ACTA SCIENTIAE

Revista de Ensino de Ciências e Matemática

Vol. 10 - N° 2 - Jul./Dez. 2008

ISSN 1517-4492

ACTA SCIENTIAE

Indexador: LATINDEX

Endereço para correspondência
Av. Farroupilha, 8001 - Prédio 14, Sala 218
CEP: 92425-900
Canoas/RS - Brasil
Fone: 3477.9278
E-mail: acta-scientiae@ulbra.br

Visite nosso site: www.ulbra.tche.br/~acta

Editora da ULBRA
Diretor: Valter Kuchenbecker
Coord. de periódicos: Roger Kessler Gomes
Editoração: Humberto Gustavo Schwert

Assinaturas/Subscriptions
Editora da ULBRA
Av. Farroupilha, 8001
Bairro São José
CEP: 92425-900
Canoas/RS - Brasil
Fone: (51) 3477.9118
Fax: (51) 3477.9115
E-mail: editora@ulbra.br

Solicita-se permuta.
We request exchange.
On demande l'échange
Wir erbitten Austausch

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação - CIP

A188 Acta Scientiae : revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas / Universidade Luterana do Brasil. – Vol. 1, n. 1 (jan./jun. 1999)- . – Canoas : Ed. ULBRA, 1999- .
v. ; 28 cm.

Semestral.
A partir do vol. 10, n. 1 (jan. 2008), o subtítulo foi modificado para Revista de Ensino de Ciências e Matemática.
ISSN 1517-4492

1. Ciências naturais – periódicos. 2. Ensino de ciências e matemática – periódicos. I. Universidade Luterana do Brasil.

CDU 501/599(05)

Setor de Processamento Técnico da Biblioteca Martinho Lutero

Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática[1]

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Vicenç Font

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma síntese do modelo teórico sobre o conhecimento e a instrução matemática que estamos elaborando há vários anos. Como principais características do referido modelo, destacamos: a articulação das facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático, a atribuição de um papel-chave à atividade de resolução de problemas, aos recursos expressivos e à incorporação coerente de pressupostos pragmáticos e realistas sobre o significado dos objetos matemáticos. O modelo da cognição matemática elaborado se converte no elemento central para o desenvolvimento de uma teoria da instrução matemática significativa, permitindo também comparar e articular diversas aproximações teóricas usadas em Educação Matemática desde um ponto de vista unificado.

Palavras-chave: Conhecimento matemático. Ensino e aprendizagem. Fundamentos teóricos. Epistemologia e cognição. Objetos matemáticos e significados.

An onto-semiotic focus of knowledge and the mathematical instruction

ABSTRACT

In this paper we synthesise the theoretical model for mathematical cognition and instruction we are developing in the past years. We highlight the following main features of this approach: the articulation of the institutional and personal facets of mathematical knowledge; the recognition of a key role to problem solving and the language; and the coherent assumption of pragmatic and realist posits for the meaning of mathematical objects. This theoretical framework is used to base the development of a theory of mathematical instruction; it allows also comparing and articulating different theoretical models used in mathematics education from a unified viewpoint.

Keywords: Mathematical Knowledge. Teaching and Learning. Theoretical Framework. Epistemology and Cognition. Mathematical Objects.

Juan D. Godino é professor-investigador e coordenador do "Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática" da Universidade de Granada. E-mail: jgodino@ugr.es
Carmen Batanero é professora-investigadora do "Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática" da Universidade de Granada. E-mail: batanero@ugr.es
Vicenç Font é professor-investigador do "Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática" da Universidade de Barcelona. E-mail: vicencfont@menta.net
Tradução: **Edson Crisóstomo dos Santos**. Professor-investigador da Universidade Estadual de Montes Claros. Doutorando do "Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática" da Universidade de Granada. E-mail: edsonc@correo.ugr.es. **Claudia Lisete Oliveira Groenwald**. Professora-investigadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). E-mail: claudiag@ulbra.br

[1] Versão ampliada e revisada em 9 de março de 2008 do artigo de GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, v.39 (1-2): 127-135, 2007. Neste trabalho. realizamos uma síntese de diversas publicações de Godino e colaboradores onde se desenvolve um marco teórico integrativo para a Didática da Matemática, com um enfoque ontológico e semiótico. Estes trabalhos estão disponíveis na Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino

INTRODUCÃO

A Educação Matemática, como campo de investigação, tem por finalidade específica o estudo dos fatores que condicionam os processos de ensino e aprendizagem da matemática e o desenvolvimento de programas de melhoria destes processos. Como propôs o programa de Steiner para a Teoria da Educacão Matemática, é necessário "o desenvolvimento de uma aproximação compreensiva à Educação Matemática, que deve ser vista, em sua totalidade, como um sistema interativo que compreende pesquisa, desenvolvimento e prática" (STEINER et al., 1984, p.16).

Para atingir esse objetivo, a Educação Matemática deve considerar as contribuições de diversas áreas como a Psicologia, a Pedagogia, a Filosofia ou a Sociologia. Além disso, deve estar baseada numa análise da natureza dos conteúdos matemáticos, seu desenvolvimento cultural e pessoal, particularmente, no âmbito das instituições escolares. Essa análise ontológica e epistemológica é essencial para a Educação Matemática, uma vez que ela torna possível estudar os processos de ensino e aprendizagem de objetos difusos ou indefinidos.

Nesse sentido, a pesquisa em Educação Matemática não pode ignorar questões filosóficas, tais como:

- Qual é a natureza dos objetos matemáticos?
- Qual é o papel da atividade humana e dos processos socioculturais no desenvolvimento das idéias matemáticas?
- A matemática é descoberta ou inventada?
- O significado integral dos conceitos está plenamente contemplado através das definições formais e dos enunciados das proposições?

Que papel as situações problemáticas desempenham, no significado dos objetos matemáticos e suas relações com outros objetos, quando eles e as diversas representações simbólicas são usados como ferramentas?

A emergência relativamente recente da área de conhecimento de Educação Matemática explica que ainda não existe um paradigma de investigação consolidado e dominante. Diversos trabalhos (ERNEST, 1994; SIERPINSKA; LERMAN, 1996; GASCÓN, 1998; FONT, 2002) cujo objetivo consistia em realizar propostas de organização dos diferentes programas de investigação em educação matemática, evidenciaram a diversidade de aproximações teóricas que estão em desenvolvimento na atualidade. Em certos momentos, essa diversidade pode ser inevitável, inclusive enriquecedora, porém o progresso da área e a potencialização de suas aplicações práticas exigem esforços para identificar o núcleo fundamental de conceitos e métodos que deveriam cristalizar-se com o decorrer do tempo, utilizando a clássica terminologia de Lakatos (1983) em um verdadeiro programa de investigação.

Um dos principais problemas "meta-didáticos" que devemos abordar relaciona-se à precisão das noções teóricas que vêm sendo utilizadas nesta área de conhecimento, em particular as noções usadas para analisar os fenômenos cognitivos. Não existe um consenso sobre esse tema. Basta observar a variedade de noções que se utilizam sem prévia comparação, precisão e depuração: conhecimentos, saberes, competências, concepções, conceitos, representações internas, conceito-imagem, esquemas, invariantes operatórios, significados, praxeologias, etc.

O progresso neste campo exige contrastar estas ferramentas e, possivelmente, elaborar outras novas que permitam realizar de maneira mais eficaz o trabalho requerido. Além disso, é necessário tratar de articular de maneira coerente as diversas faces implicadas, entre as quais podemos citar: ontológica (tipos de objetos e sua natureza), epistemológica (acesso ao conhecimento), sociocultural e instrucional (ensino e aprendizagem organizados no âmbito das instituições escolares).

Pensamos que é necessário e possível construir um enfoque unificado da cognição e instrução matemática que permita superar os dilemas existentes entre os diversos paradigmas que competem entre si: realismo-pragmatismo, cognição individual-institucional, construtivismo-condutismo, entre outros. Para isto é necessário dispor de algumas ferramentas conceituais e metodológicas de áreas holísticas, como a Semiótica, a Antropologia e a Ecologia, articuladas de maneira coerente com disciplinas como a psicologia e a pedagogia, que tradicionalmente consistem no ponto de referência imediato para a Educação Matemática.

UMA APROXIMAÇÃO AO ENFOQUE UNIFICADO DO CONHECIMENTO E A INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Há mais de 10 anos estamos interessados na problemática descrita de fundamentação da investigação em educação matemática, assim como desenvolvendo diversas ferramentas teóricas que permitam abordar algumas das questões mencionadas. Em Godino (2003)[2], descrevemos detalhadamente os antecedentes teóricos nos quais apoiamos o sistema de noções sobre o conhecimento matemático que propomos para o estudo dos problemas do ensino e aprendizagem da matemática. Essas ferramentas foram desenvolvidas em três etapas, nas quais fomos refinando progressivamente o objeto de nossa indagação. A seguir descreveremos sucintamente as referidas etapas e os problemas abordados em cada uma.

Em nossos primeiros trabalhos, publicados no período 1993–1998 (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO, 1996; GODINO; BATANERO, 1998), desenvolvemos e refinamos progressivamente as noções de "significado institucional e pessoal de um objeto matemático" (entendidos ambos em termos de sistemas de práticas, nos quais o objeto é determinante para sua realização) e sua relação com a noção de compreensão. Desde supostos pragmáticos, estas idéias tratam de centrar o interesse da investigação nos conhecimentos matemáticos institucionalizados, porém sem perder de vista o sujeito individual a quem está dirigido o esforço educativo.

