-discursivas que regulan el esfuerzo de comunicación. La comunicación, bien interpersonal o auto-orientada (pensamiento) no sería posible sin las herramientas simbólicas, entre las que destaca el lenguaje, pero que incluyen también notaciones, gráficos, tablas o fórmulas algebraicas.

Sfard (2001) considera que no tiene sentido hablar del pensamiento como algo con una existencia independiente de las herramientas simbólicas usadas en el proceso de comunicación. Esto significa, entre otras cosas, que deberíamos considerar como sin sentido enunciados tales como "el mismo pensamiento se ha comunicado mediante medios diferentes" (lo que, sin embargo, no quiere decir que no podamos interpretar dos expresiones de la misma manera, con interpretación y pensamiento siendo dos cosas diferentes). "En otras palabras, no hay ninguna 'esencia cognitiva' o 'pensamiento puro' que se pudiera extraer desde una materialidad simbólica y ponerla en otra" (p. 29).

En cuanto a las reglas meta-discursivas Sfard las describe como lo que guía el curso general de las actividades de comunicación. Entre las infinitas posibles referencias o interpretaciones que se pueden poner en juego en un discurso estas reglas permiten a los interlocutores reducirlas a un número manejable de elecciones, lo que hace posible la comunicación. En la mayoría de los casos son implícitas. Vienen a ser equivalentes, entre otros a nociones tales como juegos de lenguaje (Wittgenstein), normas socio-matemáticas (Yackel y Cobb, 1996).

Conflictos discursivos

Sfard (2001) distingue entre la noción de conflicto cognitivo y conflicto discursivo. El concepto de conflicto cognitivo considera que el sujeto está en constante persecución de la verdad sobre el mundo, y cualquier conocimiento nuevo que adquiere es el resultado de sus intentos por ajustar su comprensión al agregado de hechos e ideas dadas externamente e independientes de la mente. Implica, por tanto, la capacidad del sujeto para justificar racionalmente dos afirmaciones contrapuestas sobre el mundo.

En contraste, la noción de conflicto discursivo enfatiza la necesidad de la comunicación como motivación principal de nuestras acciones cognitivas, y señala el deseo de ajustar los usos discursivos propios de las palabras con los de otras personas. Se quiere explicar el fallo en la comunicación por el "desacuerdo en los usos habituales de las palabras, lo que es propiamente un fenómeno discursivo" (p. 48).

6.3. Epistemología experimental: La teoría de situaciones didácticas

De acuerdo con la síntesis de la teoría de situaciones elaborada por Sierpinska y Lerman (1996), en la base de esta teoría está la hipótesis epistemológica de que 'el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente solo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones' (Brousseau, 1986, p. 368). El acto de conocer está 'situado' en un sistema de restricciones las cuales, mediante el feedback sobre las acciones del sujeto, le señalan el coste de los ensayos y errores; el aprendizaje, es entendido como un cambio en las 'relaciones al medio' del sujeto. El aprendizaje ocurre cuando la aplicación de nociones previamente construidas resultan ser demasiado costosas, y el sujeto está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazos.

Un concepto no se desarrollará, si el sujeto nunca tiene una necesidad del mismo. Si todas las funciones con las que ha tratado un estudiante son continuas en cualquier punto, es probable que su comprensión de la expresión 'límite de la función en el punto x=a' se reducirá al 'valor de la función en x = a'. Si todos los espacios vectoriales que un estudiante ha visto son espacios en R^n, entonces probar que en un espacio vectorial arbitrario el vector nulo es único resultará carente de sentido para él. Para un concepto cuya enseñanza se pretende, la tarea del didacta consiste en organizar situaciones o sistemas de restricciones para las que el concepto dado aparecerá como una solución óptima (de menor coste).

Brousseau propone realizar un 'estudio epistemológico' del concepto para elaborar situaciones adaptadas para la enseñanza de un concepto matemático dado. Dicho estudio comprende investigar sobre,

- los significados del concepto dentro de la estructura de la teoría actual;
- las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto (sus variadas formas intermedias, concepciones y perspectivas que crearon 'obstáculos' con respecto a la evolución del concepto, visto desde la perspectiva de la teoría actual, problemas que llevaron a una 'superación' de estos obstáculos y permitieron un desarrollo posterior);
- el estudio de la psicogénesis del concepto (o su 'epistemología genética')
- un 'análisis didáctico', esto es un estudio de los significados del concepto pretendido y/o transmitido por su enseñanza, actualmente o en el pasado (incluyendo el estudio de la transposición didáctica o una comparación con los resultados de los análisis 'estructurales' e 'históricos').

