BASES EPISTEMOLÓGICAS E INSTRUCCIONALES DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Juan D. Godino[2]

Universidad de Granada

Resumen

Se describen las principales características de diversos marcos teóricos usados en educación matemática sobre los cuales se apoya el componente epistemológico e instruccional del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS). En particular se resumen las características de los enfoques constructivistas, aprendizaje discursivo, aprendizaje basado en la indagación y resolución de problemas, aprendizaje basado en la transmisión, teoría de situaciones didácticas, praxeologías didácticas, teoría cultural de la objetivación y enfoque ecológico de la epistemología. Esta perspectiva permite identificar los antecedentes y filiaciones de los supuestos educativos e instruccionales del EOS, en particular de las nociones de configuración didáctica y dimensión normativa. Así mismo, se menciona la noción de idoneidad didáctica como herramienta que permite atender al componente valorativo de la Didáctica de la Matemática entendida como tecno-ciencia.

Palabras clave: educación matemática, epistemología, aprendizaje, enseñanza, enfoque ontosemiótico

Epistemological and instructional bases of the Onto-semiotic Approach in Mathematics Education

Abstract

The main characteristics of various mathematics education theoretical frameworks, which support the epistemological and instructional components of the Onto-semiotic Approach in Mathematics Education (OSA), are described. In particular, the characteristics of constructivist approaches, discursive learning, inquiry - based learning and problem solving, transmission - based learning, didactic situations theory, didactic praxeologies, cultural theory of objectification and the ecological approach to epistemology are summarized. This analysis is used to identify the background and affiliations of the OSA educational and instructional assumptions; in particular, the notions of didactic configuration and normative dimension. Likewise, the notion of didactic suitability is described as a tool that attends to the evaluative component of Didactics of Mathematics, when it is understood as techno-science.

Keywords: mathematics education, epistemology, learning, teaching, onto-semiotic approach

---

[1] Godino, J. D. (2018). Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf (Versión ampliada y revisada de la segunda parte del trabajo titulado, *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*)

[2] Profesor del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación y miembro del Grupo de Investigación *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística*. Universidad de Granada.

1. INTRODUCCIÓN

La acción efectiva sobre los problemas reales de la clase requiere desarrollar teorías instruccionales específicas que ayuden al profesor en la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se precisa elaborar teorías educativas que articulen las facetas epistémica y ecológica (teorías curriculares), junto con teorías del aprendizaje (facetas cognitiva y afectiva) y teorías orientadas al diseño instruccional, esto es, a la práctica de la enseñanza.

El enfoque de la Didáctica de las Matemáticas que la considera como una "ciencia de diseño" es resaltado por diversos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010). Por ejemplo, Lesh y Sriramn (2010, p. 124) reflexionan sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática, planteándose estas cuestiones:

- ¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados?
- ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras?
- ¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares – y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes?

La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una revisión de los diversos manuales de investigación sobre educación matemática revela la ausencia de consenso sobre teorías de diseño instruccional aplicadas a la enseñanza de las matemáticas. "Lo que constituye una buena enseñanza es usualmente controvertido y permanecerá controvertido" (Frankle, Kazemi y Battey, 2007, p. 226). Hiebert y Grouws (2007, p. 372) también muestran su escepticismo sobre este tema, "Teorías útiles y robustas sobre la enseñanza en la clase no existen. Teorías que consideren las conexiones entre la enseñanza en la clase y el aprendizaje de los estudiantes están incluso menos desarrolladas"

A lo sumo encontramos planteamientos generales de índole cognitivo o sociocultural (diversos enfoques constructivistas, interaccionistas, . . .), que no tienen en cuenta la especificidad del conocimiento matemático.

Ante este panorama, una vez elaboradas herramientas teóricas para analizar las dimensiones ontológica, semiótica, antropológica y cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) se han abordado las cuestiones centrales propias del diseño instruccional. Dichas se cuestiones se pueden formular en los siguientes términos (Godino, 2012):

- PIM (Problema de la instrucción matemática[3] significativa): ¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?

[3] Usamos la expresión *instrucción matemática* para referirnos a los procesos de enseñanza-aprendizaje dirigidos y organizados para el estudio de unos contenidos o tipos de problemas matemáticos específicos, en los cuales intervienen, por tanto, unos determinados sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y unos recursos específicos.

- PN (Problema normativo): ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?
- PV (Problema valorativo): ¿Qué criterios o principios didácticos pueden orientar el análisis retrospectivo de los procesos instruccionales y orientar su rediseño?

Estas cuestiones instruccionales se han estudiado en el EOS partiendo de las teorías disponibles, tratando de avanzar en la construcción de herramientas fundamentadas y coherentes de análisis e intervención didáctica.

El objetivo de este trabajo es sintetizar las principales características de marcos teóricos usados en educación matemática que abordan cuestiones centrales sobre el aprendizaje y la enseñanza, las cuales se han tenido en cuenta en la construcción de las herramientas *configuración didáctica*, *dimensión normativa* e *idoneidad didáctica*. Estas son las herramientas que propone el EOS para describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática.

En particular, en este trabajo se incluyen secciones sobre los enfoques constructivistas, aprendizaje discursivo o comunicacional, aprendizaje basado en la indagación y resolución de problemas, aprendizaje basado en la transmisión, teoría de situaciones didácticas, praxeologías didácticas, teoría cultural de la objetivación y enfoque ecológico de la epistemología. Después de estas teorías se incluye una síntesis de los supuestos epistemológicos asumidos por el EOS y de las herramientas introducidas para el diseño, análisis y valoración de los procesos de instrucción matemática.

2. CONSTRUCTIVISMOS. EPISTEMOLOGÍA GENÉTICA Y ENACTIVISMO

En este apartado hacemos una síntesis de los aspectos ontológicos y epistemológicos que subyacen en las dos versiones de constructivismo más relevantes, el radical y el social, teniendo en cuenta, entre otros, los trabajos de Ernest (1994; 1998; 2010). Siguiendo la influencia de Piaget, el constructivismo emerge como el principal paradigma de investigación en psicología de la educación matemática.

2.1. La metáfora de la construcción

Lo que las diversas formas de constructivismo comparten es la metáfora de la construcción. Describe la comprensión del sujeto como la construcción de estructuras mentales, y el término "reestructuración", con frecuencia usado como sinónimo de "acomodación" o "cambio conceptual", contiene esta metáfora. Lo que la metáfora de la construcción no sugiere es que la comprensión se realice a partir de piezas de conocimiento recibidas. Reconoce que el conocer es activo, que es individual y personal, y que se basa sobre el conocimiento previamente construido.

El proceso es recursivo (Kieren y Pirie, 1991), y por ello los "bloques constructivos" de la compresión son ellos mismos producto de actos previos de construcción. De este modo, la distinción entre la estructura y el contenido de la comprensión sólo pueden ser relativos en el constructivismo. Las estructuras previamente construidas se convierten en el contenido en las siguientes construcciones.

La metáfora de la construcción está contenida en el primer principio del constructivismo según lo expresa von Glasersfeld (1989: 182): "el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido".

2.2. Constructivismo radical

Aunque se origina con Piaget, y fue anticipado por Vico, el constructivismo radical ha sido trabajado en su forma más moderna y completa en términos epistemológicos por von Glasersfel, en una serie de publicaciones a lo largo de los últimos 15 años. El constructivismo radical se define mediante el primero y el segundo de los principios de von Glasersfeld. El segundo afecta profundamente a la metáfora del mundo, así como a la de la mente: "la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica." (von Glasersfeld, 1989: 182).

Por consiguiente, "De explorador condenado a buscar 'propiedades estructurales' de una realidad inaccesible, el organismo inmerso en la experiencia se convierte ahora en un constructor de estructuras cognitivas que pretenden resolver tales problemas según los percibe o concibe el organismo" (von Glasersfel, 1983: 50).

La metáfora subyacente de la mente o sujeto cognitivo es la que corresponde a un organismo sujeto a evolución, modelada según la teoría de Darwin, con su concepto central de 'supervivencia del adaptado'. Esto viene indicado por la noción de Piaget de adaptación al entorno, y su discusión explícita de la evolución cognitiva, como se presenta en Piaget (1979). Según la metáfora evolutiva, el sujeto cognitivo es una criatura con entradas sensoriales, que aportan datos que son interpretados (o mejor construidos) mediante las lentes de sus estructuras cognitivas; también comprende una colección de aquellas estructuras siempre que esté adaptado; y un medio de actuar sobre el mundo exterior. El sujeto cognitivo genera esquemas cognitivos para guiar las acciones y representar sus experiencias. Estas son contrastadas según cómo se 'ajusten' al mundo de su experiencia. Aquellos esquemas que se 'ajustan' son tentativamente adoptados y retenidos como guías para la acción. La cognición depende de un bucle de retroalimentación subyacente.

Así pues, por una parte, hay una analogía entre la evolución y supervivencia del mejor adaptado de los esquemas en la mente del sujeto cognitivo y la evolución biológica de las especies en su conjunto. Los esquemas evolucionan, y mediante la adaptación llegan a acoplar mejor el mundo experiencial del sujeto. Los esquemas también se dividen y ramifican, y quizás algunas líneas se extinguen. Por otra parte, el propio organismo como un todo, se adapta al mundo de sus experiencias, en cierta medida por medio de la adaptación de sus esquemas.