[2] Os trabalhos citados de Godino e cols. estão disponíveis na Internet (http://www.ugr.es/local/jgodino).

Na segunda etapa (a partir de 1998) consideramos necessário elaborar modelos ontológicos e semióticos mais detalhados. Essa reflexão surge ao constatarmos que o problema epistêmico-cognitivo não pode se desvincular do ontológico. Por este motivo nos interessamos em continuar elaborando uma ontologia suficientemente rica para descrever a atividade matemática e os processos de comunicação de suas "produções".

Na primeira fase, propusemos, como noção básica para a análise epistêmica e cognitiva (dimensões institucional e pessoal do conhecimento matemático), "os sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou no âmbito de uma instituição) para uma classe de situações-problemas". Entretanto, os processos comunicativos que têm lugar na educação matemática requerem interpretar tanto as entidades conceituais como as situações problemáticas e os próprios meios expressivos e argumentativos que desencadeiam processos interpretativos. Isto supõe conhecer os diversos objetos emergentes dos tipos de práticas, assim como sua estrutura.

Chegamos à conclusão de que é preciso estudar globalmente e com mais profundidade as relações dialéticas entre o pensamento (as idéias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problemas, para as quais se inventam tais recursos. Em conseqüência, neste período tratamos de progredir no desenvolvimento de uma ontologia e uma semiótica específica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de signos matemáticos postos em jogo na interação didática.

Essas questões são centrais em outras áreas (como a Semiótica, a Epistemologia e a Psicologia), ainda que constatamos que não se pode falar em uma solução clara para as mesmas. As respostas dadas são diversas, incompatíveis ou difíceis de compaginar, como podemos ver, por exemplo, nos dilemas planificados pelas aproximações propostas por Peirce (1965), Saussure (1915) e Wittgenstein (1953). O interesse pelo uso de noções semióticas em Educação Matemática é crescente, conforme se pode apreciar no estudo de Anderson et al. (2003) e no número monográfico da revista *Educational Studies in Mathematics* (SÁENZ-LUDLOW; PRESMEG, 2006).

Tratamos de dar uma resposta particular, do ponto de vista da Educação Matemática, ampliando as pesquisas realizadas até esse momento sobre os significados institucionais e pessoais e completando, também a idéia de função semiótica e a ontologia matemática associada, que apresentamos em Godino e Recio (1998).

Na terceira etapa de nosso trabalho, investigamos os modelos teóricos propostos no âmbito da Educação Matemática sobre a instrução matemática[3] (GODINO et al., 2006). Propusemo-nos a distinguir, num processo de instrução matemática, seis dimensões, cada uma modelável como um processo estocástico com seus respectivos espaços de estados e trajetórias: epistêmica (relativa ao conhecimento institucional), docente (funções do professor), discente (funções do estudante), mediadora (relativa ao uso de recursos instrucionais), cognitiva (gênese de significados pessoais) e emocional (que contempla as atitudes, emoções, etc., dos estudantes, relativas ao estudo da Matemática)[4].

[3] Entendida como ensino e aprendizagem de conteúdos específicos no âmbito dos sistemas didáticos.

[4] Na seção 3.7, acrescentamos a dimensão ecológica para contemplar as interações entre os processos de estudo e o contexto social e educativo no qual elas se produzem.

O modelo ontológico e semiótico da cognição proporciona critérios para identificar os estados possíveis das trajetórias epistêmica e cognitiva e o emprego da "negociação de significados" como noção chave para a gestão das trajetórias didáticas. A aprendizagem matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os distintos componentes de tais trajetórias.

Os construtos teóricos elaborados durante estes três períodos constituem o modelo ontológico-semiótico que sintetizamos nas seções seguintes. Este modelo trata de aportar ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento. Além disso, consideramos as facetas do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e avançar na direção de um modelo unificado da cognição e instrução matemática.

FERRAMENTAS TEÓRICAS QUE COMPÕEM O ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO

Nesta seção apresentamos uma síntese dos supostos e noções teóricas que constituem o enfoque onto-semiótico[5] (EOS) sobre o conhecimento e a instrução matemática. Na seção 4, descrevemos as concordâncias e complementaridades deste marco com outros modelos teóricos usados em educação matemática e apresentamos, resumidamente, na seção 5, duas investigações que utilizam algumas das ferramentas teóricas do EOS.

O ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da matemática como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado. Tomando como noção primitiva a de situação-problemática, definem-se os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática que mencionamos, e, por outro, a gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como sua interdependência.

Sistemas de práticas operativas e discursivas ligadas a campos ou tipos de problemas

Consideramos *prática matemática* toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO, 1994, p.334). As práticas podem ser idiossincráticas de uma pessoa ou compartilhadas no âmbito de uma instituição. Uma instituição está constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problemáticas; o compromisso mútuo

[5] Em algumas publicações, o EOS está designado como "Teoría de las Funciones Semióticas (TFS)", ao considerar que a "função semiótica" é um construto chave do referido enfoque.

com a mesma problemática implica na realização de determinadas práticas sociais que freqüentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como em suas regras e modos de funcionamento[6].

No estudo da matemática, mais que uma prática particular relativa a um problema concreto, interessa considerar os sistemas de práticas (operativas e discursivas) que se tornam evidentes pela atuação das pessoas inseridas em tipos de situações problemáticas. Para algumas questões do tipo: O que é o objeto matemático[7] "média aritmética" e que significa ou representa a expressão "média aritmética"?

Propomos como resposta, "o sistema de práticas que realiza uma pessoa (significado pessoal) ou que é compartilhado no âmbito de uma instituição (significado institucional) para resolver um tipo de situação-problema que requer encontrar um representante de um conjunto de dados". Com esta formulação do significado, o EOS assume os pressupostos da epistemologia pragmatista: "as categorias opostas de sujeito e objeto passam a um segundo plano ao atribuir-lhes um estatuto derivado e cedem seu lugar privilegiado à categoria de ação" (FAERNA, 1996; p.14).

A relatividade socioepistêmica e cognitiva dos significados, entendidos como sistemas de práticas, e sua utilização na análise didática nos leva a introduzir a tipologia básica de significados que será resumida na Figura 1 (GODINO, 2003, p.141). Em relação aos significados institucionais, propomos os seguintes tipos:

- implementado: num processo de estudo específico é o sistema de práticas efetivamente implementadas pelo docente;
- avaliado: sistema de práticas que utiliza o docente para avaliar a aprendizagem;
- pretendido: sistema de práticas incluídas no planejamento do processo de estudo;
- referencial: sistema de práticas utilizado como referência para elaborar o significado pretendido. Numa instituição de ensino concreta, este significado de referência será uma parte do significado holístico[8] do objeto matemático. A determinação do referido significado global requer realizar um estudo histórico-epistemológico sobre a origem e evolução do objeto em questão, assim como considerar a diversidade de contextos de uso onde se coloca em jogo o referido objeto.

[6] As instituições são concebidas como "comunidades de práticas"e incluem, portanto, as culturas, os grupos étnicos e contextos socioculturais. Assumimos, portanto, o postulado antropológico da relatividade socioepistêmica dos sistemas de práticas, dos objetos emergentes e dos significados.
[7] Inicialmente, usamos a expressão 'objeto matemático' como sinônimo de 'conceito matemático'. Posteriormente, estendemos seu uso para indicar qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática. Este uso geral ou débil de objeto é o mesmo realizado no interacionismo simbólico (BLUMER, 1969).
[8] Wilhelmi, Lacasta e Godino (no prelo).

Quanto aos significados pessoais, propomos os seguintes tipos:

- global: corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais que é capaz de manifestar potencialmente o sujeito em relação a um objeto matemático;
- declarado: refere às práticas efetivamente expressadas através das avaliações propostas, incluindo-se tanto as corretas quanto as incorretas desde o ponto de vista institucional;
- atingido: corresponde às práticas manifestadas que são coerentes com a pauta institucional estabelecida. Na análise da variação dos significados pessoais que têm lugar num processo de estudo, nos interessará considerar tanto os *significados iniciais* ou prévios dos estudantes quanto aqueles os quais os mesmos alcancem no final do processo.

Na parte central da Figura 1 indicamos as relações dialéticas entre o ensino e a aprendizagem, que supõem o acoplamento progressivo entre os significados pessoais e institucionais. Neste sentido, o ensino implica na participação do estudante na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais; a aprendizagem, em última instância, supõe a apropriação pelo estudante dos referidos significados.

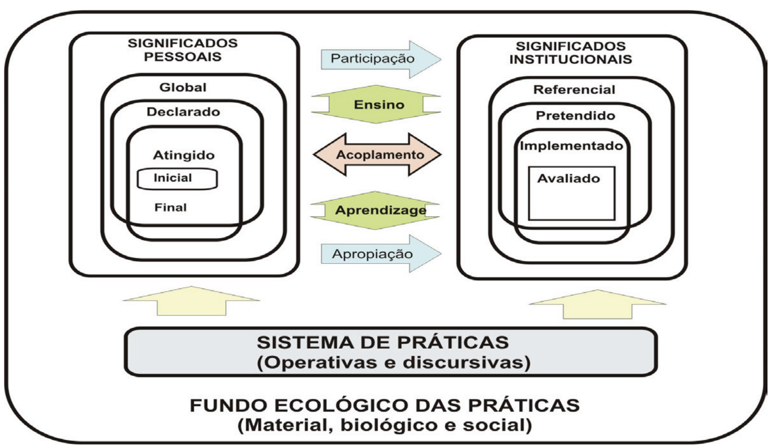

FIGURA 1 – Tipos de significados institucionais e pessoais.

Objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas

Nas práticas matemáticas, intervêm objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) e não ostensivos (conceitos, proposições, etc., que evocamos ao fazer matemática) e que são representados em forma textual, oral, gráfica e, inclusive, gestual. Dos sistemas de práticas matemáticas operativas e discursivas emergem novos objetos provenientes das mesmas e revelam sua organização e estrutura[9]. Quando os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados

[9] "O discurso matemático e seus objetos são mutuamente constitutivos" (SFARD, 2000, p.47).

"objetos institucionais"[10] e se os referidos sistemas de práticas correspondem a uma pessoa, consideramos que emergem "objetos pessoais"[11]. A noção de emergência pode ser relacionada, desde o ponto de vista dos objetos pessoais, com os processos cognitivos que Sfard (1991) descreve como interiorização, condensação e reificação e, desde o plano institucional, se relaciona com os processos de comunicação, simbolização e regulação. A emergência dos objetos também está relacionada com a metáfora ontológica (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000) que permite considerar acontecimentos, atividades, idéias, entre outros, como se fossem entidades (objetos, coisas, etc.).

No EOS propomos a seguinte tipologia de objetos matemáticos primários:

- *linguagem* (termos, expressões, notações, gráficos...) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual...);
- *situações-problemas* (aplicações extra-matemáticas, exercícios...).
- *Conceitos-definição* (introduzidos mediante definições ou descrições: reta, ponto, número, média, função...);
- *proposições* (enunciados sobre conceitos...);
- *procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo...);
- *argumentos* (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos; dedutivos ou de outro tipo...).

Por sua vez, estes objetos se organizam em entidades mais complexas: sistemas conceituais, teorias...

Os seis tipos de entidades primárias postuladas ampliam a tradicional distinção entre entidades conceituais e procedimentais, ao considerá-las insuficientes para descrever os objetos que intervêm e emergem da atividade matemática. Também se amplia o "triângulo epistemológico" (STEINBRING, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referência, conceito), especialmente ao problematizar a noção de conceito e interpretar o "objeto/contexto de referência" em termos de situações-problemas. As situações-problemas são a origem ou razão de ser da atividade; a linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a ação; os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si.

A consideração de uma entidade como primária é uma questão relativa (e não absoluta), visto que se trata de entidades funcionais e relativas aos jogos de linguagem (marcos institucionais e contextos de uso) em que participam; têm também um caráter recursivo, no sentido de cada objeto, dependendo do nível de análise, pode estar composto por entidades dos demais tipos (um argumento, por exemplo, pode colocar em jogo conceitos, proposições, procedimentos, etc.).

[10] Esta formulação dos objetos institucionais é coerente com o modo de conceber os "objetos conceituais culturais" na semiótica cultural (RADFORD, 2006, p.57): "Os objetos matemáticos são formas conceituais de atividade reflexiva mediada histórica, social e culturalmente encarnada".
[11] Os "objetos pessoais" incluem os construtos cognitivos, tais como concepções, esquemas, representações internas, etc.

Relações entre objetos: função semiótica

Adotamos a noção de função de signo[12] de Hjelmslev (1943) como a dependência entre um texto e suas componentes, assim como entre estas componentes. Portanto se refere às correspondências (relações de dependência ou função) entre um antecedente (expressão, representante) e um conseqüente (conteúdo, representado), estabelecidas por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um determinado critério ou código de correspondência. Esses códigos podem ser regras (hábitos, convênios) que informam aos sujeitos implicados sobre os termos que devem ser colocados em correspondência nas circunstâncias fixadas.

As relações de dependência entre expressão e conteúdo podem ser do tipo representacional (um objeto é colocado no lugar de outro para um determinado propósito), instrumental[13] (um objeto usa o outro ou outros como instrumento) e estrutural (dois ou mais objetos compõem um sistema do qual emergem novos objetos). Desta maneira, as funções semióticas e a ontologia matemática associada contemplam a natureza essencialmente relacional da matemática e generalizam, de maneira radical, a noção de representação. Assim, o papel de representação não é exclusivamente assumido pela linguagem; segundo a semiótica de Peirce, os distintos tipos de objetos (situações-problemas, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) podem ser também expressão ou conteúdo das funções semióticas.

O uso das funções semióticas permite um refinamento da análise do significado em termos de práticas. As funções semióticas correspondem a um instrumento relacional que facilita o estudo conjunto da manipulação de ostensivos matemáticos e do pensamento que a acompanha, característico das práticas matemáticas.

Configurações de objetos e processos matemáticos

A noção de "sistema de práticas" é útil para determinadas análises do tipo macrodidática, particularmente quando tratamos de comparar a forma particular que adota os conhecimentos matemáticos em distintos marcos institucionais, contextos de uso ou jogos de linguagem. Para uma análise mais fina da atividade matemática, é necessário introduzir os seis tipos de entidades primárias comentadas anteriormente: situações, linguagens, definições, proposições, procedimentos e argumentos. Em cada caso estes objetos estarão relacionados entre si formando *configurações,* definidas como as redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Estas configurações podem ser *epistêmicas* (redes de objetos institucionais) ou *cognitivas* (redes de objetos pessoais). Os sistemas de práticas e as configurações são propostas como ferramentas teóricas para descrever a constituição destes objetos e relações (configurações) em sua dupla versão: pessoal e institucional.

---

[12] Descrita por Uberto Eco como *função semiótica:* "Um signo está constituído sempre por um (ou mais) elementos de um PLANO DA EXPRESSÃO colocados convencionalmente em correlação com um (ou mais) elementos de um PLANO DO CONTEÚDO […] Uma função semiótica se realiza quando dois funtivos (expressão e conteúdo) entram em correlação mútua […]" (ECO, 1995,p.83-84).

[13] Com as palavras, não apenas se dizem coisas, mas também se fazem (AUSTIN, 1982).

A constituição desses objetos e suas relações, tanto em sua faceta pessoal quanto institucional, tem lugar ao longo do tempo mediante processos matemáticos, os quais são interpretados como "seqüências de práticas". Os objetos matemáticos emergentes constituem a cristalização ou reificação resultante desses processos (dialética instrumento-objeto de DOUADY, 1986; dualidade objeto-processo de SFARD, 1991).

Nossa maneira de interpretar os procesos matemáticos como seqüências de práticas, em correspondência com os tipos de objetos matemáticos primários, nos proporciona critérios para categorizar os processos. A constituição dos objetos lingüísticos, problemas, definições, proposições, procedimentos e argumentos têm lugar mediante os respectivos processos matemáticos primários, de comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimentos (execução de algoritmos, rotinas...) e argumentação.

A *resolução de problemas* e, de maneira mais geral, a *modelização,* devem ser consideradas como "hiper-processos" matemáticos ao implicar configurações complexas dos processos matemáticos primários (estabelecimento de *conexões* entre os objetos e *generalização* de técnicas, regras e justificações). Além disso, a realização efetiva dos processos de estudo requer a realização de seqüências de práticas de planejamento, controle e avaliação (s*upervisão*) que conduzem a processos meta-cognitivos.

Atributos contextuais

A noção de jogo de linguagem (WITTGENSTEIN, 1953) ocupa um lugar importante ao considerá-la, junto com a noção de instituição, como os elementos contextuais que relativizam os significados dos objetos matemáticos e lhes atribuem uma natureza funcional. Os objetos matemáticos que intervêm nas práticas matemáticas e os seus emergentes, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados desde as seguintes facetas ou dimensões duais (GODINO, 2002):

- *pessoal-institucional*. Se os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados "objetos institucionais"; se estes sistemas são específicos de uma pessoa são considerados como "objetos pessoais" (GODINO; BATANERO, 1994, p.338). A cognição matemática deve contemplar as facetas pessoal e institucional, entre as quais se estabelecem relações dialéticas complexas e cujo estudo é essencial para a Educação Matemática. A "cognição pessoal" é o resultado do pensamento e a ação do sujeito individual diante de uma certa classe de problemas, enquanto a "cognição institucional" é o resultado do diálogo, o convênio e a regulação no âmbito de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas;
- *ostensivo – não ostensivo.* Entendemos por *ostensivo* qualquer objeto que é público e que, portanto, pode ser mostrado a outro. Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza *não ostensiva* (não perceptíveis por si mesmos).

Entretanto, qualquer destes objetos é utilizado nas práticas públicas através de seus ostensivos associados (notações, símbolos, gráficos). Esta classificação entre ostensivo e não ostensivo é relativa ao jogo de linguagem em que participam. O motivo disto é que um objeto ostensivo pode ser também pensado, imaginado por um sujeito ou estar implícito no discurso matemático (por exemplo, o sinal de multiplicar na notação algébrica);

- *expressão-conteúdo*: antecedente e conseqüênte de qualquer função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. Os distintos objetos não devem ser concebidos como entidades isoladas, senão colocadas em relação uns com os outros. A relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um *antecedente* (expressão, significante) e um *conseqüente* (conteúdo, significado) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um certo critério ou código de correspondência;
- *extensivo-intensivo (exemplar-tipo)*. Um objeto que intervém em um jogo de linguagem como um caso particular (um exemplo específico pode ser apresentado pela função $y = 2x + 1$) e uma classe mais geral (por exemplo a família de funções $y = mx + n$). A dualidade extensivo-intensivo é utilizada para explicar uma das características básicas da atividade matemática: o uso de elementos genéricos (CONTRERAS et al., 2005). Esta dualidade permite centrar a atenção na dialética entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão-chave na construção e aplicação do conhecimento matemático. "A generalização é essencial, porque distingue a criatividade matemática da conduta mecanizável ou algorítmica (OTTE, 2003, p.187);
- *unitário-sistêmico*. Em algumas circunstâncias os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (que supostamente são conhecidas previamente), enquanto em outras intervêm como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo. No estudo da adição e subtração, nos últimos níveis da educação primária, o sistema de numeração decimal (dezenas, centenas,…) é considerado como algo conhecido e, em conseqüência, como entidades unitárias (elementares). Estes mesmos objetos, no primeiro ano da educação primária, têm que ser considerados de maneira sistêmica para sua aprendizagem.