El fin no es que los estudiantes recapitulen, en su aprendizaje, un proceso histórico-cultural del desarrollo de un concepto. El fin es encontrar un equilibrio entre una aproximación 'histórica' que haría al niño repetir muchas de las concepciones olvidadas del pasado, y una enseñanza directa del concepto tal y como aparece en la estructura actual, sin intentar construir el concepto sobre las concepciones de hoy del estudio ya que evolucionan dentro del marco de una cultura y una escolaridad.

La teoría de situaciones propone un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño, y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones. Los aspectos metodológicos de este programa son descritos como “ingeniería didáctica” (Artigue,1988).

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.

El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego, ("enjeu") en la situación. De este modo, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructivista en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Como teoría de resolución de problemas, asigna un papel crucial al resolutor. Comparada, por ejemplo a la Teoría del Procesamiemto de la Información que asimila el proceso de resolución con el funcionamiento de un ordenador, asigna al resolutor el papel de un decisor que desea hallar la estrategia ganadora y tiene la posibilidad de modificar su estrategia inicial una vez iniciado el proceso de solución.

Brousseau identificó varios tipos de situaciones didácticas, o estados de un contracto didáctico, que, para él, crearía un esquema general de una 'secuencia didáctica' o situaciones que provocan una 'génesis artificial' de un concepto matemático:

- situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor;
- situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor;
- situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas; y
- situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas, y la terminología 'oficial'.

A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección, por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas, los procedimientos aceptados. Dentro de cada una de estas situaciones, hay un componente 'a-didáctico', esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación cae enteramente de parte de los estudiantes. Se considera que esta es la parte más importante, ya que, de hecho, el fin último de la enseñanza es lo que Brousseau llama la 'devolución' del problema a los estudiantes.

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones estaba dirigido a una elaboración de un cierto número de 'situaciones fundamentales' relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que garantizaría, en cierto modo su adquisición por los estudiantes cualquiera que fuera la personalidad del profesor.

La hipótesis básica de la teoría de situaciones de Brousseau es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto, creando ciertas restricciones artificiales el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. Esta hipótesis está ciertamente más próxima al constructivismo que a las aproximaciones que se derivan de la noción Vygostskiana de 'zona de desarrollo próximo'.

Los obstáculos y sus tipos

El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo.

Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
- cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
- el alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
- después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

Contrato didáctico

El contrato didáctico es un conjunto de reglas - con frecuencia no enunciadas explícitamente - que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas (Brousseau, 1986).

Como ejemplo de este fenómeno se suele citar la investigación de Stella Baruk referida a la contestación de una amplia muestra de alumnos al problema denominado "la edad del capitán". Un enunciado típico de este problema es el siguiente:

> Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho. ¿Cuál es la edad del capitán?

Preguntados sobre este problema, la mayoría de los niños en los primeros años escolares responde que 42 o 32 años. Si se cambia el enunciado, incluyendo otros datos o variando los números se da como respuesta un valor que pueda obtenerse mediante operaciones aritméticas con los datos del enunciado. Son muy pocos los casos de niños que contestan que no tiene sentido la pregunta.

El interés de esta noción se debe a que muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

El contrato didáctico aparece como el producto de un modo específico de comunicación didáctica que instaura una relación singular del alumno con el saber matemático y con la situación didáctica. El contrato se elabora sobre la base de la repetición de hábitos específicos del maestro y permite, a su vez, al alumno "decodificar la actividad didáctica".

"La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno debe aprender. El objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente"... "El contrato es específico de los conocimientos puestos en juego y por tanto necesariamente perecedero: los conocimientos e incluso los saberes evolucionan y se transforman mientras que el contrato pedagógico tiene tendencia a ser estable" (Brousseau, 1988, p. 322).

El contrato según la TSD está estrechamente ligado a supuestos de tipo constructivista sobre el aprendizaje de las matemáticas en el seno de los sistemas didácticos. Los fenómenos didácticos que trata de explicar son consecuencia de las paradojas que surgen al asumir el siguiente postulado: "Aprender matemáticas, es resolver problemas. ¿Pero cómo resolverlos, si no se han aprendido previamente las matemáticas?" (Sarrazy, 1995, p. 23).