En conjunto, el constructivismo radical es neutral en su ontología, no haciendo ninguna suposición sobre la existencia del mundo tras el dominio subjetivo de experiencia. La epistemología es decididamente falibilista, escéptica y anti-objetivista. El hecho de que no haya un último conocimiento verdadero posible sobre el estado de las cosas en el mundo, o sobre dominios como las matemáticas, es consecuencia del segundo principio, que es propio de la relatividad epistemológica. Como su nombre implica, la teoría del aprendizaje es radicalmente constructivista, todo conocimiento se construye por el individuo sobre la base de sus procesos cognitivos en diálogo con su mundo experiencial.

2.3. Constructivismo social

El constructivismo social considera al sujeto individual y el dominio de lo social como indisolublemente interconectados. Las personas están formadas mediante sus interacciones con los demás (así como por sus procesos individuales). Por tanto, no hay ninguna metáfora subyacente para la mente individual completamente aislada. Ciertamente, la metáfora subyacente corresponde a la de las personas en conversación, abarcando a las personas en interacción lingüística y extra-lingüística significativas. La mente se ve como parte de un contexto más amplio, la 'construcción social del significado'.

De igual modo, el modelo constructivista social del mundo se corresponde con un mundo socialmente construido que crea (y es constreñido por) la experiencia compartida de la realidad física subyacente. La realidad construida humanamente está siendo todo el tiempo modificada e interactúan para adaptarse a la realidad ontológica, aunque nunca puede dar una 'verdadera imagen' de ella.

Adoptando las personas en conversación como metáfora subyacente, en el constructivismo social, se concede un lugar destacado a los seres humanos y a su lenguaje para la presentación del conocimiento. Siguiendo los trabajos germinales de Wittgenstein, Vygotsky, el Interaccionismo Simbólico y la Teoría de la Actividad, se considera el lenguaje como el conformador, y producto resultante, de las mentes individuales. Se concede una atención creciente al impacto del lenguaje en gran parte de la investigación en la psicología de la educación matemática, como al papel cognitivo desempeñado por características del lenguaje tales como la metonimia y la metáfora. Se reconoce cada vez más que una gran parte de la instrucción y el aprendizaje tiene lugar directamente por medio del lenguaje. Incluso el aprendizaje manipulativo y enactivo, enfatizado por Piaget y Bruner, tiene lugar en un contexto social de significado y es mediatizado de algún modo por el lenguaje y las interpretaciones asociadas socialmente negociadas.

En resumen, el paradigma de investigación del constructivismo social adopta una ontología relativista modificada (hay un mundo exterior soportando las apariencias a las que tenemos un acceso compartido, pero no tenemos un conocimiento seguro de él). Se basa en una epistemología falibilista que considera el 'conocimiento convencional' como aquel que es 'vivido' y aceptado socialmente. La teoría del aprendizaje asociada es constructiva (en el sentido compartido por sociólogos tales como Schutz, Berger y Luckman, así como los constructivistas), con un énfasis en la naturaleza esencial y constitutiva del lenguaje y la interacción social.

El constructivismo Piagetiano parece enfatizar los procesos cognitivos internos a expensas de la interacción social en la construcción del conocimiento por el aprendiz. Sin embargo el constructivismo tiene necesidad de acomodar la complementariedad entre la construcción individual y la interacción social.

2.4. Enactivismo

El enactivismo se ha convertido en una teoría del aprendizaje con una cierta importancia entre los investigadores en educación matemática. Según esta teoría de la cognición el individuo no es un simple observador del mundo sino que está corporalmente inmerso en el mundo y está conformado, cognitivamente y como un organismo físico completo, por su interacción con el mundo (Ernest, 2010, p. 42). Otra fuente del enactivismo es la teoría sobre la base corporal del pensamiento, vía el papel de las metáforas, de acuerdo con los trabajos de Lakoff y Johnson (1980) y Johnson (1987). Según estos autores toda la comprensión humana, incluyendo el significado, la imaginación y la razón, está basada sobre esquemas del movimiento corporal y de su percepción. Estos esquemas se extienden vía el uso de metáforas, las cuales proporcionan la base de cualquier comprensión, pensamiento y comunicación humana. En el libro de Lakoff y Núñez (2000) se desarrolla y aplica esta idea al caso de las matemáticas.

T. Kieren explica del siguiente modo algunos principios de una visión enactiva de la cognición matemática.

— La cognición matemática es vista como un proceso interactivo corporizado co-emergente con el entorno en el que la persona actúa. No es una representación reactiva con el entorno que intenta encajar el entorno. No es simplemente un fenómeno emergente de funciones corporales y cerebrales más primarias.

— La cognición matemática se observa como una acción progresiva corporizada con un entorno. La estructura de una persona determina la acción que la persona realiza. El entorno proporciona la ocasión y el espacio para la acción. De este modo ambos están co-implicados en la actividad matemática de una persona.

— La cognición matemática y la comprensión son vistos como procesos no lineales, recursivos, auto-organizados, por medio de los cuales uno construye y actúa en un mundo matemático.

— El profesor está en medio de las acciones matemáticas del estudiante, y se observa como formando una parte clave del entorno que proporciona las ocasiones para las acciones cognitivas observadas.

Ernest (2010, p. 42) considera que este enfoque de la cognición y el aprendizaje no es muy diferente de la epistemología y teoría del aprendizaje de Piaget y del constructivismo radical al que dio lugar. Después de todo, el mecanismo central de equilibración de Piaget (el logro del equilibrio en el sujeto que conoce en respuesta a perturbaciones) está basado en un modelo biológico similar a un ser en interacción con su entorno. Piaget enfatiza la "abstracción reflexiva" como un mecanismo por el que los conceptos y los esquemas son abstraídos y generalizados, y el pensamiento metafórico puede ser visto como de una de sus modalidades. Ernest considera también que el uso de nociones y acciones educativas basadas en la cognición corporizada y el uso de las metáforas no está exento de debilidades y puede dar origen a ciertas dificultades, en particular provocar la aparición de concepciones incorrectas sobre determinados conceptos matemáticos.

3. APRENDIZAJE DISCURSIVO O COMUNICACIONAL

El número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics*, editado por Kieran, Forman y Sfard (2001), agrupa un conjunto de trabajos que describen una nueva dirección en la educación matemática, tanto en la manera de considerar el aprendizaje de las matemáticas como incluso el propio pensamiento matemático.

En la literatura de investigación predomina aún el uso de nociones cognitivas tales como esquemas mentales, concepciones, conflictos cognitivos, pero se observa la progresiva introducción de otras nociones teóricas como actividad, patrones de interacción, fallo de comunicación. El aprendizaje, concebido como una adquisición personal está siendo complementado por una nueva visión del aprendizaje como un proceso de participación en un hacer colectivo. Lo importante no es el cambio del aprendiz individual sino el cambio en los modos de comunicarse con los demás.

El nuevo marco de investigación comienza a designarse como discursivo o comunicacional por el énfasis que atribuyen las investigaciones al lenguaje y a la comunicación, siendo una de las diversas implementaciones posibles del enfoque sociocultural, ligado a la escuela de pensamiento de Vygotsky y a la filosofía de Wittgenstein. Esta aproximación propone una visión del pensamiento humano como algo esencialmente social en sus orígenes y dependiente de factores históricos, culturales y situacionales de manera compleja.

Según Sfard (2001) la aproximación comunicacional a la cognición se basa en el principio teórico de que "la comunicación no debería considerarse como una mera ayuda al pensamiento sino casi como equivalente al mismo pensamiento" (p. 13). El pensamiento se concibe como un caso especial de actividad de comunicación y "el aprendizaje matemático significa llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman y Sfard, 2001, p. 5). El aprendizaje se concibe en términos de discurso, actividad, cultura, práctica, y su desarrollo se centra en las interacciones interpersonales.

La dicotomía problemática entre lo individual y lo social se resuelve cuando se reconoce que los enfoques cognitivistas e interaccionistas no son sino dos maneras de mirar algo que es básicamente un mismo fenómeno: el fenómeno de la comunicación, "que se origina entre las personas y que no existe sin el colectivo aunque incluso temporalmente involucre a un solo interlocutor" (p. 10).

Sfard (2001) presenta la metáfora del aprendizaje mediante la participación y comunicación como complementaria a la del aprendizaje como adquisición del conocimiento, tanto en el caso de considerarlo como recepción pasiva como mediante construcción activa. Los psicólogos que asumen el enfoque sociocultural ponen en duda la pertinencia de hablar de rasgos del individuo independientes del contexto, como puede ser la posesión (construcción o adquisición) de esquemas cognitivos. Prefieren considerar el aprendizaje "como llegar a convertirse en participantes de ciertas actividades específicas en el seno de comunidades de prácticas, en la iniciación en un discurso".

En el enfoque comunicacional o discursivo la dicotomía entre pensamiento y lenguaje prácticamente desaparece; el lenguaje deja de ser una mera "ventana de la mente", como una actividad secundaria del pensamiento que expresa algo ya disponible. Aunque pensamiento y lenguaje se deban considerar como dos entidades diferentes, "ambas se tienen que comprender básicamente como aspectos de un mismo fenómeno, sin que ninguno de ellos sea anterior al otro" (Sfard, 2001, p. 27).