Essas facetas são apresentadas agrupadas em duplas que se complementam de maneira dialética. São consideradas como atributos aplicáveis aos distintos objetos primários e secundários, dando lugar a distintas "versões" dos referidos objetos através dos seguintes *processos cognitivos/ epistêmicos*:

institucionalização-personalização;

generalização-particularização;

análise/decomposição-síntese/reificação;

materialização/concreção-idealização/abstração;

expressão/representação-significação.

Na Figura 2 estão representadas as diferentes noções teóricas anteriormente descritas de maneira suscinta. No EOS a atividade matemática ocupa o lugar central e sua modelização ocorre em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Destas práticas emergem os distintos tipos de objetos matemáticos, que estão relacionados entre si formando configurações. Finalmente, os objetos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados desde as cinco facetas ou dimensões duais.

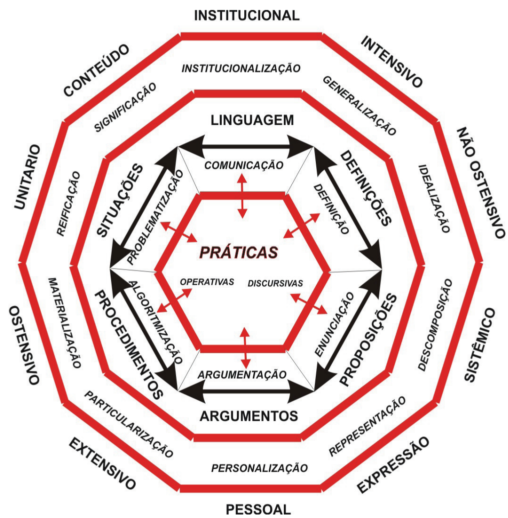

FIGURA 2 – Modelo onto-semiótico dos conhecimentos matemáticos.

As noções teóricas descritas (sistemas de práticas, instituições, processos, entidades emergentes, configurações, atributos contextuais, junto com a noção de função semiótica como entidade relacional básica) constituem uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento matemático.

Compreensão e conhecimento no EOS

Basicamente existem duas maneiras de entender a "compreensão": como processo mental ou como competência (GODINO, 2000; FONT, 2001). Estes dois pontos de vista respondem a concepções epistemológicas que, no mínimo, são divergentes, para não dizer que estão claramente opostas. Os enfoques cognitivos na didática da matemática, no fundo, entendem a compreensão como "processo mental". Os posicionamentos pragmatistas do EOS, ao contrário, permitem entender de imediato a compreensão basicamente como competência e não tanto como processo mental (consideramos que um sujeito compreende um determinado objeto matemático quando o usa de maneira competente em diferentes práticas).

Neste sentido, o fato de considerar que as funções semióticas têm um papel essencial no processo relacional entre entidades ou grupos de entidades, que se realiza nas práticas matemáticas (dentro de um determinado jogo de linguagem), permite entender no EOS a compreensão também em termos de funções semióticas (GODINO, 2003). Com efeito, podemos interpretar a compreensão de um objeto *O* por parte de um sujeito *X* (seja indivíduo ou instituição) em termos das funções semióticas que *X* pode estabelecer em circunstâncias fixadas, nas quais se colocam em jogo o objeto *O* como (funtivo) funtor (expressão ou conteúdo). Cada função semiótica implica em um ato de semiose por um agente interpretante e constitui um conhecimento. Falar de conhecimento equivale a falar de conteúdo de uma (ou muitas) funções semióticas, resultando numa variedade de tipos de conhecimentos em correspondência com a diversidade de funções semióticas que podem ser estabelecidas entre as diversas entidades introduzidas no modelo.

Recapitulação

Em nossas reflexões teóricas iniciais sobre a natureza da Matemática, (questionávamo-nos sobre) questionamos o que é um objeto matemático[14], por exemplo, a "média aritmética" e o que significa a expressão "média aritmética" (GODINO; BATANERO, 1994). O uso que fizemos, nessa etapa, de "objeto matemático" era equivalente ao de conceito matemático (idéia ou noção matemática)[15]. Adotando uma epistemologia pragmatista-antropológica estabelecemos, como resposta, uma função semiótica, cujo antecedente (significante) é o objeto matemático – ou a expressão que o designa – e o conseqüênte (significado) é um novo construto que descrevemos como o "sistema de práticas matemáticas realizadas por uma pessoa (ou compartilhada no âmbito de uma instituição) diante de uma certa classe de situações-problemas". Desta maneira, tratamos de superar a visão parcial e distorcida dos objetos matemáticos aportada pela perspectiva conceitualista/ formalista, na qual os objetos matemáticos se reduzem às suas definições e relações lógicas com outros objetos.

Com a finalidade de tornar operativas estas noções para descrever a atividade matemática, os "produtos" resultantes da referida atividade e dos processos de comunicação matemática, realizamos uma progressiva ampliação da noção de objeto matemático e significado. Objetos matemáticos não equivalem apenas a conceitos, mas a qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática. Neste sentido, significados não são somente "os sistemas de práticas", mas "o conteúdo de qualquer função semiótica". Com esse uso ampliado de "objeto" e "significado" torna-se necessário, em cada circunstância, especificar o tipo de objeto ou de significado referido para que a comunicação possa ser efetiva. Assim, abordamos os

[14] Questões similares são propostas por Sfard (2000, p.42-43): "Os símbolos matemáticos se referem a algo – porém, a quê? Qual é o *status* ontológico destas entidades? De onde vêm? Como podemos alcançá-las (ou construí-las)?"
[15] D'Amore (2001) apresenta um estudo extenso do debate sobre os conceitos e os objetos matemáticos. Nesta mesma direção, Otte (2003) analiza em que sentido a matemática tem objetos, enfatizando o papel essencial da dualidade particular-geral (que em nosso caso designamos como extensivo-intensivo, ou exemplar-tipo).

‘objetos emergentes’ dos sistemas de práticas como resultantes dos processos de definição (definições), argumentação (argumentos)...; ‘objetos relacionais’ (funções semióticas); objetos pessoais ou institucionais; objetos extensivos ou intensivos, etc.

Como resposta final – aberta à revisão e refinamento – à questão epistemológica sobre a natureza e origem dos conceitos matemáticos, propomos o par (*sistema de práticas*, *configuração*), entendendo também que tanto os sistemas de práticas quanto as configurações são relativas e dependentes dos atributos contextuais duais descritos na seção 3.5.

Sem dúvida, se trata de um modelo teórico complexo que está se revelando como uma ferramenta potente e útil para descrever e explicar os processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Problemas, práticas, processos e objetos didáticos

O modelo teórico sobre a cognição que descrevemos pode ser aplicado de maneira geral a outros campos do saber, particularmente aos saberes didáticos. Neste caso, os problemas terão uma natureza distinta:

- Que conteúdo devemos ensinar em cada contexto e circunstância?
- Como adequar o tempo para distribuir os distintos componentes e facetas do conteúdo a ser ensinado?
- Que modelo de processo de estudo devemos implementar em cada circunstância?
- Como planejar, controlar e avaliar o processo de estudo e aprendizagem?
- Que fatores condicionam o estudo e a aprendizagem? ...

Neste caso, as ações (práticas didáticas) colocadas em jogo, sua seqüenciação (processos didáticos) e os objetos emergentes de tais sistemas de práticas (objetos didáticos) serão diferentes com relação à solução dos problemas matemáticos.

Na Teoria das Configurações Didáticas (GODINO et al., 2006), sobre a qual temos trabalhado, modelizamos o ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático como um processo estocástico multidimensional composto de seis sub-processos (epistêmico, docente, discente, mediacional, cognitivo e emocional), com suas respectivas trajetórias e estados potenciais. Como unidade primária de análise didática propomos a *configuração didática*, constituída pelas interações professor-aluno a respeito de um objeto ou conteúdo matemático e usando recursos materiais específicos. É concebida como uma realidade organizacional, como um sistema aberto à interação com outras configurações das trajetórias didáticas das quais fazem parte. O processo de instrução sobre um conteúdo ou tema matemático se desenvolve num determinado tempo mediante uma seqüência de configurações didáticas (Figura 3).

Uma configuração didática está associada a uma *configuração epistêmica*, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações, as quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles. Associada a uma configuração epistêmica haverá uma *configuração instrucional* constituída pela rede de objetos docentes, discentes e mediacionais colocada em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática abordada. A descrição das aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo se realiza mediante as *configurações cognitivas*, rede de objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas pessoais que se acionam na implementação de uma configuração epistêmica.

