ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LAS REPRESENTACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Vicenç Font, *Universidad de Barcelona*

Juan D. Godino, *Universidad de Granada*

Bruno D'Amore, *Universidad de Bolonia*

Resumen: *La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado la importancia que tienen las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje así como la gran complejidad de factores relacionados con ellas. En particular, una de las cuestiones centrales abiertas que el uso de las representaciones plantea es el de la naturaleza y diversidad de objetos que desempeñan el papel de representación y de los objetos representados. El objetivo de este artículo es mostrar cómo la noción de función semiótica y la ontología matemática elaborada por el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático permiten afrontar dicho problema, generalizando la noción de representación e integrando diversas nociones teóricas usadas para describir la cognición matemática.*

Abstract: *Research in didactics of mathematics has shown the importance that representations have in teaching and learning processes as well as the complexity of factors related to them. Particularly, one of the central open questions that the use of representations poses is the nature and diversity of objects that carry out the role of representation and of the objects represented. The objective of this article is to show how the notion of semiotic function and mathematics ontology elaborated by the ontosemiotic approach of mathematics knowledge, enables us to face such a problem, by generalizing the notion of representation and by integrating different theoretical notions used to describe mathematics cognition.*

KEY WORDS: external and internal representations, mathematical objects, meaning, understanding, semiotics

1. IMPORTANCIA Y COMPLEJIDAD DE LAS REPRESENTACIONES EN LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La gran cantidad de publicaciones sobre el tema de las representaciones, al cual se han dedicado reuniones científicas específicas, monografías, conferencias y artículos de revistas (Janvier, 1987; Goldin, 1998; Cobb, Yackel y McClain, 2000; Golding, 2002; Hitt, 2002; .....), muestra la importancia del mismo para la educación matemática, y al mismo tiempo su complejidad. La razón de este interés debemos encontrarla en el hecho de que hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc. Sin duda, estas nociones constituye el núcleo central, no sólo de nuestra disciplina, sino también de la epistemología, psicología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo. Esta diversidad de disciplinas interesadas por la representación es la razón de la diversidad de enfoques y maneras de concebirla.

La complejidad implicada en el uso de las representaciones es patente en la siguiente cita de Goldin y Janvier (1998, p. 1), para quienes el término 'representación' y la expresión 'sistema de representación', en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tiene las siguientes interpretaciones:

[1] Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2): 2 -7.

"1. An external, structured physical situation, or structured set of situations in the physical environment, that can be described mathematically or seen as embodying mathematical ideas;

2. A linguistic embodiment, or a system of language, where a problem is posed or mathematics is discussed, with emphasis on syntactic and semantic structural characteristics;

3. A formal mathematical construct, or a system of construct, that can represent situations through symbols or through a system of symbols, usually obeying certain axioms or conforming to precise definitions – including mathematical constructs that may represent aspects of other mathematical constructs;

4. An internal, individual cognitive configuration, or a complex system of such configurations, inferred from behaviour or introspection, describing some aspects of the processes of mathematical thinking and problem solving".

Estos diversos usos de la noción de representación muestran los distintos componentes y facetas implicadas en la actividad matemática, las situaciones en las cuales se desarrolla, el lenguaje y los objetos personales y culturales emergentes de dicha actividad. En nuestra opinión, la complejidad del tema, la ambigüedad de las representaciones y su importancia están en los objetos matemáticos que se trata de representar, su diversidad y naturaleza. Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático, y por tanto, de la actividad matemática, sus "producciones" culturales y cognitivas, así como de las relaciones con el mundo que nos rodea.

La representación se caracteriza mediante una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador, *"that deliberately pays no attention to what kinds of things are involved in the correspondence"* (Kaput, 1998, p. 266). Nos parece necesario decir qué se está representando y de qué manera, ya que esta falta de explicitación puede implicar sesgos en el estilo de descripción y la adopción de hipótesis sobre lo que es cognoscible y los modos de conocer. Una respuesta "ingenua" que suele darse a este problema es decir que se representan conceptos matemáticos. Pero, ¿qué son los conceptos matemáticos? Además, los conceptos no son los únicos constituyente del conocimiento matemático: encontramos también, problemas, notaciones, procedimientos, proposiciones, argumentaciones; sistemas o estructuras matemáticas, teorías. Todos estas "cosas" a las cuales nos referimos son "objetos matemáticos" (intervienen en la actividad matemática) y también tienen que ser representados y comprendidos. Incluso hasta las propias "representaciones materiales" son con frecuencia representadas unas por otras. Un aspecto que incrementa la dificultad del problema es que con frecuencia nos referimos con el mismo término a cosas diversas. Con la expresión "número real", por ejemplo, nos referimos tanto a un concepto (regla que permite el reconocimiento del objeto) como a toda una estructura o sistema matemático.