3.1. El aprendizaje como iniciación en un discurso

En la aproximación comunicacional /participativa que describe Sfard el centro de atención de la investigación está en el discurso, término que designa cualquier ejemplo específico de comunicación, tanto si es diacrónica como sincrónica, si se realiza con otras personas o con uno mismo, tanto si es predominantemente verbal o con la ayuda de otro sistema simbólico. Los discursos se analizan como actos de comunicación, por lo que cualquier objeto que acompaña a la comunicación e influye en su efectividad - gestos, claves de la situación, las historias de los interlocutores, etc. - se deben incluir en el análisis. El aprendizaje matemático se debe definir en esta perspectiva como una iniciación en el discurso matemático, esto es, iniciación en una forma especial de comunicación conocida como matemática.

Como factores a tener en cuenta en el aprendizaje se deben considerar los útiles mediadores que las personas usan como herramientas de comunicación, y las reglas meta-discursivas que regulan el esfuerzo de comunicación. La comunicación, bien interpersonal o auto-orientada (pensamiento) no sería posible sin las herramientas simbólicas, entre las que destaca el lenguaje, pero que incluyen también notaciones, gráficos, tablas o fórmulas algebraicas.

Sfard (2001) considera que no tiene sentido hablar del pensamiento como algo con una existencia independiente de las herramientas simbólicas usadas en el proceso de comunicación. Esto significa, entre otras cosas, que deberíamos considerar como sin sentido enunciados tales como "el mismo pensamiento se ha comunicado mediante medios diferentes" (lo que, sin embargo, no quiere decir que no podamos interpretar dos expresiones de la misma manera, con interpretación y pensamiento siendo dos cosas diferentes). "En otras palabras, no hay ninguna 'esencia cognitiva' o 'pensamiento puro' que se pudiera extraer desde una materialidad simbólica y ponerla en otra" (p. 29).

En cuanto a las reglas meta-discursivas Sfard las describe como lo que guía el curso general de las actividades de comunicación. Entre las infinitas posibles referencias o interpretaciones que se pueden poner en juego en un discurso estas reglas permiten a los interlocutores reducirlas a un número manejable de elecciones, lo que hace posible la comunicación. En la mayoría de los casos son implícitas. Vienen a ser equivalentes, entre otros a nociones tales como juegos de lenguaje (Wittgenstein), normas socio-matemáticas (Yackel y Cobb, 1996).

3.2. Conflictos discursivos

Sfard (2001) distingue entre la noción de conflicto cognitivo y conflicto discursivo. El concepto de conflicto cognitivo considera que el sujeto está en constante persecución de la verdad sobre el mundo, y cualquier conocimiento nuevo que adquiere es el resultado de sus intentos por ajustar su comprensión al agregado de hechos e ideas dadas externamente e independientes de la mente. Implica, por tanto, la capacidad del sujeto para justificar racionalmente dos afirmaciones contrapuestas sobre el mundo.

En contraste, la noción de conflicto discursivo enfatiza la necesidad de la comunicación como motivación principal de nuestras acciones cognitivas, y señala el deseo de ajustar los usos discursivos propios de las palabras con los de otras personas. Se quiere explicar el fallo en la comunicación por el "desacuerdo en los usos habituales de las palabras, lo que es propiamente un fenómeno discursivo" (p. 48).

4. APRENDIZAJE BASADO EN LA INDAGACIÓN Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La familia de teorías instruccionales denominadas “Inquiry-Based Education” (IBE), “Inquiry-Based Learning” (IBL) y “Problem-Based Learning” (PBL) designan modelos teóricos de instrucción, desarrollados desde diversas disciplinas curriculares, que tienen su correspondiente versión para la enseñanza de las ciencias experimentales (IBSE) y las matemáticas (IBME). En ellos se atribuye un papel clave a la resolución de problemas “auténticos”, bajo un planteamiento constructivista. En algunas aplicaciones al campo de la educación matemática se propone que los estudiantes construyan conocimiento siguiendo las pautas de trabajo de los propios profesionales matemáticos y científicos. El matemático se enfrenta a problemas no rutinarios, explora, busca información, hace conjeturas, justifica y comunica sus resultados a la comunidad científica; el estudio de las matemáticas debería seguir unas pautas similares: “aprender ciencia y tecnología es aprender a participar en las comunidades de prácticas de científicos y tecnólogos respectivamente” (Murphy y McCormick, 1997, p.465).

En estas teorías se considera esencial el uso de situaciones – problemas (aplicaciones a la vida cotidiana, a otros campos del saber, o problemas internos a la propia disciplina) para que los estudiantes puedan dar sentido a las estructuras conceptuales que configuran la matemática o la ciencia como una realidad cultural. Estos problemas constituyen el punto de partida de la práctica matemática y científica, por lo que la actividad de resolución de problema, su formulación, comunicación y justificación son claves en el desarrollo de la capacidad de afrontar la solución de problemas no rutinarios. Este es el objetivo principal de la tradición denominada “problem solving” (Schoenfeld, 1992), cuyo énfasis se centra en la identificación de heurísticas y estrategias metacognitivas; también de otros modelos teóricos como la Realistic Mathematics Education (RME) (Freudenthal, 1973; 1991) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2002)

4.1. Resolución de problemas

La importancia que se da a la resolución de problemas en los currículos y en la investigación educativa es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas y las ciencias experimentales que considera que esta actividad es precisamente su esencia. El trabajo seminal de Polya sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, incluyendo cuestiones como la resolución de problemas simulada con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Artigue y Blomhoj (2013) relacionan la tradición del “problem solving” con la IBL:

> Los estudiantes tienen que desarrollar sus propias estrategias y técnicas cuando se enfrentan a problemas no rutinarios; tienen que explorar, conjeturar, experimentar y evaluar; se les da responsabilidades matemáticas sustanciales y generalmente son estimulados para que generen cuestiones por ellos mismos y para prever posibles generalizaciones de los resultados que obtienen (p. 802).

English y Sriraman (2010) informan de diversas reflexiones y evaluaciones sobre la eficacia de las investigaciones en resolución de problemas concluyendo sobre su escasa relevancia para la práctica escolar. Estos autores consideran que “Desafortunadamente, faltan estudios que aborden el desarrollo conceptual basado en resolución de problemas en interacción con el desarrollo de competencias de resolución de problemas" (English y Sriraman, 2010, p. 267).

4.2. Educación Matemática Realista (RME)

En la RME se asumen principios que claramente se corresponden con presupuestos de IBME. Así, según el *principio de actividad*, en lugar de ser receptores de matemáticas ya elaboradas, los estudiantes deben ser como participantes activos en el proceso educativo, en el cual ellos mismos desarrollan todo tipo de herramientas matemáticas y comprensiones. Según Freudenthal (1973), un currículo científicamente estructurado en el que los estudiantes son confrontados con unas matemáticas elaboradas, es una 'inversión anti-didáctica'. Se basa en una falsa hipótesis de que los resultados del pensamiento matemático, colocados en el marco de una asignatura, se pueden transferir directamente a los estudiantes. (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

El principio de realidad se orienta en la misma dirección. Como en la mayoría de las aproximaciones a educación matemática, la RME pretende capacitar a los estudiantes para que usen su comprensión y herramientas matemáticas para resolver problemas. En lugar de comenzar con abstracciones específicas o definiciones que deben ser aplicadas después, se debe comenzar con contextos ricos que demanden una organización matemática; en otras palabras, contextos que puedan ser matematizados. De esta manera, mientras trabajan con problemas contextualizados, los estudiantes pueden desarrollar herramientas y comprensión matemáticas. Uno de los principios claves para la educación matemática de Freudenthal (1991) es que se debe dar a los estudiantes una oportunidad "guiada" para "re-inventar" las matemáticas. Esto implica que, en la RME, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel crucial en cómo los estudiantes adquieren el conocimiento. "RME es por tanto una aproximación a la enseñanza y el aprendizaje del tipo "problem-solving" que ofrece constructos importantes y experiencia para conceptualizar IBME" (Artigue & Blomhoj, 2013, p. 804).

5. APRENDIZAJE BASADO EN LA TRANSMISIÓN

Consideramos como modelos basados en la transmisión del conocimiento las diversas formas de intervención educativa en las cuales prima la instrucción directa y explícita. El uso de ejemplos resueltos constituye un rasgo característico de la instrucción fuertemente guiada, mientras que el descubrimiento de la solución a un problema en un entorno rico en información constituye similarmente el compendio del aprendizaje por descubrimiento mínimamente guiado.

Durante varias décadas se viene considerando a estos modelos como inferiores e indeseables respecto al aprendizaje de tipo constructivista (aprendizaje con distintos grados de guía, apoyo o *scaffolding*), como se muestra en las iniciativas tomadas en diferentes proyectos internacionales para promover las diversas modalidades de IBSE e IBME (Dorier & García, 2013; proyecto PRIMAS). La transmisión del conocimiento mediante la presentación de ejemplos de problemas resueltos y de las estructuras conceptuales de la disciplina es descartada por teorías didácticas con fuerte predicamento en educación matemática, como hemos indicado en el apartado anterior.

La adopción acrítica de modelos pedagógicos constructivistas puede estar motivada por la observación de la gran cantidad de conocimientos y competencias que el sujeto aprende por descubrimiento o inmersión en un contexto, en particular los conceptos de la vida cotidiana. Sin embargo, Sweller, Kirschner y Clark (2007, p. 121) afirman que,

> No hay ninguna razón para suponer o evidencia empírica que apoye la noción de que los procedimientos de la enseñanza constructivista basados en la manera en que los humanos adquieren información biológicamente primaria serán efectivos para adquirir la información biológicamente secundaria requerida por los ciudadanos de una sociedad intelectualmente

avanzada. Esa información requiere instrucción directa y explícita.