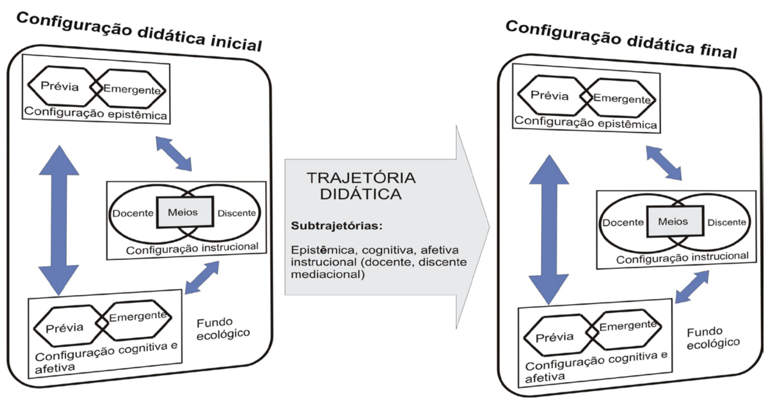

FIGURA 3 – Interações didáticas.

Dimensão normativa

O tema das normas tem sido objeto de investigação em Didática da Matemática, principalmente pelos autores que baseiam seus trabalhos no interacionismo simbólico (BLUMER, 1969), introduzindo noções e padrões de interação, normas sociais e sociomatemáticas (COBB; BAUERSFELD, 1995; YACKEL; COBB, 1996). A noção de contrato didático foi desenvolvida por Brousseau em diversos trabalhos constituindo uma peça chave na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998). Em ambos os casos, trata-se de considerar as normas, hábitos e convenções geralmente implícitas que regulam o funcionamento das classes de matemática, concebida como "microssociedade", que condicionam em maior ou menor medida os conhecimentos que constroem os estudantes. O foco de atenção, nestas aproximações, são principalmente as interações entre professor e estudantes quando abordam o estudo de temas matemáticos específicos.

Pensamos que tanto o "contrato interacionista", como o "brouseauniano", constituem visões parciais do complexo sistema de normas sobre as quais se apoiam – e ao mesmo tempo restringem – a educação em geral e os processos de ensino e aprendizagem da matemática, em particular. Em Godino et al. (2007) se aborda o estudo sistemático e global destas noções teóricas da perspectiva unificada do conhecimento e da instrução matemática que proporciona o EOS, tratando de identificar suas conexões mútuas e complementaridades, assim como o reconhecimento de novos tipos de normas que facilitam a análise dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. A Figura 4 resume os diferentes tipos de normas identificadas no mencionado trabalho.

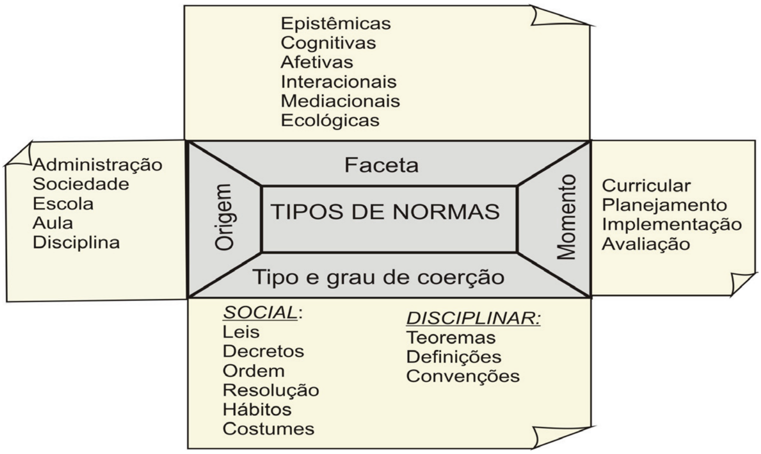

FIGURA 4 – Dimensão normativa. Tipos de normas.

A identificação das diferentes facetas da dimensão normativa (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica) permite:

- Avaliar a pertinência das intervenções dos professores e alunos considerando o conjunto de normas, e sua tipologia, que condicionam o ensino e a aprendizagem.
- Sugerir trocas nos tipos de normas que ajudam a melhorar o funcionamento e controle dos sistemas didáticos, com vistas a uma evolução dos significados pessoais frente aos significadoso institucionais pretendidos.

Critérios de adequação didática

As noções teóricas precedentes complementam-se com a noção de *adequação didática*[16] de um processo de instrução, definido como a articulação coerente e sistêmica das componentes a seguir (GODINO et al., 2006):

- *adequação epistêmica*: se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), com relação ao significado de referência. Por exemplo, o ensino da adição na educação primária pode ser limitado à aprendizagem de rotinas e exercícios de aplicação de algoritmos

[16] Na versão em castelhano, utiliza-se "idoneidad didáctica".

(baixa *adequação*), ou considerar os diferentes tipos de situações aditivas e incluir a justificação dos algoritmos (alta *adequação*);

- *adequação cognitiva*: expressa o grau em que os significados pretendidos/implementados estejam na "zona de desesenvolvimento próximal" (VYGOTSKI, 1934) dos alunos, assim como a proximidade destes significados pessoais atingidos aos significados pretendidos/ implementados. Um processo de ensino e aprendizagem com um alto grau de adequação cognitiva seria alcançado através do estudo das operações aritméticas com números de três ou mais algarismos, de forma que o professor realizasse uma avaliação inicial para saber se a maioria dos alunos dominam as operações com números de um e dois algarismos e, caso contrário, iniciasse o processo de instrução trabalhando com estes números;
- *adequação interacional*: um processo de ensino e aprendizagem terá maior adequação, desde o ponto de vista interacional, se as configurações e trajetórias didáticas permitirem, por uma parte, identificar conflitos semióticos[17] potenciais (que podem ser detectados a *priori*) e, por outra parte, resolver os conflitos que forem produzidos durante o processo de instrução. Por exemplo, um processo de estudo realizado de acordo com uma seqüência de situações de ação, formulação, validação e institucionalização (BROUSSEAU, 1997) tem potencialmente maior adequação semiótica que um processo magistral que não tenha presente as dificuldades dos estudantes;
- *adequação mediacional:* grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, se o professor e os alunos tivessem à sua disposição meios informáticos pertinentes ao estudo do tema em questão (por exemplo o Cabri, para a geometria plana), o processo de estudo com a utilização destes recursos teria potencialmente maior adequação mediacional que outro tradicional, baseado exclusivamente na utilização do quadro, lápis e papel. Nesse sentido, um exemplo de um processo de ensino e aprendizagem com um alto grau de adequação mediadora aos meios temporais, seria uma aula magistral, na qual o professor reproduziria de maneira íntegra e sem interação com os estudantes, o significado pretendido;
- *adequação emocional:* grau de implicação (interesse, motivação, …) do alunado no processo de estudo. A adequação emocional está relacionada com fatores que dependem tanto da instituição quanto basicamente do aluno e de sua história escolar prévia. Por exemplo, terão alta adequação emocional os processos baseados no uso de situações-problemas que sejam de interesse para os estudantes;

[17] Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade se produz entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos do tipo epistêmico, enquanto se a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, nós os designamos como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) interacionais.

- *tvvadequação ecológica:* grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo do centro, à escola, à sociedade e aos condicionamentos do entorno no qual se desenvolve.

Como pudemos deduzir dos exemplos propostos, a adequação de uma dimensão não garante a adequação global do processo de ensino e aprendizagem. Estas devem ser integradas considerando as interações entre as mesmas. Isto requer abordar a *adequação didática* como critério sistêmico de apropriação e pertinência com relação ao projeto educativo global (GODINO et al., 2005). Entretanto, esta adequação deve ser interpretada como relativa às circunstâncias temporais e contextuais instáveis, o que requer uma atitude de reflexão e investigação por parte do professor e demais agentes que compartilham a responsabilidade do projeto educativo.

Consideramos úteis todas estas noções para a análise de projetos e experiências de ensino. Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta adequação em uma das dimensões, por exemplo, a epistêmica, pode requerer uma das capacidades cognitivas que não possuem os estudantes para os quais está direcionado o ensino. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interatuam com as situações-problemas, a linguagem, etc.

Na Figura 5 resumimos os critérios que compõem a adequação didática. Representamos mediante um hexágono regular a adequação correspondente a um processo de estudo pretendido ou programado, no qual, a priori, se supõe um grau máximo das adequações parciais. O hexágono irregular inscrito corresponderia às adequações efetivamente atingidas na realização de um processo de estudo implementado.

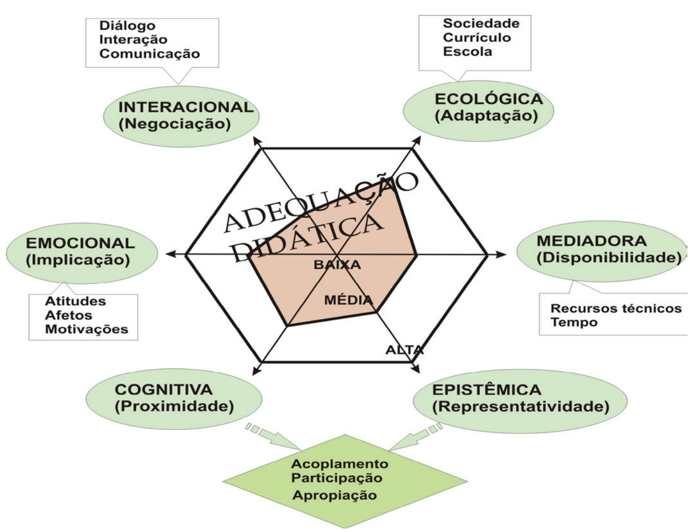

FIGURA 5 – Componentes da adequação didática.