6.4. Antropología cognitiva. La matemática como actividad humana

El enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas que Chevallard viene desarrollando desde 1992 nos parece que aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que entronca con las corrientes de tipo pragmático. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. En los comienzos de la teoría antropológica se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay “actividad”, es decir trabajo humano, del que todos los objetos son emergentes.

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto se proponen como instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de “relación personal al objeto” que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.).

Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999; p. 224-229) de la noción de praxeología u organización matemática, que se ha convertido en una de las nociones básicas de la teoría antropológica, y que guarda similitud con el constructo “sistema de prácticas institucionales ligadas a un campo de problemas” introducida en Godino y Batanero (1994).

Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una técnica (al menos), τ, por una tecnología de τ, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por [T/τ/θ/Θ], constituye una praxeología puntual, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología –u organización praxeológica- está pues constituida por un bloque práctico-técnico, [T/τ], y por un bloque tecnológico-teórico [θ/Θ].

El bloque [θ/Θ] se identifica habitualmente como un saber, mientras que el bloque [T/τ] constituye un saber-hacer. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología [T/τ/θ/Θ] completa, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una minoración del saber-hacer, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías (p. 229).

Desde nuestro punto de vista la “teoría antropológica de lo didáctico (TAD) representa una ruptura epistemológica dentro de los marcos teóricos usados en la didáctica, de profundas consecuencias en cuanto al enfoque y planteamiento de los problemas de investigación. Pero al mismo tiempo creemos necesario hacer un esfuerzo por clarificar las nociones introducidas por Chevallard, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente en la actualidad, como son, por ejemplo, las de esquema, concepción y significado.

La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición del sujeto individual, de los que en un enfoque sistémico de la Didáctica no se puede prescindir y que quedan diluidos en la teorización de Chevallard. La consideración explícita de este dominio lleva a Godino y Batanero (1994) a diferenciar entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1982).

Por otra parte, creemos necesario destacar que las prácticas y los objetos que intervienen en ellas, y los que emergen de las mismas, así como las relaciones a estos objetos, están organizados en torno de una finalidad: adoptar decisiones, actuar, resolver tipos de situaciones problemáticas o ciertas disposiciones del entorno.

Teoría de los momentos didácticos

La teoría antropológica propone un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), los cuales pueden constituir el esbozo de una teoría instruccional. Los tipos de momentos didácticos que se consideran esenciales en el proceso de estudio de una organización matemática son los siguientes: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación.

Dentro de este modelo, hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas. Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza‑aprendizaje puede formularse en términos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

7. LA METÁFORA ECOLÓGICA EN EL ESTUDIO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

El análisis de la problemática que plantea el uso de las matemáticas en las distintas instituciones, las relaciones de los propios objetos matemáticos entre sí y con otros campos de conocimiento puede facilitarse comparando esta problemática con la de la ecología, considerada como la disciplina científica que se interesa por las relaciones entre los organismos y sus entornos pasados, presentes y futuros. "Estas relaciones incluyen las respuestas fisiológicas de los individuos, la estructura y dinámica de las poblaciones, las interacciones entre especies, la organización de las comunidades biológicas y el procesamiento de la energía y la materia en los ecosistemas" (Revista "Ecology"; American Ecological Society)

Consideramos que en un enfoque unificado del conocimiento matemático el empleo de herramientas conceptuales procedentes de la ecología pueden desempeñar un papel útil, en particular el concepto de econicho y la de relación ecológica entre objetos matemáticos. Un enfoque moderno de estos conceptos, basado en la teoría general de sistemas (Patten y Auble, 1980), permite aplicarlos a objetos no vivos, sustituyendo los criterios de "viabilidad", persistencia o existencia indefinida, por cualquier noción de utilidad, disponibilidad, acoplamiento o compatibilidad.

Hasta aquí hemos interpretado la "ecología de los objetos matemáticos" como una metáfora que ayuda a comprender la génesis, desarrollo y funcionamiento de dichos objetos (sistemas de prácticas, procedimientos, conceptos, teorías, etc.). Pero hay que resaltar que existe una corriente en epistemología y sociología del conocimiento que va más allá de un planteamiento metafórico para estas cuestiones. Toulmin (1977) introduce la expresión "ecología intelectual" para destacar las cuestiones de función y adaptación a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas de los conceptos colectivos y los métodos de pensamiento. Asimismo, el trabajo de Morin (1992), "Las ideas, su hábitat, su vida, sus costumbres, su organización" constituye un ejemplo relevante. Este autor considera tan inadecuada la creencia en la realidad física de las ideas, como el negarles un tipo de realidad y existencia objetiva. Para este autor, las ideas en general (y por tanto las nociones matemáticas), además de constituir instrumentos de conocimiento, tienen una existencia propia y característica.