Esta posición concuerda con la tesis sostenida por Vygotsky, que los conceptos científicos no se desarrollan de la misma manera que los conceptos cotidianos (Vygotsky, 1934). Los autores citados consideran que proporcionar a los estudiantes un ejemplo completamente resuelto de un problema o tarea, y la información relativa al proceso usado para alcanzar la solución, es necesario para el diseño de tareas de aprendizaje idóneas. "Debemos aprender soluciones específicas del dominio para problemas específicos y la mejor manera de adquirir estrategias de resolución de problemas específicas de un dominio es dar el problema con su solución, no dejando ningún papel a la IL". (Sweller, Kirschner y Clark, 2007, p. 118). Estos autores afirman que la investigación empírica del último medio siglo sobre este problema proporciona una abrumadora y clara evidencia de que una mínima guía durante la instrucción es significativamente menos efectiva y eficiente que una guía específicamente diseñada para apoyar el procesamiento cognitivo necesario para el aprendizaje. Resultados similares se reflejan en el meta-análisis de Alfieri, Brooks, Aldrich y Tenenbaun (2011).

Según Kischner, Sweller y Clark (2006), tenemos destreza en un área porque nuestra memoria a largo plazo contiene cantidades enormes de información relativa al área. Esa información nos permite reconocer rápidamente las características de una situación y nos indica, a menudo inconscientemente, qué hacer y cuando hacerlo (p. 76).

En la Tabla 1 se resumen los principales rasgos de las perspectivas objetivistas y constructivistas que consideramos en este trabajo como extremas cuando se aplican en el diseño instruccional como alternativas ideales. Están agrupadas en tres dimensiones: epistémica (naturaleza del conocimiento objeto de instrucción), cognitiva (aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones), e instruccional (medios y modos de interacción). Estos rasgos han sido elaborados a partir de los trabajos de diversos autores (Jonassen, 1991; Ernest, 1994; Murphy, 1997; Boghossian, 2006).

Tabla 1. Rasgos del objetivismo y constructivismo como fundamentos de la instrucción

Dimensiones	Objetivismo	Constructivismo
Epistémica (Naturaleza del conocimiento objeto de instrucción)	- El conocimiento tiene una existencia externa al sujeto. -La estructura del conocimiento viene determinada por entidades, propiedades y relaciones - El significado corresponde a entidades y categorías del mundo, independiente de la comprensión de cualquier organismo - Los símbolos representan la realidad	El conocimiento depende de la actividad mental del sujeto. - La estructura depende de las experiencias e interpretaciones personales. - El significado no está basado en una correspondencia con el mundo; depende de la comprensión personal - Los símbolos son herramientas para construir la realidad
Cognitiva (Aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones)	- La mente es un procesador de símbolos y refleja la realidad - Los conocimientos previos de los estudiantes y las respuestas que proporcionan durante el proceso son aceptadas si concuerdan con el conocimiento objetivo sustentado por el profesor La reflexión por parte de los estudiantes se considera irrelevante e innecesaria	- La mente es un constructor de símbolos y un sistema conceptual que construye una realidad - El pensamiento se basa en la percepción y crece a partir de la experiencia física, corporal y social - Se intenta comprender cada uno de los marcos conceptuales de los estudiantes y se modifica la instrucción en consecuencia. -Se anima a los estudiantes a explorar la situación planteada para que ellos mismos encuentren la solución.
Instruccional (Medios y modos de interacción)	- Se enfatiza la reproducción del conocimiento. - Los errores se usan como ocasión para reforzar la conducta - El profesor es finalmente la fuente del conocimiento objeto de enseñanza	- Se estructuran las tareas de aprendizaje dentro de entornos realistas y relevantes. - La actividad instruccional está orientada a la resolución de problemas. - Se estimulan las interacciones entre los propios estudiantes dentro y fuera de la clase

	- No se estimula el aprendizaje cooperativo y en colaboración - No se considera necesaria la exploración por parte del estudiante y por tanto no se estimula ni promueve.	-El profesor actúa como coach. - Los estudiantes asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje

6. CONTRATOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Incluimos en esta sección una síntesis de la noción de contrato y sus diferentes tipos desde la perspectiva de la educación matemática, la cual ha servido de base para introducir en el Enfoque Ontosemiótico la herramienta denominada dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009).

La sociedad organiza la escuela con el fin, entre otros, de formar o educar a sus miembros (ciudadanos) para hacer de ellos miembros activos, responsables, competentes en la solución de los problemas actuales o futuros que se presenten a la sociedad. Hay pues una primera y básica regla de este contrato educativo: la escuela debe educar para la ciudadanía y el desempeño profesional. La obligación de educar se concreta en la obligación de enseñar por parte de los profesores y de aprender para los estudiantes; asimismo, la sociedad en su conjunto tiene la obligación de proporcionar los medios necesarios y los padres la obligación de contribuir en algunas esferas específicas.

La noción genérica de "contrato", heredada del mundo jurídico, busca especificar esas reglas. En las relaciones pedagógicas y didácticas que se establecen en las instituciones escolares, intervienen diversos agentes y facetas. Esto hace que no todas las reglas, que determinan dichas relaciones, sean de la misma naturaleza. Por ello se habla de distintos contratos: *social, educativo, institucional, pedagógico* o *didáctico*, según sea su ámbito de aplicación (y los agentes intervinientes): la sociedad, el conjunto de personas y de grupos interesados en la creación y comunicación de saberes de un cierto campo, la institución, la clase, o la clase de matemáticas. Las reglas en la clase de matemáticas no son únicamente las del contrato didáctico, sino todas las que constituyen los cinco contratos mencionados.

A continuación describiremos someramente la noción de contrato didáctico según la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) y la distinción entre normas matemáticas, sociomatemáticas y sociales introducidas por diversos autores **(**Voigt, 1994; 1995; Yackel y Cobb, 1996**)**.

6.1. El contrato didáctico en la Teoría de Situaciones Didácticas

El contrato didáctico es un conjunto de reglas - con frecuencia no enunciadas explícitamente - que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemáticas (Brousseau, 1986).

Como ejemplo de este fenómeno se suele citar la investigación de Stella Baruk referida a la contestación de una amplia muestra de alumnos al problema denominado "la edad del capitán". Un enunciado típico de este problema es el siguiente:

> Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho. ¿Cuál es la edad del capitán?

Preguntados sobre este problema, la mayoría de los niños en los primeros años escolares responde que 42 o 32 años. Si se cambia el enunciado, incluyendo otros datos o variando los números se da como respuesta un valor que pueda obtenerse mediante operaciones aritméticas con los datos del enunciado. Son muy pocos los casos de niños que contestan que no tiene sentido la pregunta.

El interés de esta noción se debe a que muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas. Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

El contrato didáctico aparece en la TSD como el producto de un modo específico de comunicación didáctica que instaura una relación singular del alumno con el saber matemático y con la situación didáctica. El contrato se elabora sobre la base de la repetición de hábitos específicos del maestro y permite, a su vez, al alumno "decodificar la actividad didáctica". Esta interpretación deja pensar que existen "buenos contratos" o "contratos mejores" que permitirían a los alumnos, especialmente a los más débiles, modificar su relación con el saber.

> "La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno debe aprender. El objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente"... "El contrato es específico de los conocimientos puestos en juego y por tanto necesariamente perecedero: los conocimientos e incluso los saberes evolucionan y se transforman mientras que el contrato pedagógico tiene tendencia a ser estable" (Brousseau, 1988, p. 322).

El contrato didáctico en la TSD es por definición caduco y cambiante. La ruptura de reglas y normas del contrato didáctico es condición necesaria para el aprendizaje. El niño está en disposición de aprender cuando acepta la responsabilidad en la resolución de un problema matemático, esto es, en la búsqueda de la estrategia óptima —más eficaz y económica— para el control de un juego formal (*situación didáctica*). La aceptación de la responsabilidad (en el plano matemático, no de la culpabilidad) lleva consigo la desvinculación de la intención didáctica original y, por lo tanto, de la relación escolar con el profesor y con el saber. Son las restricciones y necesidades del medio (incluidas las intervenciones del profesor en la *devolución* de la tarea a los alumnos) las que determinan respuestas que exigen al alumno la adaptación de sus conocimientos.

Esta concepción rompe radicalmente con la idea de "*buenos* o *malos"* contratos. El contrato didáctico, o más precisamente "el proceso de búsqueda de un contrato hipotético", constituye un concepto al servicio de la didáctica de las matemáticas para analizar los fenómenos de negociación, emergencia, disfuncionamiento del sentido en las situaciones didácticas.

El contrato didáctico está estrechamente ligado a supuestos de tipo constructivista sobre el aprendizaje de las matemáticas en el seno de los sistemas didácticos. Los fenómenos didácticos que trata de explicar son consecuencia de las paradojas que surgen al asumir el siguiente postulado: "Aprender matemáticas, es resolver problemas. ¿Pero cómo resolverlos, si no se han aprendido previamente las matemáticas?" (Sarrazy, 1995, p. 23).