As ferramentas descritas podem ser aplicadas à análise de um processo pontual de estudo implementado numa aula, ao planejamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível global, como pode ser o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Também podem ser úteis para analizar aspectos parciais de um processo de estudo, como um material didático, um livro de texto, respostas dos estudantes a tarefas específicas, ou "incidentes didáticos" pontuais.

Níveis de análise didática dos processos de estudo matemático

O sistema de ferramentas teóricas desenvolvido pelo EOS permitem realizar diferentes tipos de análises dos processos de estudo matemático, contribuindo cada um deles com informações úteis para o planejamento, implementação e avaliação de tais processos. Estas análises são descritas em D'Amore et al. (2007) da seguinte maneira:

1) Análise dos tipos de problemas e sistemas de práticas (significados sistêmicos);
2) Elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos;
3) Análise das trajetórias e interações didáticas;
4) Identificação do sistema de normas e metanormas que condicionam e fazem possível o processo de estudo (dimensão normativa);
5) Avaliação da idoneidade didática do processo de estudo.

Em primeiro nível de análise se orienta a estudar as práticas matemáticas realizadas no processo de estudo analisado. A realização de uma prática é algo complexo que mobiliza diferentes elementos, a saber, um agente (instituição ou pessoa) que realiza a prática, um meio em que se realiza a prática (neste meio pode haver outros agentes, objetos, etc.). Posto que o agente realiza uma seqüência de ações orientadas a resolução de um tipo de situações problemas, é necessário considerar também, entre outros aspectos, fins, intenções, valores, objetos e processos matemáticos.

Em segundo nível de análise se centram os objetos e processos que intervêm na realização das práticas, e também os que emergem delas; sua finalidade é descobrir e descrever a complexidade onto-semiótica das práticas matemáticas como fator explicativo dos conflitos semióticos que se produzem em sua realização.

Considerando que o estudo da matemática é usualmente direcionado por um único professor e com interação entre os aprendizes, a análise didática deveria progredir desde a situação problema e das práticas matemáticas necessárias para sua resolução (análise 1) às configurações de objetos (epistêmicas e cognitivas) e processos matemáticos que possibilitam essas práticas (análise 2) para o estudo das configurações didáticas e para sua articulação em trajetórias didáticas. Tal estudo constitui um terceiro nível, o tipo de análise didática orientada, sobretudo à descrição de padrões de interação e a suposta relação com as aprendizagens dos estudantes (trajetórias cognitivas).

As configurações didáticas e sua articulação em trajetórias didáticas estão condicionadas e com suporte em uma complexa rede de normas e metanormas, (D'AMORE et al., 2007) que não só regulam a dimensão epistêmica dos processos de estudo (níveis 1 e 2 de análises), mas que também regulam outras dimensões dos processos de estudo (cognitiva, afetiva, etc.).

Em quarto nível de análise considerado no EOS pretende-se estudar esta complexa rede de normas e metanormas que dão vsuporte e condicionam os processos de estudo. Este nível é o resultado de considerar os fenômenos de índole social que acontecem nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Os quatro níveis de análise descritos anteriormente são ferramentas para uma didática descritiva – explicativa, quer dizer, servem para compreender e responder a pergunta, que está acontecendo aqui e por quê? Sem dúvida, a Didática da Matemática não deveria limitar-se a uma mera descrição que deixa tudo como estava, mas deveria aspirar à melhora do funcionamento dos processos de estudo. Portanto, são necessários critérios de "idoneidade" ou adequação que permitam avaliar os processos de ensino efetivamente realizados e "guiar" sua melhora. Trata-se de realizar uma ação ou meta-ação para ser mais preciso (a avaliação) que recai sobre outras ações (as ações realizadas nos processos de instrução). Em conseqüência, tem que se considerar a incorporação de uma racionalidade axiológica na educação matemática que permita a análise, a crítica, a justificação da eleição dos meios e dos fins, a justificação da troca, etc.

Em conseqüência, consideramos necessário aplicar um quinto nível de análise aos processos de estudo matemático centrado na avaliação da *idoneidade didática* (GODINO, et al., 2006). Essa análise se baseia nas quatro análises prévias e constitui-se em uma síntese final orientada a identificação de potenciais melhoras do processo de estudo em novas implementações.

COMPARAÇÃO COM OUTROS MODELOS TEÓRICOS

Em Godino et al. (2006) analisamos diversos marcos teóricos usados em didática da matemática desde o ponto de vista do EOS, concretamente analizamos as noções usadas para descrever os fenômenos cognitivos e epistêmicos na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1998), Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990), Dialética Instrumento-Objeto e Jogos de Quadros (DIO-JQ) (DOUADY, 1986), Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1992) e Registros de Representação Semiótica (RRS) (DUVAL, 1995).

Incluimos à continuação uma síntese das principais conclusões obtidas no referido trabalho.

Pressupostos sobre a natureza do conhecimento matemático

Consideramos que a natureza do saber matemático, no sentido de saber "sábio", ou saber na instituição matemática-profissional, não se encontra problematizada nas teorias discutidas. Na TAD, com a noção de praxeologia e sua dependência das instituições, é atribuída uma natureza relativa e plural ao conhecimento matemático como conseqüência da adoção do marco antropológico, porém continua mencionando um "saber sábio" que se traspõe às instituições de ensino, cuja natureza não está explicitada.

É possível compaginar de maneira coerente o relativismo antropológico com a visão platônica usual que atribui um tipo de realidade absoluta e universal ao conhecimento matemático? Em Wilhelmi et al. (no prelo) abordamos esta questão desde o enfoque onto-semiótico analizando, como um exemplo, as diversas definições da noção de igualdade de números reais e os subsistemas de práticas associadas às mesmas. Propomos que cada definição e a configuração de objetos e suas relações constituem um sentido, ou significado parcial, da noção de igualdade de números reais (perspectiva sistêmica), e que, em última instância, o significado matemático da noção, em singular (perspectiva unitária), devemos associá-lo à estrutura formal que descreve os diversos significados parciais. O saber matemático, em particular, é uma emergência do sistema de práticas matemáticas, realizadas no âmbito de uma comunidade de práticas especiais (matemática pura), diante do problema da organização e estruturação dos subsistemas de práticas implementadas em diversos marcos institucionais, contextos de uso e jogos de linguagens.

No EOS a questão do "significado dos objetos matemáticos" é de natureza ontológica e epistemológica, isto é, se refere à natureza e origem dos objetos matemáticos. Num primeiro momento, propusemos uma resposta pragmática /antropológica – significado como sistema de práticas operativas e discursivas – porém, simultaneamente, postulamos a emergência de novos objetos de tais sistemas de práticas que se concretam em regras socialmente conveniadas (e objetos pessoais), os quais serão, a sua vez, conteúdos de novas funções semióticas. Com esta formulação dualista – sistema de práticas e objetos emergentes organizados em redes ou configurações – pretendemos articular os programas epistemológicos (sobre bases antropológicas) e cognitivos (sobre bases semióticas).

As visões pragmática e realista sobre o significado geralmente apresentam-se como contrapostas. Entretanto, Ullman (1962) apresenta as teorias do tipo pragmático (que denomina operacionais ou contextuais) como um complemento válido das teorias do tipo realista (que denomina referenciais).

> Não existe atalho algum para o significado mediante a introspecção ou qualquer outro método. O investigador deve começar pela reunião de uma amostra adequada de contextos e abordá-la logo com um espírito aberto, permitindo que o significado ou os significados emerjam dos próprios contextos. Uma vez que esteja concluída esta fase, é possível passar com segurança à fase "referencial" e procurar formular o significado ou os significados assim identificados. A relação entre os dois métodos, ou melhor, entre as duas fases da indagação é, certamente, a mesma que existe entre a língua e a fala: a teoria operacional trata do significado na fala; a referencial, do

> significado na língua. Não há, absolutamente, necessidade de colocar os dois modos de acesso um diante do outro: cada um conduz seu próprio lado do problema e nenhum é completo sem o outro. (ULLMAN, 1962, p.76-77)

Esta observação de Ullmann serve de apoio para o modelo de significado dos objetos matemáticos propostos pelo EOS. O significado começa sendo pragmático, relativo ao contexto, entretanto existem tipos de usos referenciais.

No EOS, de acordo com a visão antropológica sustentada por Wittgenstein (BLOOR, 1983), os componentes teóricos do conhecimento matemático (conceitos, teoremas) são interpretados como regras gramaticais para a manipulação das expressões usadas para descrever o mundo de objetos e situações extra ou intra-matemáticas[18].

Relatividade ontossemiótica pessoal, institucional e contextual

As teorias analisadas atribuem um peso muito diferente ao aspecto pessoal e institucional do conhecimento matemático e à sua dependência contextual. No EOS postulamos que os sistemas de práticas, os objetos emergentes e as configurações mediante as quais se expressam são relativos aos contextos de uso, às instituições onde serão realizadas tais práticas e aos sujeitos implicados nas mesmas (jogos de linguagem e formas de vida, WITTGENSTEIN, 1953).

A descrição dos conhecimentos de um sujeito individual sobre um objeto O pode ser realizada de uma maneira global com a noção de “sistemas de práticas pessoais”. Se neste sistema de práticas distinguimos entre as que têm uma natureza operatória ou procedimental diante de um tipo de situações-problemas com relação às discursivas, obtemos um construto que guarda uma estreita relação com a noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999), sempre que atribuamos à referida noção uma dimensão pessoal, além da correspondente faceta institucional. Desta forma, também pode ser incorporada a dualidade “instrumento-objeto”, que propõe Douady, para os conceitos matemáticos.