En este trabajo abordaremos el "problema ontológico" de las representaciones y otras cuestiones relacionadas desde el planteamiento holístico que propone el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa). La noción de función semiótica, junto con la ontología pragmático-referencial que propone este enfoque teórico, generaliza y clarifica de manera radical la noción de representación y proporciona una solución al mencionado problema ontológico. En concreto, vamos a abordar los siguientes aspectos problemáticos de las representaciones:

1. La naturaleza de los objetos que intervienen en la representaciones.
2. La distinción entre representaciones internas y externas.
3. El problema de la representación del elemento genérico.

4. El papel que desempeñan las representaciones de un mismo objeto.
5. Procesos de comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones.

Para ello, hemos organizado el artículo en las siguientes secciones:

- En esta primera sección se plantea el problema y los objetivos del artículo.
- En la segunda presentamos brevemente el marco teórico del enfoque ontosemiótico mostrando la solución que propone al problema ontológico de la representación y significación.
- En la sección tercera estudiamos la problemática que presenta la clasificación de las representaciones en internas y externas.
- En la sección cuarta reflexionamos sobre el papel del "elemento genérico" en matemáticas y su relación con las representaciones.
- En la sección quinta estudiamos el problema de considerar que hay un mismo objeto matemático que tiene múltiples representaciones diferentes.
- En la sección sexta se reflexiona sobre el problema de la comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones.
- Por último, en la sección séptima presentamos una síntesis de la respuesta dada por el enfoque ontosemiótico a las cuestiones planteadas y terminamos con unas conclusiones generales.

En el Anexo presentamos un episodio de clase que vamos a utilizar como contexto de reflexión y para mostrar el tipo de aplicación que hacemos al tema de las representaciones de los constructos teóricos elaborados por el enfoque ontosemiótico. Se trata de las respuestas dadas por cuatro estudiantes de secundaria (17 años) a un item de un cuestionario propuesto en el proceso de estudio de la derivada.

2. EL PROBLEMA ONTOLÓGICO DE LAS REPRESENTACIONES Y DEL SIGNIFICADO

El uso de los términos "representación" y "significación" se realiza en circunstancias en las cuales una entidad, frecuentemente de tipo lingüístico, se pone en relación con otra. Este uso se asemeja, por una parte al que se hace en matemáticas cuando se define una función entre objetos matemáticos (correspondencia), y por otra al uso que se hace en ecología, cuando un "objeto" cumple o desempeña un papel.

Este aspecto relacional de la representación y significación no parece nada conflictivo. El problema surge cuando nos interesamos por los tipos de objetos que se relacionan, los criterios de correspondencia y la finalidad con la que se establecen las relaciones. El conflicto surge cuando junto al lenguaje y los objetos del mundo que nos rodea se ponen en juego entidades no ostensivas que solemos designar como conceptos, nociones, ideas, abstracciones, ...; además, resulta que estas entidades están siempre presentes en nuestra mente y en cualquier acto comunicativo.

Una aportación clarificadora fue intentada por Vergnaud (1990) quien unifica en la noción de concepto su misma componente constructiva. Para Vergnaud el punto decisivo en la conceptualización es el paso de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la nominalización; este autor entiende por "conceptualización" precisamente esta "apropiación consciente" al proponer como definición de un concepto la tripleta (S, I, *S*), donde S es el referente, I el significado y *S* el significante. La idea de Vergnaud podría ser considerada como una posible conclusión de una línea "clásica", la que pasa a través de los tres famosos "triángulos" (D'Amore, 1999):

- El triángulo de Peirce (1983): intérprete, representante, objeto.
- El triángulo de Frege (1892): Sinn [sentido], Zeichen [expresión], Bedeutung [referencia]
- El triángulo de Ogden y Richards (1923): referencia, símbolo, referente.