6.2. Normas matemáticas, sociomatemáticas y sociales

Las interacciones entre profesor y alumnos están con frecuencia regidas por "obligaciones" o normas no explícitas: normas sociales y sociomatemáticas. El siguiente episodio es un ejemplo de estas normas implícitas en el aula. En este fragmento extraído de una clase de introducción a la probabilidad, un estudiante no cumple las expectativas del profesor, esto es, viola una obligación desde el punto de vista de un observador. El profesor procura mantener el sentido de normalidad y la imagen de una clase orientada al ideal popular del aprendizaje por descubrimiento (Voigt, 1994, p. 182):

> *Profesor:* Es suficiente por el momento. No podemos escribir todos los resultados, ¿verdad? ¿Alguien ha observado algo?
>
> *Estudiante:* ¿Qué se supone que debo observar?
>
> *Profesor:* ¿Qué se supone que debes observar? Algo que debes saber por ti mismo. Berta, ¿has

observado algo?

Las actividades del profesor también están sujetas a obligaciones. Por ejemplo, en las clases tradicionales los estudiantes esperan a menudo que el profesor presente un algoritmo oficial para resolver los problemas paso a paso sin necesidad de tener que reflexionar (¿qué hacer a continuación?) "Así, que los estudiantes no son sólo las "víctimas" de esta cultura escolar sino también los "culpables"" (Voigt, 1994; p. 182-3).

Las *normas sociales* en el seno de la clase son convenciones que describen cómo: 1) colaborar unos con otros, 2) reaccionar socialmente ante un error o una indicación y 3) asumir la responsabilidad que la acción cooperativa conlleva (y que, en particular, supone cumplir las expectativas recíprocas entre los agentes). Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula independientemente de la disciplina. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los alumnos deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, tanto por uno mismo como por los demás, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, como de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes apoyen su discurso en conocimientos aprendidos. Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, así como justificar sus propios argumentos.

Existen aspectos normativos de la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática de los estudiantes. Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar "matemáticamente diferente", "sofisticado", "eficiente" o "elegante", así como lo que se puede considerar como una explicación matemáticamente aceptable. Voigt (1995) identifica, además, como normas sociomatemáticas: las normas de clase que implican la valoración de una solución a un problema como inteligente o inventiva y las explicaciones y argumentaciones consideradas como matemáticamente correctas.

Se habla de normas "sociomatemáticas" y no únicamente "matemáticas" puesto que la determinación, descripción y valoración de una norma sólo es posible dentro de un contexto social (clase, nivel, institución, etc.). Así, por ejemplo, un procedimiento no puede ser valorado como "elegante" en sí mismo, sino con relación a unas prácticas operativas y discursivas en el seno de una comunidad o contexto social que sirven de referencia.

Es decir, las normas sociomatemáticas regulan los aspectos específicos de las discusiones matemáticas de los estudiantes e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, por tanto, las normas sociomatemáticas son, en la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores identificados en la perspectiva psicológica al intentar dar cuenta de cómo los estudiantes llegan a ser intelectualmente autónomos en matemáticas (una cuestión vinculada al dominio de las creencias y actitudes). En este sentido, lo que llega a ser matemáticamente normativo en un aula viene condicionado por los objetivos reales, las creencias, las suposiciones e hipótesis de los participantes en el aula, al mismo tiempo que estos objetivos y la comprensión están influenciados por lo que es legitimado como actividad matemática aceptable (Yackel y Cobb, 1996).

Las normas sociomatemáticas son diferentes de las normas sociales generales que rigen el comportamiento en las aulas en el sentido de que son específicas de los aspectos matemáticos de la actividad de los estudiantes. En este contexto, se da mucha importancia a las normas sociomatemáticas debido a que el desarrollo del razonamiento y los procesos de dotar de sentido por los estudiantes no puede ser separado de su participación en la constitución interactiva del significado matemático.

Sin embargo, Yackel y Cobb (1996) indican que la distinción entre las normas sociales y las normas sociomatemáticas en las aulas son sutiles, indicando como una manera de diferenciarlas lo siguiente: “la comprensión que se le supone a los estudiantes para explicar sus soluciones y sus formas de pensar es una norma social, mientras que la comprensión de lo que se considera como una explicación matemáticamente aceptable es una norma sociomatemática” (p. 461). Metodológicamente, tanto las normas sociales generales como las normas sociomatemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social.

Muchas de las dificultades que se observan en los procesos de instrucción tienen que ver con la complejidad de las normas del aula y la diversidad de interpretaciones y valoraciones de estas normas. Diversas investigaciones (Civil y Planas, 2004; Cobb y Hodge, 2002; Cobb y Yackel, 1998; Yackel y Cobb, 1996) han permitido comprender cómo los profesores y los alumnos comprenden, usan y valoran dichas normas.

7. EPISTEMOLOGÍA EXPERIMENTAL: LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

De acuerdo con la síntesis de la Teoría de Situaciones Didácticas elaborada por Sierpinska y Lerman (1996), en la base de esta teoría está la hipótesis epistemológica de que 'el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente solo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones' (Brousseau, 1986, p. 368). El acto de conocer está 'situado' en un sistema de restricciones las cuales, mediante el feedback sobre las acciones del sujeto, le señalan el coste de los ensayos y errores; el aprendizaje, es entendido como un cambio en las 'relaciones al medio' del sujeto. El aprendizaje ocurre cuando la aplicación de nociones previamente construidas resultan ser demasiado costosas, y el sujeto está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazos.

Un concepto no se desarrollará, si el sujeto nunca tiene una necesidad del mismo. Si todas las funciones con las que ha tratado un estudiante son continuas en cualquier punto, es probable que su comprensión de la expresión 'límite de la función en el punto x=a' se reducirá al 'valor de la función en x = a'. Si todos los espacios vectoriales que un estudiante ha visto son espacios en R^n, entonces probar que en un espacio vectorial arbitrario el vector nulo es único resultará carente de sentido para él. Para un concepto cuya enseñanza se pretende, la tarea del didacta consiste en organizar situaciones o sistemas de restricciones para las que el concepto dado aparecerá como una solución óptima (de menor coste).

Brousseau propone realizar un 'estudio epistemológico' del concepto para elaborar situaciones adaptadas para la enseñanza de un concepto matemático dado. Dicho estudio comprende investigar sobre,

- los significados del concepto dentro de la estructura de la teoría actual;
- las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto (sus variadas formas intermedias, concepciones y perspectivas que crearon 'obstáculos' con respecto a la evolución del concepto, visto desde la perspectiva de la teoría actual, problemas que llevaron a una 'superación' de estos obstáculos y permitieron un desarrollo posterior);
- el estudio de la psicogénesis del concepto (o su 'epistemología genética')
- un 'análisis didáctico', esto es un estudio de los significados del concepto pretendido y/o transmitido por su enseñanza, actualmente o en el pasado (incluyendo el estudio de la transposición didáctica o una comparación con los resultados de los análisis 'estructurales' e 'históricos').

El fin no es que los estudiantes recapitulen, en su aprendizaje, un proceso histórico-cultural del desarrollo de un concepto. El fin es encontrar un equilibrio entre una aproximación 'histórica' que haría al niño repetir muchas de las concepciones olvidadas del pasado, y una enseñanza directa del concepto tal y como aparece en la estructura actual, sin intentar construir el concepto sobre las concepciones de hoy del estudio ya que evolucionan dentro del marco de una cultura y una escolaridad.

La teoría de situaciones propone un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño, y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones. Los aspectos metodológicos de este programa son descritos como “ingeniería didáctica” (Artigue,1988).

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno. Se espera que, mediante la interacción con un medio apropiado, los estudiantes construyan el conocimiento progresivamente de manera colectiva, rechazando o adaptando sus estrategias iniciales si fuera necesario.

> El trabajo intelectual del alumno debe ser, en ciertos momentos, comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas, no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos; sabemos que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. (…) Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc. (Brousseau, 2002, p. 22).

El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego, ("enjeu") en la situación. De este modo, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructivista en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas. Como teoría de resolución de problemas, asigna un papel crucial al resolutor. Comparada, por ejemplo a la Teoría del Procesamiemto de la Información que asimila el proceso de resolución con el funcionamiento de un ordenador, asigna al resolutor el papel de un decisor que desea hallar la estrategia ganadora y tiene la posibilidad de modificar su estrategia inicial una vez iniciado el proceso de solución.

Brousseau identificó varios tipos de situaciones didácticas, o estados de un contracto didáctico, que, para él, crearía un esquema general de una 'secuencia didáctica' o situaciones que provocan una 'génesis artificial' de un concepto matemático:

- situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor;
- situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor;
- situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas; y
- situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas, y la terminología 'oficial'.

A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección, por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas, los procedimientos aceptados. Dentro de cada una de estas situaciones, hay un componente 'a-didáctico', esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación cae enteramente de parte de los estudiantes. Se considera que esta es la parte más importante, ya que, de hecho, el fin último de la enseñanza es lo que Brousseau llama la 'devolución' del problema a los estudiantes.

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones estaba dirigido a una elaboración de un cierto número de 'situaciones fundamentales' relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que garantizaría, en cierto modo su adquisición por los estudiantes cualquiera que fuera la personalidad del profesor.

La hipótesis básica de la teoría de situaciones de Brousseau es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto, creando ciertas restricciones artificiales el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. Esta hipótesis está ciertamente más próxima al constructivismo que a las aproximaciones que se derivan de la noción Vygostskiana de 'zona de desarrollo próximo'.

Los obstáculos y sus tipos

El aprendizaje por adaptación al medio, implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos (Brousseau, 1983).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo.