Os modos de “fazehhr e de dizer” relativos a um tipo de problemas que colocam em jogo, por exemplo, o “objeto função” propomos como resposta à pergunta “que significa o objeto função?” para um sujeito (ou uma instituição). Esta modelagem semiótica do conhecimento permite interpretar a noção de esquema, como configuração cognitiva, associada a um subsistema de práticas relativas a uma classe de situações ou contextos de uso e as noções de conceito-em-ato, teorema-em-ato e concepção como componentes parciais (intencionais) constituintes das referidas configurações cognitivas.

No EOS, a noção de concepção é interpretada mediante o par (sistema de práticas pessoais, configuração cognitiva) para romper com a tendência mentalista atribuída

[18] Esta é a maneira através da qual são concebidos os conceitos e teoremas na filosofia da matemática de Wittgenstein (BAKER; HACKER, 1985).

à cognição. Em termos semióticos, quando questionamo-nos sobre o significado de "concepção" de um sujeito sobre um objeto O (ou sustentada no âmbito de uma instituição), atribuímos como conteúdo "o sistema de práticas operativas e discursivas que esse sujeito manifesta, nas quais se coloca em jogo o referido objeto". Este sistema é relativo a umas circunstâncias e momento dado e é descrito através da rede de objetos e relações que se colocam em jogo (*configuração cognitiva*).

Neste sentido, a compreensão e o conhecimento são concebidos em sua dupla face pessoal-institucional, envolvendo, portanto, os sistemas de práticas operativas e discursivas relativos a determinados tipos de tarefas problemáticas. A aprendizagem de um objeto O por um sujeito é interpretada como a apropriação dos significados institucionais de O por parte do sujeito; se produz mediante a negociação, o diálogo e o acoplamento progressivo de significados.

Quando o significado de um objeto matemático é considerado em termos de práticas, tal como está proposto no enfoque onto-semiótico, é possível distinguir entre *sentido* e *significado*. Entendemos *sentido* como um *significado parcial*. O significado de um objeto matemático, entendido como conjunto de práticas, pode ser decomposto em diferentes classes de práticas mais específicas que são utilizadas num determinado contexto (que ativará uma determinada configuração). Cada contexto ajuda a produzir sentido (permite gerar um subconjunto de práticas), entretanto não gera todos os sentidos.

A noção de representação e registro semiótico usadas por Duval e outros autores aludem, segundo nosso modelo, a um tipo particular de função semiótica representacional entre objetos ostensivos e objetos mentais (não ostensivos). A noção de função semiótica generaliza essa correspondência a qualquer tipo de objetos (e,) além disso, contempla outros tipos de dependências entre objetos.

O uso da noção de sentido na Teoria das Situações Didáticas (TSD) fica restrito à correspondência entre um objeto matemático e à classe de situações da qual emerge e que lhe dá sentido (podemos descrevê-lo como "significado situacional"). Segundo o EOS, essa correspondência é, sem dúvida, crucial ao aportar a razão de ser de tal objeto, sua justificação ou origem fenomenológica; também consideramos as correspondências ou funções semióticas entre esse objeto e os demais componentes operativos e discursivos do sistema de práticas dos quais consideramos o objeto sobrevém, entendido em termos cognitivos ou epistêmicos.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) estende a noção de significado como "resposta a uma situação dada" introduzida na Teoria das Situações Didáticas. Essa extensão supõe a inclusão, além do componente situacional, de elementos procedimentais (esquemas) e discursivos (conceitos e teoremas em ato), relacionando, também, o significado com a noção de *modelo implícito*.

O conteúdo considerado "significado de um objeto matemático para um sujeito" na TCC é praticamente a globalidade holística que nós descrevemos como "sistema de práticas pessoais". Entretanto, nossa noção de função semiótica e a ontologia matemática associada proporciona um instrumento mais genérico e flexível para a análise didática-matemática.

Níveis de análise da cognição matemática

A didática deve identificar além dos fenômenos relativos à ecologia dos saberes matemáticos (objetivo principal da TAD), ou os correspondentes ao desenho e implementação de engenharias didáticas (objetivo principal da TSD), os fenômenos relativos à aprendizagem dos alunos. Em última instância, os esforços dos professores e investigadores convergem no objetivo de conseguir que os estudantes aprendam, isto é, que se apropriem dos conhecimentos matemáticos que lhes permitam desenvolver-se na sociedade e, em alguns casos, contribuam ao desenvolvimento de novos conhecimentos. A abordagem de questões como: por que os alunos têm dificuldades para resolver este tipo de tarefas? É adequada esta tarefa, este discurso matemático, para estes alunos sob determinadas circunstâncias? ... Supõe um nível "microscópico" de análise dos fenômenos cognitivos e didáticos e requer usar noções teóricas e metodológicas específicas.

As noções de esquema, conceitos e teoremas em atos, que propõem a TCC e a RRS estão orientadas nessa direção. A questão então seria: estas noções são suficientes para este aspecto do trabalho didático?

Consideramos que a noção de "configuração cognitiva" que propõe o EOS, com sua divisão em entidades situacionais, lingüísticas, procedimentais, conceituais, proposicionais e argumentativas permitem uma análise mais detalhada da aprendizagem Matemática dos estudantes. Em sua versão epistêmica, permite, também, realizar análises microscópicas dos objetos matemáticos, caracterizar sua complexidade ontossemiótica e aportar explicações das aprendizagens em função da referida complexidade.

O EOS permite estudar os fatos e fenômenos a nível microscópico, inclusive fenômenos que podem ser qualificados como singulares. Que ocorre aqui e agora? Por que ocorre? O que aprende, ou deixa de aprender, este aluno nestas circunstâncias? Aportar respostas a estas questões pode ser um primeiro passo para elaborar hipóteses referidas a outros alunos e circunstâncias. Para realizar este tipo de análise, o EOS introduz as dualidades cognitivas: elementar-sistêmica; ostensiva – não ostensiva; extensiva-intensiva; expressão-conteúdo (função semiótica).

Por outra parte, as noções de sistema de práticas (praxeologia ou organização matemática), instituições, marcos e contextos de uso, ecologia de significados são noções apropriadas para realizar análise do tipo macroscópico (curricular, instrucional).

A noção de *conflito semiótico*, qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições) em interação comunicativa, é também útil para a realização tanto de análise de nível macro como microdidática na produção e comunicação matemática.

EXEMPLOS DE INVESTIGAÇÕES

Trataremos de descrever sinteticamente dois exemplos de investigações realizadas no marco do EOS. Outros exemplos de investigações experimentais realizadas desde a perspectiva ontossemiótica, publicadas em diversas teses de doutorado, artigos e monografias, estão acessíveis na página web do Grupo de Investigação de Teoria da Educação Matemática e Educação Estatística da Universidade de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino; http://www.ugr.es/local/batanero, assim como na página web de V. Font: http://www.webpersonal.net/vfont/RDMfinal.pdf.

Caracterização do raciocínio combinatório elementar

No artigo de Godino, Batanero e Roa (2005), publicado na *Educational Studies in Mathematics* (volume 60, nº 1: 3-36), descrevemos as principais noções teóricas do EOS com exemplos relativos ao campo de problemas de combinatória elementar e analisamos as respostas dadas a um problema de combinatória por quatro estudantes que cursavam o último ano da licenciatura em matemática.

Os tipos de objetos matemáticos (problemas, linguagem...), e as facetas cognitivas (extensivo-intensivo, ostensivo-não ostensivo...) são usadas para desenvolver a técnica de análise ontossemiótica que permite caracterizar os significados institucionais (respostas aos problemas elaboradas do ponto de vista de *experts*) e os significados pessoais dos estudantes.

Nesse artigo, utilizamos dados da tese doutoral de Roa (2000), correspondentes às respostas de quatro sujeitos a um dos problemas propostos. Na investigação, foi aplicado um questionário formado por 13 problemas combinatórios elementares (11 problemas que colocam em jogo apenas uma operação combinatória e 2 problemas compostos, nos quais intervinham duas operações). Este questionário foi aplicado para uma amostra de 90 estudantes com preparação matemática avançada e, em sua análise, foram aplicadas técnicas quantitativas e qualitativas (estudo de casos mediante entrevistas).

A análise realizada permitiu identificar os conhecimentos colocados em jogo, correta ou incorretamente, pelos alunos na resolução do seguinte problema:

Um menino tem quatro carrinhos de cores diferentes (Azul, Branco, Verde e Vermelho) e decide repartí-los para seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes pode repartir os carrinhos para seus irmãos? Exemplo: Poderia dar os quatro carrinhos ao seu irmão Luis.

Os resultados evidenciaram a complexidade da tarefa de resolução deste problema, aparentemente simples, assim como a diversidade entre os quatro alunos, o que reflete uma variedade do significado (sistêmico) da combinatória elementar para os mesmos. No processo de resolução foram produzidos conflitos semióticos que levaram ao erro, devido à disparidade entre o modelo de seleção em que estes alunos aprenderam as definições combinatórias e as diversas situações (como, por exemplo, num problema de partição) em que devem ser aplicadas as referidas definições.

Da análise dos protocolos de resolução deste problema pelos quatro alunos, inferimos que a atividade de resolução dos problemas requer uma diversidade de objetos matemáticos; que variam de um aluno para outro. Ainda que, devido às restrições de espaço, o artigo inclui somente a análise de um problema. Mas este mesmo processo foi repetido com os outros 12 problemas, revelando a pluralidade de conhecimentos usados pelos alunos nas suas soluções, que para cada um deles constitui o *significado pessoal* (sistêmico) da combinatória elementar.