Steinbring (1997) aporta también una interpretación clarificadora del triángulo epistemológico al proponer que "los significados de los conceptos matemáticos emerge en el juego entre los sistemas de signos /símbolos y los contextos de referencia o dominios de los objetos" (p. 50).

Cada una de estas propuestas se puede ver como la descripción de la relación entre un lenguaje que "describe un mundo" y "los objetos (conceptuales) del mundo". Si uno de estos mundos es la matemática, la cosa se complica porque en la matemática encontramos objetos de diversa naturaleza:

- Objetos que "componen" el mundo –el mundo matemático- y que son representados mediante sistemas de signos (punto, número, plano, ...)
- Objetos que ponen en relación los objetos de dicho mundo (relaciones, como la igualdad; operaciones, como los algoritmos, ...)
- Objetos que describen la presencia de los objetos anteriores en situaciones más complejas que caracterizan el mundo matemático (problemas, demostraciones, ...)

En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1998; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, en prensa; Godino, Batanero y Roa, en prensa) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática, por el papel central que asignan al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos intervinientes. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas utilizaremos la expresión "enfoque ontosemiótico" (EOS)[2]

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática se ha afrontado el problema de la significación y representación mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológico (Bloor, 1983; Chevallard, 1992), semióticos y socioculturales (Sfard, 2000; Radford, 2003; Ernest, 1998). Esto supone asumir una cierta relatividad socioepistémica para el conocimiento matemático ya que el conocimiento se considera ligado indisolublemente a la actividad en la cual el sujeto se implica y es dependiente de la institución cultural y contexto social del que forma parte (Radford, 1997). Atribuimos un papel esencial al lenguaje, en su doble valencia representacional e instrumental, en la constitución misma de los objetos matemáticos. La propia actividad discursiva matemática, incluyendo su continua producción de símbolos, "creates the need for mathematical objects; and these are mathematical objects (or rather the object-mediated use of symbols) that, in turn, influence the discourse and push it into new directions" (Sfard, 2000, p. 47).

En consecuencia, y en consonancia con la propuesta del interaccionismo simbólico (Blumer, 1969) adoptamos una concepción de *objeto* radicalmente más general y comprometida que la definición dada por Aristóteles en su *Metafísica*. Para nosotros, "objeto matemático" es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Aristóteles (en *Metafísica*) define la "cosa", en cuanto parte de lo real, atribuyéndole tres características: (1) tridimensionalidad, (2) accesibilidad sensorial múltiple, (3) posibilidad de separación material de otras partes de la realidad, de otras "cosas".

[2] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

A continuación vamos a sintetizar la ontología que se propone en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

2.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1998). En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, ¿Qué es el objeto matemático media aritmética?, ¿qué significa o representa la expresión "media aritmética"?, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos".

Las instituciones son concebidas como "comunidades de prácticas" e incluyen las clases y niveles escolares, grupos étnicos, etc. Las prácticas matemáticas son realizadas por las personas, bien individualmente, o de manera compartida en el seno de instituciones con el soporte y condicionamiento de un trasfondo ecológico de naturaleza material, biológica y sociocultural.

2.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones)[3]. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como "objetos personales".

En el Anexo podemos observar que los estudiantes comparten algunas prácticas como resultado de la enseñanza (usan la propiedad de que todas las subtangentes de la función exponencial son iguales a 1); pero también existen diferencias en otras prácticas (uso de representaciones gráficas o no, simbolismos diferentes, etc.). A partir del sistema de prácticas realizadas en la clase emergen nuevos objetos: la derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$; la justificación de esta proposición es otro objeto emergente que puede ser diferente de la prueba dada en la universidad, o incluso por diferentes estudiantes.

2.3. Relaciones entre objetos: Función semiótica

Se adopta de Hjemslev (1943) la noción de función de signo[4] como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido o significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden

---

[3] La noción de objeto matemático conceptual es similar a la propuesta en la semiótica cultural de Radford (2006): "… mathematical objects are conceptual forms of historically, socially, and culturally embodied, reflective, mediated activity" (p. 59). Sin embargo, en el "enfoque ontosemiótico" proponemos un rango más amplio de objetos matemáticos, no restringidos a las entidades conceptuales.

[4] Descrita por Eco (1979), como *función semiótica.*

ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Para nosotros, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos), pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas[5].