Brousseau (1983) da las siguientes características de los obstáculos:

- un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
- el alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
- cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
- el alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
- después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

8. PRAXEOLOGÍAS DIDÁCTICAS EN LA TAD

El enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas que Chevallard viene desarrollando

(Chevallard, 1992; 1999) nos parece que aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que entronca con las corrientes de tipo pragmático. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. En los comienzos de la teoría antropológica se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay "actividad", es decir trabajo humano, del que todos los objetos son emergentes.

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto se proponen como instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de "relación personal al objeto" que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.).

Se considera que la enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir la reconstrucción de las praxeologías matemáticas (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza–aprendizaje puede formularse en términos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

8.1. Momentos didácticos

La teoría antropológica propone un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), los cuales pueden constituir el esbozo de una teoría instruccional. Los tipos de momentos didácticos que se consideran esenciales en el proceso de estudio de una organización matemática son los siguientes: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación.

Dentro de este modelo, hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas. Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.

8.2. Recorridos de estudio e investigación

En la TAD, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, con lo cual se plantea, como cuestión central de investigación la elaboración de dispositivos didácticos que posibiliten esta integración, así como la identificación de las condiciones que se requieren y los tipos de restricciones institucionales que limitan o impiden su desarrollo.

Para abordar esta problemática se ha introducido la noción de «recorrido de estudio e investigación» (REI) (Chevallard, 2006). Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. Uno de los objetivos principales de la propuesta de los REI es el de introducir en la escuela una nueva epistemología que permita reemplazar el paradigma escolar del *inventario* de saberes por un paradigma del *cuestionamiento del mundo*, para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación.

Dentro la TAD, los REI aparecen como un dispositivo didáctico privilegiado para dar cabida a la actividad de modelización en la enseñanza actual de las matemáticas. En efecto, siguiendo la descripción que hacen Barquero, Bosch y Gascón (2011), el punto de partida de un REI debe ser una cuestión de interés real («viva») para la comunidad de estudio, que se denota por Q_0 y a la que se llama cuestión generatriz del proceso de estudio. A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q_0 evoluciona y da lugar al planteamiento de muchas nuevas «cuestiones derivadas»: Q_1, Q_2 ,…, Q_n . El estudio de Q_0 y de sus cuestiones derivadas conduce a la búsqueda de respuestas y, con ello, a la construcción de un gran número de saberes que delimitan el mapa y los límites provisionales del «territorio» a recorrer durante el proceso de estudio. Este proceso, que se puede sintetizar como una red de cuestiones y respuestas (Q_i, R_i), contiene las posibles trayectorias a «recorrer» generadas a partir del estudio de Q_0.

El desarrollo de un REI supone dar importancia tanto al proceso de estudio –la actividad de modelización– como a la respuesta que este genera. Además los REI permiten y potencian una forma de incorporar a los procesos de estudio los *momentos de la actividad matemática* que indica Chevallard (1999, pp. 250-255).

9. TEORÍA CULTURAL DE LA OBJETIVACIÓN

Radford (2006; 2014) ha desarrollado una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira en las escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. Asume dos principios:

1. La dimensión psicológica debe ser objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática.
2. Los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma, sino que tienen que ser conceptualizados en el contexto de su dimensión histórico cultural. El aprendizaje es visto en tanto que actividad social arraigada en una tradición cultural que la antecede

Introduce cinco conceptos básicos:

1. Concepto de pensamiento, elaborado en términos no mentalistas. El pensamiento es sobre todo una forma de re-flexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc.
2. Concepto de aprendizaje: El aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales (plano sujeto-objeto) sino con otros individuos (plano sujeto-sujeto o plano de la interacción) y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana (Leontiev, 1993).
3. Concepto epistemológico: Como toda actividad, el aprendizaje está enmarcado por sistemas semióticos de significación cultural que "naturalizan" las formas de cuestionamiento y de investigación del mundo.
4. Concepto de orden ontológico: Los objetos matemáticos, que define como patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos.
5. Concepto semiótico – cognitivo: –el de objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. El aprendizaje se define como proceso social de objetivación de esos

patrones externos de acción fijos en la cultura.

Los principios epistemológicos sobre el conocimiento matemático y su aprendizaje que caracterizan las aproximaciones socioculturales los formula Radford (2008, p. 10-12) de la siguiente manera:

> “p1: el conocimiento es históricamente generado durante el curso de la actividad matemática de los individuos”.
>
> “p2: la producción del conocimiento no responde a un pilotaje adaptativo, sino que está inmerso en formas culturales de pensamiento imbricadas con una realidad simbólica y material que proporciona la base para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos y los conceptos e ideas que se forman de ellas”.

Radford ha desarrollado una manera específica de considerar la educación en general, y la enseñanza y aprendizaje en particular, que tiene en cuenta, no solo los conocimientos en juego sino también la formación de los alumnos en tanto que sujetos humanos. Esta posición político-conceptual se conoce como *teoría de la objetivación* (Radford, 2014), en la que se plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente.

Se considera que la enseñanza y el aprendizaje no producen solamente saberes; también producen subjetividades. Como consecuencia, deberíamos hacer un esfuerzo para entender las producciones de saberes y de subjetividades en el aula y promover aquellas formas de acción pedagógica que pueden llevar a una enseñanza y aprendizaje significativo, es decir, no alienante. El término ‘Aprendizaje y enseñanza significativos’ hace referencia a aquellas formas pedagógicas de acción que conllevan:

> (1) a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y
>
> (2) a la creación de un espacio político y social dentro del cual puedan desarrollarse subjetividades reflexivas, solidarias y responsables.

El principio esencial de la teoría de la objetivación es la idea de *labor o trabajo*—en el sentido que le dieron Hegel, Marx, Leont’ev y el materialismo dialéctico. Es a través de la labor o trabajo que los individuos se desarrollan y se transforman continuamente, encontrando en el mismo los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser.

En este marco la enseñanza y aprendizaje no se consideran como dos procesos distintos, sino como *labor conjunta* en el sentido hegeliano. Lo que ocurre en la escuela, enseñanza y aprendizaje no son dos actividades separadas, una llevada a cabo por un profesor que guía al alumno, la otra por un alumno que hace las cosas por sí y para sí mismo, sino como una sola e inseparable actividad. En este contexto, la enseñanza-aprendizaje es la expresión de una forma de vida: una labor conjunta que ocurre en un espacio socio-político al interior del cual tienen lugar el *conociendo* (“knowing”) y el *volviéndose* (“becoming”), esto es volviéndose sujeto en tanto que proyecto histórico-social siempre inconcluso, siempre en movimiento.

La teoría de la objetivación adopta el sentido Hegeliano de objetivación: algo que está allí y que aparece frente al sujeto, y se presenta, en consecuencia, como una teoría fenomenológica.

> *La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente*. (Radford, 2014, p. 141)

El conocer, como proceso (‘*knowing*’) queda definido como toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.).

El sujeto que participa en la objetivación es un sujeto concreto y no el sujeto epistémico abstracto de otras teorías (como la de Piaget y la teoría de situaciones). Es un sujeto que siente, goza y sufre. El proceso de subjetivación lo define Radford en los siguientes términos:

> *La subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo.* (Radford, 2014, p. 142)

El sujeto se constituye en tanto que sujeto a través de sus acciones, reflexiones, gozos, sufrimientos, etc. Pero, por otro lado, las acciones a través de las cuales el sujeto se constituye, están inmersas en formas de acción y de relación hacia otros que son culturales e históricas.

10. ENFOQUE ECOLÓGICO DE LA EPISTEMOLOGÍA

El análisis de la problemática que plantea el uso de las matemáticas en las distintas instituciones, las relaciones de los propios objetos matemáticos entre sí y con otros campos de conocimiento puede facilitarse comparando esta problemática con la de la ecología, considerada como la disciplina científica que se interesa por las relaciones entre los organismos y sus entornos pasados, presentes y futuros. Se trata de un uso metafórico de la ecología que puede ayudar a comprender el desarrollo de los conocimientos matemáticos, en su dimensión institucional o sociocultural.

Como se indica en Godino (1993), el empleo de herramientas conceptuales procedentes de la ecología puede desempeñar un papel útil, en particular el concepto de *econicho* y la de relación ecológica entre objetos matemáticos. Un enfoque moderno de estos conceptos, basado en la teoría general de sistemas (Patten y Auble, 1980), permite aplicarlos a objetos no vivos, sustituyendo los criterios de "viabilidad", persistencia o existencia indefinida, por cualquier noción de utilidad, disponibilidad, acoplamiento o compatibilidad.

Interpretamos la "ecología de los objetos matemáticos" como una metáfora que ayuda a comprender la génesis, desarrollo y funcionamiento de dichos objetos (sistemas de prácticas, procedimientos, conceptos, teorías, etc.). Pero hay que resaltar que existe una corriente en epistemología y sociología del conocimiento que va más allá de un planteamiento metafórico para estas cuestiones. Toulmin (1977) introduce la expresión "ecología intelectual" para destacar las cuestiones de función y adaptación a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas de los conceptos colectivos y los métodos de pensamiento. Asimismo, el trabajo de Morin (1992), "Las ideas, su hábitat, su vida, sus costumbres, su organización" constituye un ejemplo relevante. Este autor considera tan inadecuada la creencia en la realidad física de las ideas, como el negarles un tipo de realidad y existencia objetiva.