> "Los números son reales, aún cuando no existan en tanto que tales en la naturaleza. Su tipo de realidad, transcendente, cuasi pitagórica según un punto de vista, no ha dejado de atormentar al espíritu de los matemáticos" (Morin, 1992; p. 111).

Las creaciones del espíritu, aunque producidas por el hombre y dependientes de la actividad humana que las producen, adquieren una realidad y una autonomía objetiva; configuran lo que Popper denomina el "tercer mundo" y Morin (usando el término de Teilhard de Chardin) describe como noosfera. La noosfera emerge con vida propia a partir del conjunto de las actividades antroposociales. En consonancia con esta "nueva realidad" surge la posibilidad de una ciencia, la noología, que sería la ciencia de la vida de los "seres del espíritu", considerados como entidades objetivas.

> "Pero esto no excluye en absoluto considerar igualmente estas "cosas" desde el punto de vista de los espíritus/cerebros humanos que las producen (Antropología del conocimiento) y desde el punto de vista de las condiciones culturales de su producción (Ecología de las ideas)" (Morin, 1992; p. 115).

Todos estos puntos de vista son complementarios. Esta nueva perspectiva epistemológica lleva a distintos pensadores a considerar las ideas como entidades dotadas de una actividad propia y a plantearse las siguientes preguntas:

> "¿Cómo actúan unas ideas sobre otras? ¿Existe una especie de selección natural que determina la supervivencia de ciertas ideas y la extinción de otras? ¿Qué tipo de economía limita la multiplicación de ideas en una región del pensamiento? ¿Cuáles son las condiciones necesarias para la estabilidad (o la supervivencia) de un sistema o subsistema de este género" (Bateson, 1977)[8].

El locus o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuo de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis" (White, 1983, p. 274).

La aplicación de la metáfora ecológica al estudio de la evolución de los saberes implica considerarlos

[8] "Ecología del espíritu"; citado por Morín (1992, p. 112).

como "organismos" u "objetos" que interaccionan y desempeñan un papel en el seno de instituciones donde se reconoce su existencia cultural, las cuales vienen a ser su "habitat". Parece claro que no es posible pensar en los saberes independientemente de las personas que los piensan y usan. Pero la identificación de la existencia de un saber precisa de un reconocimiento colectivo, esto es, se trata de un emergente de un sistema de prácticas sociales reconocidas. Una tipificación de acciones habitualizadas por tipos de actores es una institución (Berger y Luckmann, 1968); las instituciones son, pues, los hábitat de los saberes.

Una de las posibilidades que ofrece el paradigma ecológico consiste en su capacidad de dar sentido a nuevas cuestiones que de otro modo parecen evidentes o sin interés. Asimismo, lleva a centrar nuestra atención en aspectos contextuales e interacciones que con frecuencia pasan inadvertidos.

A título de ejemplo indicamos, a continuación, algunas de estas cuestiones.

a) ¿Cuáles son los hábitats que ocupan actualmente los saberes matemáticos? ¿Cuáles son los distintos usos que se hace de las matemáticas en dichos hábitats?

b) ¿Existen instituciones en las que las matemáticas podrían ser utilizadas más intensa y adecuadamente?

c) ¿Qué tipo de restricciones del entorno (factores limitativos) dificultan que las matemáticas ocupen los nichos ecológicos vacíos?

d) ¿Cómo se relacionan las matemáticas con los restantes saberes presentes en las distintas instituciones?

e) ¿Es posible identificar sub-especies (sub-saberes) como consecuencia de fenómenos de adaptación al entorno?

f) ¿Existen relaciones especiales de competición, simbiosis, de dominancia y control entre saberes y sub-saberes que condicionen la difusión idónea de las matemáticas?

g) ¿Qué tipo de dependencias (semióticas, instrumentales, de cooperación, simbiosis, subordinación, etc.) existen entre distintas praxeologías matemáticas y entre los componentes de una praxeología dada?