O problema do ensino e aprendizagem da derivada

Descreveremos a investigação realizada na tese doutoral de V. Font, no marco teórico do enfoque onto-semiótico, sobre questões relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem da derivada por estudantes do Ensino Secundário (16-17 anos). Usaremos como referência acessível o artigo publicado na *Recherches en Didactique des Mathématics,* (CONTRERAS et al., 2005), com o título: "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal".

Neste trabalho foi usada a noção de "significado institucional", entendido como sistema de práticas, para desenhar, implementar e analisar uma experiência de estudo da derivada, distinguindo-se quatro tipos de significados sistêmicos: de referência, pretendido, implementado e avaliado. Também foram recolhidas informações detalhadas das práticas pessoais dos estudantes, que permitem caracterizar seus significados pessoais iniciais, finais e alguns aspectos de sua construção progressiva.

Entre as conclusões sobre o desenvolvimento e análise da experiência de ensino, destacam-se as seguintes:

a consideração conjunta da complexidade semiótica, os conflitos semióticos potenciais e a necessidade de atividades que partam dos conhecimentos prévios dos alunos, levam a propor significados pretendidos que se concretizam em unidades didáticas cuja implementação necessita de muitos recursos temporais. Por este motivo, torna-se difícil fazê-las compatíveis com as restrições materiais e temporais reais;

o significado pessoal de objetos que se supunha haver sido estudado previamente pelos alunos (função, variação de uma função, inclinação, taxa média de variação, velocidade, etc.) era insuficiente. Disso se deduz que uma boa maneira de assegurar que os alunos adquiram um bom significado pessoal do objeto derivada consiste em conseguir um bom significado pessoal dos referidos objetos prévios;

a definição da função derivada como limite das taxas médias de variação apresenta uma grande complexidade semiótica;

o fato de desenhar um significado pretendido que incorporava práticas que permitiam calcular a expressão simbólica de funções derivadas a partir de gráficos (de $f(x)$ ou de $f'(x)$) modificou os significados dos objetos pessoais "funções elementares" dos alunos. Ao finalizar o processo de estudo, o significado pessoal da maioria dos alunos incorporava práticas que permitiam obter expressões simbólicas de funções elementares a partir de seus gráficos. Estas práticas não formavam parte do significado de seus objetos pessoais "funções elementares" antes do processo de instrução, nem haviam sido explicitamente contempladas no desenho prévio do significado pretendido.

A noção de função semiótica, junto com as dualidades cognitivas extensivo-intensivo, expressão-conteúdo, são utilizadas de maneira sistemática para analisar a complexidade ontossemiótica da definição de derivada num ponto e função derivada. Esta análise permite identificar conflitos semióticos potenciais, que são contemplados no desenho da experiência, e como explicação de algumas dificuldades persistentes na compreensão das referidas noções.

REFLEXÕES FINAIS

Concebemos as teorias como instrumentos que permitem definir os problemas de investigação, assim como uma estratégia metodológica para sua abordagem. O sistema de noções teóricas e metodológicas que necessitamos elaborar, para caracterizar os fenômenos didáticos, deverá permitir diferentes níveis de análise das diversas dimensões ou facetas implicadas nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Este sistema não pode ser elaborado com a simples agregação de elementos teóricos e metodológicos de distintos enfoques disponíveis. Será necessário elaborar outros mais eficazes, enriquecendo-se algumas noções já elaboradas, evitando redundâncias e conservando uma consistência global. Devemos incluir neste sistema as noções teóricas e metodológicas "necessárias e suficientes" para investigar a complexidade dos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

O EOS vem crescendo como marco teórico para a Didática da Matemática impulsionado por problemas relacionados (com o) ao ensino e (a) à aprendizagem da Matemática e a aspiração de articular as diversas dimensões e perspectivas implicadas. Esse trabalho de articulação não pode ser realizado mediante a superposição de ferramentas de distinta procedência. Steiner (1990) situa a área Educação Matemática no centro de um sistema social, heterogêneo e complexo – o Sistema de Ensino da Matemática – e menciona como ciências referenciais para nossa área a própria Matemática, a Epistemologia, Psicologia, Pedagogia, Sociologia, Lingüística, entre outras. Cada uma dessas áreas se ocupa de aspectos parciais dos problemas que planifica o ensino e a aprendizagem da Matemática, usando para isso as próprias ferramentas conceituais e metodológicas.

O ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia dos objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática como atividade de resolução de problemas, socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado, além de considerar a dimensão cognitiva individual.

Consideramos que o EOS pode ajudar na comparação dos marcos teóricos usados na Didática da Matemática e, em determinada medida, na superação de algumas de suas limitações para as análises da cognição e instrução Matemática. Em princípio, trata-se de uma expectativa baseada na generalidade com a qual se definem, no EOS, as noções de problema matemático, prática matemática, instituição, objeto matemático, função semiótica e as dualidades cognitivas (pessoa-instituição; elementar-sistêmico; ostensivo-não ostensivo; extensivo-intensivo; expressão-conteúdo). Essas noções nos permitem estabelecer conexões coerentes entre os programas epistemológicos e cognitivos sobre bases que descrevemos como ontossemióticas.

O papel central dado no EOS à *prática* matemática (em sua versão institucional, isto é, relativa a jogos de linguagem e formas de vida) e às características que são atribuídas a esta noção (ação compartilhada, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos e materiais) permite, em nossa opinião, uma articulação coerente com outras posições teóricas, como o construtivismo social (ERNEST, 1998), a socioepistemologia (CANTORAL;. FARFÁN, 2003) e, em geral, as perspectivas etnomatemáticas e socioculturais em Educação Matemática (ATWEH et al., 2001).

RECONHECIMENTO

Trabalho realizado no marco do projeto SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER, Ministério de Ciência e Tecnologia, Plano Nacional de Investigação Científica, Desenvolvimento e Inovação Tecnológica. Madrid.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, M.; SÁENZ-LUDLOW, A.; ZELLWEGER, S.; CIFARELLI, V. C. (Ed.). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing.* Otawa: Legas, 2003.

ATWEH, B.; FORGASZ, H.; NEBRES, B. *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum, 2001.

AUSTIN, J. L., *Cómo hacer cosas con palabras: palabras y acciones.* Barcelona: Paidós, 1982.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations*. Glasgow: Basil Blackwell, 1985.

BLOOR, D. *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press, 1983.

BLUMER, H. *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

BROUSSEAU, G. *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

CANTORAL, R.; E FARFÁN, R. M. Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1), p.27-40, 2003.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), p.73-112, 1992.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), p.221-266, 1999.

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Ed.) *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDOÑEZ, L. Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), p.151–186, 2005.

D'AMORE, B. Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" en una teoría "realista" "versus" el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27 ; p.51-76, 2001.

D'AMORE, B. ; FONT, V. ; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a, v.XXVIII, n.2, 49-77, 2007.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), p.5-31, 1986.

DUVAL, R. *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang, 1995.

ECO, U. *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1995.

ERNEST, P. Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, p.1-14, 1994.

______. *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY, 1998.

FAERNA, A. M. *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI, 1996.

FONT, V. Processos mentals versus competència, Biaix 19, p.33-36, 2001.

______. Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Revista EMA, 7 (2), p.127-170, 2002.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1): p.7-33, 1998.

GODINO, J. D. Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: PUIG, L.; GUTIERREZ, A. (Ed.), CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20, 1996, Valencia, *Proceedings...* Valencia: Universidad de Valencia, 1996.

______. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 22 (2/3): p.237-284, 2002.

______. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada, 2003. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm>. Acesso em: 20 mar. 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): p.325-355, 1994.

______. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Ed.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Dordrecht: Kluwer, A. P., 1998, p.177-195.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* Vol. 39 (1-2): p.127-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R. An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1): p.3-36, 2005.
GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), p.39-88, 2006.
GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; CASTRO, C. de. Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. Conferencia especial invitada en la *21 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME)*, Maracaibo, 2007.
GODINO, J. D.; RECIO, A. M. A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En: OLIVIER, A.; NEWSTEAD, Y. K. (Ed.), CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 1998, South Africa. *Proceedings...* University of Stellenbosch: South Africa, 1998.
HJELMSLEV, L. *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.
LAKATOS, I. *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza, 1983.
LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books, 2000.
OTTE, M. Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134: p.181-216, 2003.
PEIRCE, C. S. *Collected Papers,* vols. 1-8. In: HARTSHORNE, C.; WEISS, P.; BURKS, A. W. (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1958.
PEIRCE, CH. S. *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1965.
RADFORD, L. The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematicas*, 61 (1-2): p.39-65, 2006.
SÁENZ-LUDLOW, A; PRESMEG, N. Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* 61 (1-2): p.1-10, 2006.
SAUSSURE, F. *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1915.
SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22: p.1-36, 1991.
______. Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En: COBB, P.; YACKEL, E.; MCCAIN, K. (Ed.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom*. London: LEA, p.37- 97, 2000.
SIERPINSKA, A. E LERMAN, S. Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En BISHOP, A. J. et al. (Ed..), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer A. P., p.827-876, 1996.
STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2): p.133-162, 2006.

STEINER, H. G. *Theory of mathematics education (TME). ICME 5*. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1984.

______. Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, v.5. n.2, p.11-17, 1985.

ULLMANN, S. *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar, 1962.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2,3), p.133-170, 1990.

WILHELMI, M. R.; LACASTA, E.; GODINO, J. D. Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques* (no prelo).

WITTGENSTEIN, L. *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica, 1953.

YACKEL, E. E COBB, P. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), p.458-477, 1996.