El locus o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuo de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis" (White, 1983, p. 274).

La aplicación de la metáfora ecológica al estudio de la evolución de los saberes implica considerarlos como "organismos" u "objetos" que interaccionan y desempeñan un papel en el seno de instituciones donde se reconoce su existencia cultural, las cuales vienen a ser su "habitat". Parece claro que no es posible pensar en los saberes independientemente de las personas que los piensan y usan. Pero la identificación de la existencia de un saber precisa de un reconocimiento colectivo, esto es, se trata de un emergente de un sistema de prácticas sociales reconocidas. Una tipificación de acciones habitualizadas por tipos de actores es una institución (Berger y Luckmann, 1968); las instituciones son, pues, los hábitat de los saberes.

Una de las posibilidades que ofrece el paradigma ecológico consiste en su capacidad de dar sentido a nuevas cuestiones que de otro modo parecen evidentes o sin interés. Asimismo, lleva a centrar nuestra atención en aspectos contextuales e interacciones que con frecuencia pasan inadvertidos.

A título de ejemplo indicamos, a continuación, algunas de estas cuestiones.

a) ¿Cuáles son los hábitats que ocupan actualmente los saberes matemáticos? ¿Cuáles son los distintos usos que se hace de las matemáticas en dichos hábitats?

b) ¿Existen instituciones en las que las matemáticas podrían ser utilizadas más intensa y adecuadamente?

c) ¿Qué tipo de restricciones del entorno (factores limitativos) dificultan que las matemáticas ocupen los nichos ecológicos vacíos?

d) ¿Cómo se relacionan las matemáticas con los restantes saberes presentes en las distintas instituciones?

e) ¿Es posible identificar sub-especies (sub-saberes) como consecuencia de fenómenos de adaptación al entorno?

f) ¿Existen relaciones especiales de competición, simbiosis, de dominancia y control entre saberes y sub-saberes que condicionen la difusión idónea de las matemáticas?

11. COMPONENTES EPISTEMOLÓGICO E INSTRUCCIONAL DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En las secciones anteriores hemos descrito de manera resumida algunos marcos teóricos usados en educación matemática sobre cómo se genera y construye el conocimiento matemático en los contextos educativos. En este apartado incluimos una síntesis de los supuestos y herramientas teóricas introducidas en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) para diseñar, describir, explicar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se considera que el foco de atención primario de la investigación didáctica se sitúa en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el seno de las instituciones educativas. Por tanto, se tratará de caracterizar la naturaleza y factores condicionantes de las relaciones entre un saber (entendido según los supuestos semióticos y antropológicos del EOS), los alumnos que tratan de apropiarse de dicho saber con la ayuda de un *sistema docente*, y bajo unas circunstancias contextuales determinadas. En su conjunto estos componentes definen un sistema dinámico, cuya evolución en el tiempo se puede modelizar (al menos metafóricamente) como un proceso estocástico, siendo necesario estudiar los estados del sistema, las trayectorias o secuencias de estados de cada uno de los componentes y los criterios de idoneidad didáctica en cada una de las facetas o dimensiones implicadas (Godino, Contreras y Font, 2006).

En el marco del EOS, el diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje de los contenidos parte de la selección de situaciones - problemas cuya resolución permita dar significado o razón de ser a dichos contenidos y promover el aprendizaje de los mismos. El sistema de acciones que realiza el docente y los estudiantes para abordar la solución de los problemas, con los recursos disponibles y en el contexto fijado, constituye una *configuración didáctica*. La secuencia de configuraciones didácticas diseñadas para el estudio de un contenido, que usualmente no será un único problema, sino una muestra representativa del universo de posibles problemas en los cuales el objeto/contenido interviene, constituye una *trayectoria didáctica*.

11.1. Aprendizaje y enseñanza en el marco del EOS

El cómo se aprende algo depende de qué se tiene que aprender. Según el EOS el estudiante se debe apropiar (aprehender) de las configuraciones ontosemiótica institucionales implicadas en la resolución de las situaciones - problemas que se propone resolver. Se asume el paradigma del *cuestionamiento del mundo* que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2006), y en general la familia de modelos IBE (Inquiry Based Education), de modo que el punto de partida debe ser la selección e indagación de *buenas situaciones* problemas.

En los procesos de enseñanza – aprendizaje se espera que el aprendiz se apropie progresivamente de los significados institucionales mediante su participación en las prácticas correspondientes, a fin de lograr el acoplamiento entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales. El acoplamiento y apropiación de significados tiene lugar en el seno de una *configuración didáctica* (Figura 1) en la que, además de un saber objeto de enseñanza (modelado en términos de configuraciones epistémicas), interviene un medio, constituido por la trama de funciones docentes, discentes y recursos instruccionales mediante la que se trata de optimizar el aprendizaje (modelado en términos de configuraciones cognitivas).

El reconocimiento de la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático lleva a asumir un modelo de mediación pedagógica de tipo mixto en el que tiene lugar una dialéctica entre la transmisión de conocimientos por parte del docente junto con momentos didácticos de exploración e indagación por parte de los estudiantes.

En esta dialéctica, el diálogo y la cooperación entre el profesor y los estudiantes (y entre los propios estudiantes), a propósito de la situación – problema que se trata de resolver y el contenido que se debe poner en juego, pueden desempeñar un papel clave. En estas fases de diálogo y cooperación necesariamente tienen lugar momentos de transmisión de conocimientos.

Figura 1. Dinámica de una configuración didáctica

En un proceso de instrucción, la realización por el alumno de las prácticas matemáticas ligadas a la solución de ciertas tareas problemáticas, operativas y discursivas, pone en juego un conglomerado de objetos y procesos cuya naturaleza, desde el punto de vista institucional es esencialmente normativa (regulativa) (Font, Godino, y Gallardo, 2013). Cuando el alumno realiza prácticas no pertinentes, el *sistema docente* debe guiarlo hacia las esperadas desde el punto de vista institucional. Por ello, cada tipo de objeto (conceptos, lenguajes, etc.) o proceso (definición, expresión, generalización, etc.) requiere un foco de atención, un momento, en el proceso de estudio. En particular los momentos regulativos (institucionalización) son densos por doquier en la actividad matemática y en el proceso de estudio, como también los momentos de formulación/ comunicación y justificación.

La realización de las prácticas matemáticas supone la intervención de objetos previos para comprender las demandas de la situación - problema y poder implementar una estrategia de partida. Tales objetos, sus reglas y condiciones de aplicación, deben estar disponibles en la memoria de trabajo del sujeto. Aunque sea posible buscar tales conocimientos por sí mismo en el *espacio de trabajo*, no siempre hay suficiente tiempo o el alumno no lo logra; por ello el profesor y los compañeros pueden prestar un apoyo inestimable para evitar la frustración y el abandono. Se trata de los momentos del recuerdo y activación de los conocimientos previos, los cuales son generalmente necesarios a lo largo del proceso de estudio. Dichos momentos pueden tener lugar no solo en la fase exploratoria / investigativa, sino también en la fase de formulación, comunicación, procesamiento o cálculo y justificación de los resultados. Estos momentos se corresponden con actos de transmisión de conocimientos y pueden ser cruciales para la optimización del aprendizaje.

11.2. Dimensión normativa

Las normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), e introducen nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996). Así mismo, la noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau (1988) y constituye una pieza clave en la Teoría de Situaciones Didácticas. En todo caso, se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como 'micro-sociedad', que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes.

El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. Consideramos que tanto el 'contrato interaccionista', como el 'brouseauniano', constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas sobre las cuales se apoyan - y al mismo tiempo restringen - la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular. Se considera necesario responder a las cuestiones:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

En Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva del EOS, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figura 2).

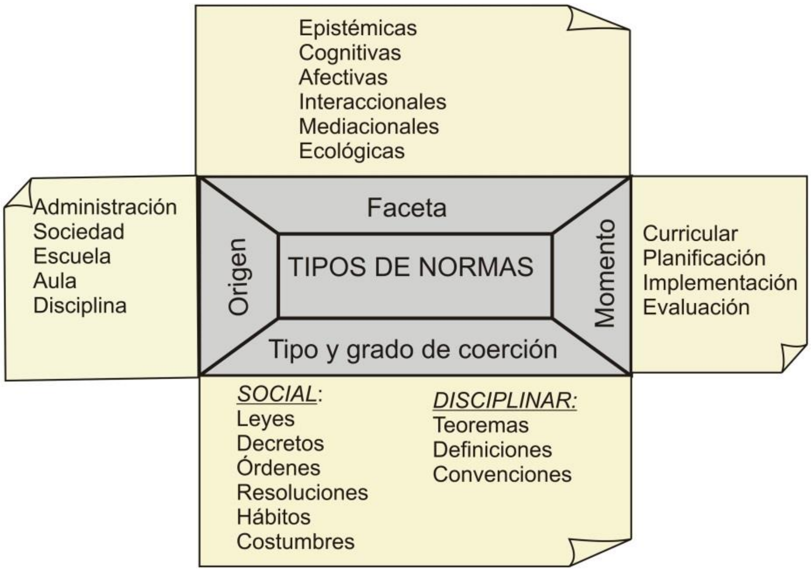

Figura 2. Dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009)

La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.
- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los procesos de estudio, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

11.3. Idoneidad didáctica

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje nos lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Ciertamente no disponemos de recetas de cómo enseñar, pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes. Consideramos razonable aceptar la siguiente hipótesis metodológica: Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones, . . .), un “experto” en una didáctica específica puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes. En última instancia este es el objetivo de la ciencia y tecnología del diseño educativo (Reigeluth, 2000).