8. NECESIDAD DE UN ENFOQUE UNIFICADO SOBRE EL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En las secciones anteriores hemos descrito resumidamente las principales nociones y enfoques teóricos que han servido de fundamento y punto de partida para nuestras propias reflexiones acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, su enseñanza y aprendizaje. En esta última sección sintetizamos las conclusiones a las que hemos llegado y los criterios que consideramos necesarios adoptar para progresar hacia un modelo unificado sobre el conocimiento y la instrucción matemática que trate de articular de manera coherente distintas perspectivas teóricas. Los trabajos de Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) tratan de avanzar en dicha dirección.

Las principales características que debemos atribuir a las matemáticas son las siguientes:

(a) Las matemáticas constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos e internos, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc., emergen y evolucionan progresivamente. Las acciones de las personas deben ser consideradas, por tanto, como la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas Piagetianas.

(b) Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extra-matemáticas e incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extra-matemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contexto. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

(c) Las matemáticas crean un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental, que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

(d) La actividad matemática se propone, entre otros fines, la construcción de un sistema conceptual lógicamente organizado. Por ello, cuando añadimos un nuevo conocimiento a la estructura ya existente, no sólo se aumenta dicha estructura, sino que el conjunto de relaciones existentes queda modificado.

Estas ideas son compatibles con las perspectivas Piagetianas y además tienen en cuenta la realidad social del trabajo matemático, que se produce en comunidad. Cuando un objeto matemático ha sido aceptado como parte del sistema en una institución (matemática o extra-matemática), o por una persona, puede considerarse como una realidad textual/gramatical y un componente de la estructura global. Puede ser manipulado como un todo para crear nuevos objetos matemáticos, ampliando el rango de herramientas matemáticas. Pero al mismo tiempo, introduce nuevas restricciones al lenguaje y el trabajo matemáticos.

En el conocimiento matemático es necesario distinguir, en consecuencia, dos dimensiones interdependientes: personal (subjetiva o mental) e institucional (objetiva, contextual). Dado que los sujetos se desarrollan y viven en el seno de diversas instituciones, su conocimiento estará mediatizado por las particularidades del conocimiento contextual correspondiente. Es importante reconocer que las matemáticas, como realidad cultural (Wilder, 1981), adoptan distintas "formas de estar" y de funcionar según los grupos humanos que las cultivan, aunque ello no significa que debamos reconocer el papel dominante y de control de la organización formal, lógico-deductiva, adoptada por las matemáticas en la institución "productora del saber", debido, entre otros motivos, a su "eficacia" en el planteamiento y resolución de nuevos problemas. Esto aconseja concebir los objetos y su significado con un carácter esencialmente relativista, lo cual permitirá apreciar mejor las adaptaciones e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos al ser transmitidos entre personas e instituciones.

Consideramos que las nociones cognitivas que se están usando actualmente en educación matemática (representaciones, concepciones, esquemas, etc.) atienden a aspectos parciales de la cognición matemática. Pensamos que son insuficientes para analizar las distintas facetas implicadas en el estudio de las matemáticas.

El presupuesto anti-representacionista de Wittgenstein ha llevado a la aproximación antropológica a prescindir del uso de las palabras consistente en nombrar y representar otras entidades, y por tanto, es ciego respecto de los procesos de semiosis. De una posición filosófica en que todo era representacional se ha pasado a otra en que nada es representación, sino acción.

La ontología matemática que propone el "enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático" (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) concibe el objeto matemático como un emergente de los sistemas de prácticas ligadas a campos de problemas. Asimismo, de acuerdo con la máxima pragmática (Peirce, 1978) interpreta el significado del objeto en términos de tales sistemas de prácticas, lo que puede ser equivalente a ligar a una regla el sistema de actuaciones derivadas de su seguimiento en cada juego de lenguaje en que se usa.

Esbozo de una teoría instruccional

La investigación didáctica debe afrontar el problema del estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en toda su complejidad. Aunque una investigación particular tenga que centrarse en aspectos específicos (análisis epistemológico y/o cognitivo de un concepto, o un reducido campo de problemas), no se debe perder de vista la perspectiva sistémica -entendida en su versión débil- , y tratar de desarrollar modelos teóricos que articulen las facetas epistemológica, cognitiva e instruccional.

El foco de atención primario de una investigación didáctica debemos situarlo en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el seno de las instituciones educativas. Por tanto, se tratará de caracterizar la naturaleza y factores condicionantes de las relaciones entre un saber, los alumnos que tratan de apropiarse de dicho saber con la ayuda de un profesor, y bajo unas circunstancias contextuales determinadas. En su conjunto estos componentes definen un sistema dinámico, cuya evolución en el tiempo se puede modelizar (al menos metafóricamente) como un proceso estocástico, siendo necesario estudiar los estados del sistema, las trayectorias o secuencias de estados de cada uno de los componentes y los criterios de idoneidad didáctica en cada una de las facetas o dimensiones implicadas (Godino, Contreras y Font, 2006).

REFERENCIAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9, 3, 281-308.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2,3), 241-286.

Balacheff, N. (1990). Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, (4), 259-272.

Baker G. P. y Hacker P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical*

commentary on the Philosophical Investigations. Glasgow: Basil Blackwell.
Bauersfeld, H. (1995). "Language Games" in the mathematics classroom: their function and their effects. En Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). *The Emergence of Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp.271-292). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.
Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. En H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds.). *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Educatíon (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp: Proccedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.
Berger, P. y Luckmann, T. (1968). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: Amorrortu.
Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.
Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].
Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Madrid, Alianza. Col. Psicología Minor, 1991.
Brousseau, G. (1980). Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. Recherches en Didactique des Mathematiques, 1: 10-15.
Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9 (3), 309-336.
Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.
Burch, R. (2010). Charles Sanders Peirce. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* http://plato.stanford.edu/entries/peirce/
Campos, D. G. (2010). Peirce's Philosophy of Mathematical Education: Fostering Reasoning Abilities for Mathematical Inquiry. *Studies in Philosophy and Education*, 29, 5, 421-439. DOI: 10.1007/s11217-010-9188-5.
Cañón, C. (1993). *La Matemática: Creación o Descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Grenoble:* La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.
Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3), 17-54.
Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.
Cobb, P. (1989), Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 9, 2 (June 1989), 32-42).
Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Cobb, P., Yackel y McClain, K. (2000) (Eds.). *Symbolizing and communicatins in mathematics classrooms.* London: Lawrence Erbaum Associates.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Dummett, M.A.E. (1991). *¿Qué es una teoría del significado?* En, L.M. Valdés (Ed.), La búsqueda del significado. Madrid: Tecnos. [original en inglés publicado en 1975]

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 5, 37-65 (IREM de Strasbourg).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, Lumen, 1979).

Eco, U. (1984). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Madrid: Lumen, 1990.

Eco, U. (1999). *Kant y el ornitorrinco*. Barcelona: Lumen.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics.* New York: SUNY.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. En, B. Sriraman y L. English (Eds), *Teories of mathematics education. Seeking new frontiers* (pp. 39-47). Heidelger: Springer.

Font, V. (2000b). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35. [http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm].

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 15-19.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Kluwer, A. P.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer AC.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante,* 2, nº 2, 69-79.

Godino, J. D. (202). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 189-210.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70-92.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 135-165.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour*, 17 (1), 1-4

Goldin, G. y Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination and reason*. Chicago: University of Chicago Press.

Kaput, J.J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 266-281.

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 46, 1-12.

Kieren, T. Enactivism and mathematics education. (Descargado el 27-9-2010 de, http://www.acadiau.ca/~dreid/enactivism/EnactivismMathEd.html)

Kutschera, F. von (1971). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos. [Sprachphilosphie. Vilhem Fink Verlag, München, 1979]

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Were mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Linnebo, O. (2009). Platonism in the philosophy of mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

Morin, E. (1992). *El método. Las ideas.* Madrid: Cátedra (orig. francés, Editions du Seuil, 1991).

Ogden, C.K. y Richards, I.A. (1923). *El significado del significado*. Barcelona, Paidos, 1984.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61, (1-2), 11-38.

Patten, B. C. y Auble, G.T. (1980). System approach to the concept of niche. *Synthese* 43, 155-181.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols., C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Piaget, J. (1979). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidos.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* London: Routledge.

Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, Morata.

Putnam, H. (1975), El significado de "significado". En: L.M. Valdés (Ed.), *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-22.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, 112, 85-118.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp.38-75). London: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12 (2), 151-169.

Tirosh, D. (1999). Forms of mathematical knowledge: learning and teaching with understanding. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 1-9.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana (I). El uso colectivo y la evolución de los conceptos***.** Madrid: Alianza (ed. orig. inglesa de 1972).

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Madrid: Aguilar, 1978.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics,* 3 (2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal for Mathematical Behaviour*, 17 (2), 167-181.

Voigt, J.(1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). (pp. 163-199).

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27: 458-477.