A priori, no se propone un formato de interacción privilegiado, transmisivo o indagativo, para la gestión de las trayectorias didácticas, sino que se adopta como criterio orientativo de dicha gestión la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013). El logro de una alta idoneidad didáctica supone un balance equilibrado de seis idoneidades parciales en las facetas, epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Dependiendo del contenido, los estudiantes, los recursos disponibles y demás factores condicionantes de los procesos instruccionales el logro de una alta idoneidad didáctica puede implicar la implementación de un modelo instruccional mixto donde se articulen momentos indagativos, transmisivos, y dialógicos/ cooperativos. Estos últimos momentos implican la aplicación de acciones indagativas y reflexivas, por parte de los estudiantes y acciones de transmisión de conocimientos por el docente, y tienen, por tanto, un carácter mixto.
La optimización del aprendizaje, esto es, el logro de procesos instruccionales de alta idoneidad didáctica en las distintas facetas (Figura 3), sobre todo la idoneidad interaccional - mediacional y cognitiva - afectiva tiene un carácter fuertemente local (Godino, 2013). “Experimentos controlados

indican casi de manera uniforme que cuando se trata con información nueva, se debería mostrar a los aprendices qué hacer y cómo hacerlo" (Kirschner, Sweller & Clark, 2006, p. 79). La optimización de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático requiere un modelo de instrucción mixto indagativo - transmisivo de enseñanza - aprendizaje en el que tanto el estudiante como el profesor desempeñen roles protagonistas. "Para que lo general aparezca en lo singular tanto el estudiante como el profesor deberían trabajar juntos. El profesor y el estudiante tienen que comprometerse en un proceso de objetivación" (Radford, 2013, p. 35).

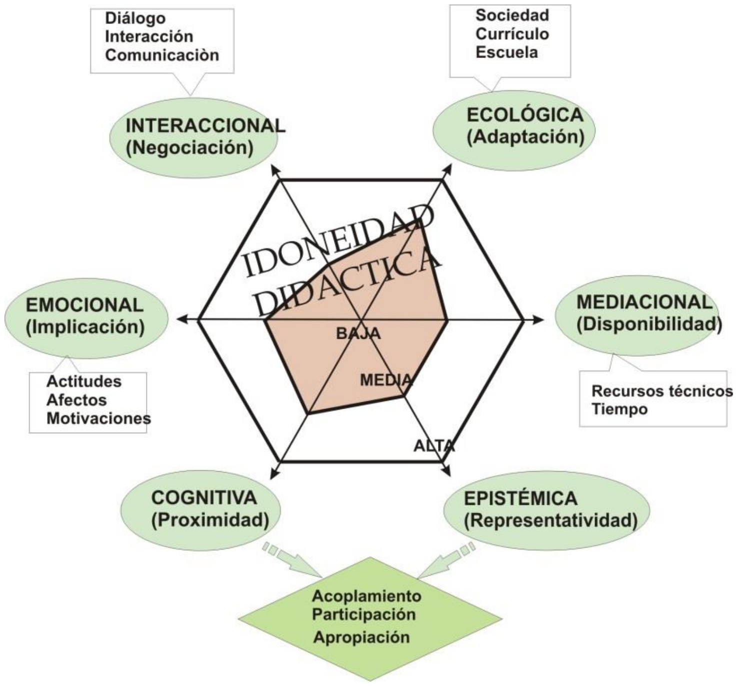

Figura 3. Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116)

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

La reflexión sobre las normas y metanormas (D'Amore, Font y Godino, 2007) que condicionan los procesos de estudio matemático, así como la valoración de la idoneidad didáctica forman parte de la dimensión metadidáctica del análisis e intervención didáctica.

12. REFLEXIONES FINALES

Como se indica en Godino, Contreras y Font (2006), una cuestión esencial para la instrucción matemática, que requiere nuevos desarrollos teóricos e investigaciones empíricas, es la caracterización de posibles trayectorias didácticas que optimicen el aprendizaje matemático. El abordaje de esta problemática tiene como consecuencia la elaboración de modelos prescriptivos, lo que requiere asumir explícitamente principios epistemológicos y axiológicos complementarios. Entre tales principios hemos propuesto seis criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas que designamos como idoneidad epistémica (representatividad), cognitiva (proximidad), interacciona (negociación), mediacional (disponibilidad), afectiva (implicación) y ecológica (adaptación). Aceptando estos supuestos y fijado un objeto matemático y un medio instruccional, una trayectoria didáctica óptima debería tener en cuenta el doble carácter de las matemáticas como actividad y como producto. Por ello los alumnos deberían tener oportunidad de poner en práctica la actividad matemática, pero también de conocer y dominar los productos culturales matemáticos que otras personas han elaborado como resultado de su propia actividad. Además, el recuerdo e interpretación de reglas matemáticas ya asumidas forma parte de esa actividad matemática y resulta imprescindible para que pueda tener lugar.

Esto nos lleva a sugerir la complementariedad de los patrones de interacción de tipo magistral, basado en la "emisión-recepción" y los de tipo "reinvención a-didáctica", tipo estudio personal y tipo diálogo contextualizado, para cada componente de los contenidos matemáticos. Parece que el fomento del interés y la capacidad heurística por parte de los alumnos debe llevar a implementar, siempre que sea posible, un formato de tipo reinvención a-didáctica; pero siendo conscientes que la apropiación del significado institucional de referencia exigirá en algún momento un tipo de patrón de interacción emisión recepción, e incluso un patrón conductista (ejercitación de ciertas técnicas básicas, cuyo objetivo es la rutinización).

Hemos razonado que la gestión de la dialéctica entre los distintos patrones de interacción deberá basarse en la negociación de los significados. De este modo el análisis semiótico se revela como un elemento crucial de los procesos de estudio de las matemáticas. Dicho análisis permitirá identificar los puntos críticos en que se deben negociar los significados entre los distintos actores que intervienen en el proceso educativo, aportar pautas para seleccionar las configuraciones didácticas y los patrones de interacción más apropiados y caracterizar los aprendizajes logrados.

REFERENCIAS

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 1-18.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 3, 281-308.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*, 797–810.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339–352

Berger, P. y Luckmann, T. (1968). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: Amorrortu.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Boghossian, P. (2006). Behaviorism, constructivism, and Socratic pedagogy. *Educational Philosophy and Theory*, *38*(6), 713-722.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9* (3), 309-336.

Brousseau, B. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch, (ed.). *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, *24*(1), 7-12.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Cobb, P. y Hodge, L.L. (2002). A relational perspective on issues of the cultural diversity and equity as they play out in the mathematics classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *4* (2/3), 249-284.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, Y. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, Vol. XXVIII, Nº 2, 49-77.

Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 837–849.

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of mathematics education* (pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *2*, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics.* New York: SUNY.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. En, B. Sriraman y L. English (Eds), *Teories of mathematics education. Seeking new frontiers* (pp. 39-47). Heidelger: Springer.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC:NCTM y IAP, pp. 225-256.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer AC.

Glasersfeld, E. von (1989). Constructivism in education. En T. Husen y N. Postlethwaite (Eds). *International Encyclopedia of Education.* (Supplementary Vol.) (pp. 162-163). Osford: Pergamon

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante, 2,* (2), 69-79.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible

en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.
Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
Hiebert, J. y Grouws D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: NCTM. y IAP, pp. 371-404.
Hjalmarson, M. A. y Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520-534). New York: Routledge
Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination and reason*. Chicago: University of Chicago Press.
Jonassen, D. H. (1991). Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? *Educacional Technology Research & Development*, *39*(3), 5-14.
Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 46, 1-12.
Kieren, T. E. y S. E. B. Pirie (1991). Recursion and the mathematical experience. En L.P. Steffe (Ed.). *Epistemological foundation of mathematical experience.* New York: Springer Verlag.
Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, *41* (2), 75-86.
Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Were mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.
Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.
Lesh, R. y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers.* (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.
Morin, E. (1992). *El método. Las ideas.* Madrid: Cátedra (orig. francés, Editions du Seuil, 1991).
Murphy, P. y McCormick, R. (1997). Problem solving in science and technology education. *Research in Science Education*, *27*(3), 461-481.
Patten, B. C. y Auble, G.T. (1980). System approach to the concept of niche. *Synthese* 43, 155-181.
Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-22.
Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. The notion and role of theory in mathematics education research.* Disponible en, https://www.researchgate.net/publication/253274896
Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Reigeluth, C. M. (2000). ¿En qué consiste una teoría de diseño educativo y cómo se está transformando? En C. M. Reigeluth (Ed.), *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción* (pp. 15-40). Madrid: Santillana

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie, 112,* 85-118.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer.

Sweller, J., Kirschner, P. A., & Clark, R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, *42*(2), 115-121.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana (I). El uso colectivo y la evolución de los conceptos***.** Madrid: Alianza (ed. orig. inglesa de 1972).

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute. CR-ROM for ICME9. Utrecht: Utrecht University. Disponible en, http://www.fisme.science.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures* (pp. 163-199). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

White, L.A. (1983). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización.* Barcelona: Paidos.

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

Wittman, E. C. (1995). Mathematics education as a ‘design science. *Educational Studies in Mathematics, 29* (4), 355-374.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.