En el ejemplo del Anexo hay una red de funciones semióticas representacionales: la función exponencial es designada mediante un simbolismo gráfico y algebraico; los conceptos de tangente, subtangente, derivada, etc., son también representados por palabras y símbolos. Sin embargo, como explicaremos en las secciones 3 y 4, las nociones generales de función y derivada son representadas por ejemplos particulares de la función exponencial y su derivada, respectivamente. La representación gráfica se usa también como una herramienta para desarrollar una "demostración" de la propiedad de que todas las subtantentes son iguales a 1.

2.4. Configuraciones de objetos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión personal e institucional.

2.5. Dualidades cognitivas

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En Godino, Batanero y Roa (2006) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

[5] «Signo es cualquier cosa que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así ad infinitum » (CP 2.303).

Los tipos de objetos descritos, sintetizados en la figura 1, (sistemas de prácticas, entidades emergentes, configuraciones o redes ontosemióticas, las dualidades cognitivas o atributos contextuales, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional básica) constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático.

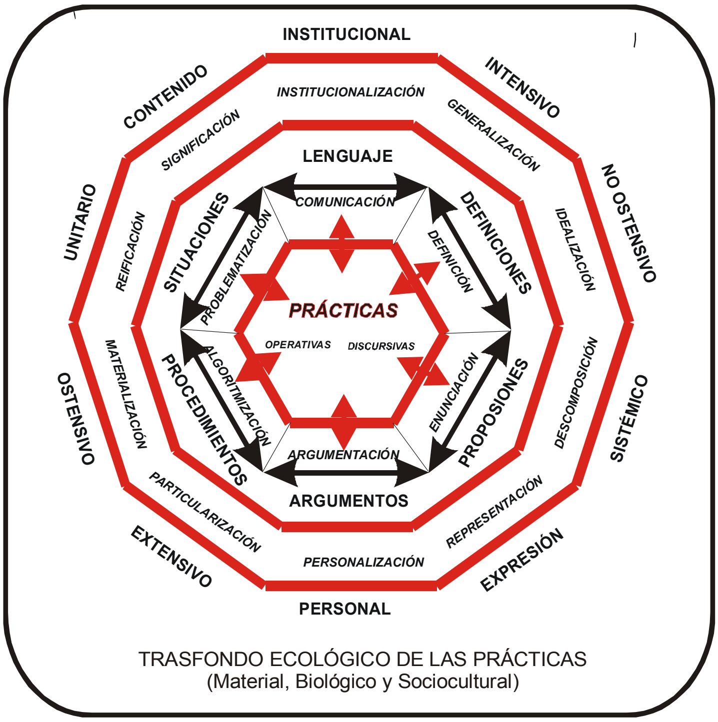


Figura 1: Ontosemiótica del conocimiento matemático

En los apartados siguientes mostraremos cómo las cinco dimensiones o dualidades cognitivas, junto con los otros instrumentos teóricos elaborados por el enfoque onto-semiótico, en particular la noción de función semiótica, permiten afrontar la complejidad que la investigación sobre las representaciones requiere. Además, trataremos de relacionar dichas facetas con distintos aspectos problemáticos de las representaciones abordados por otros autores.

3. EL PROBLEMA DE LA CLASIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES EN INTERNAS Y EXTERNAS

En los diferentes programas de investigación en didáctica de las matemáticas podemos encontrar, entre otros, dos usos del término representación. Por una parte, se usa este término para describir la cognición de las personas en cuyo caso suele ir acompañado del término "mental" o "interna". Por otra parte, es normal utilizar el término representación para referirnos a los sistemas de signos públicos (ostensivos) que son las herramientas indispensables para la actividad matemática. Cuando el término "representación" se utiliza con este objetivo suele ir acompañado del término "externa".

En el ejemplo descrito en el Anexo es evidente que, por una parte, hay representaciones que la literatura describe como externas (gráficas, expresiones simbólicas, etc.). Por otra parte, la diferencia entre las respuestas de los alumnos permite suponer la existencia de representaciones, consideradas normalmente como internas, que están relacionadas con las distintas respuestas de cada alumno.

Esta primera clasificación en representaciones mentales o internas y representaciones externas no es en absoluto una clasificación transparente. La ambigüedad de la clasificación interna/externa ha sido señalada por diversos investigadores. Por ejemplo, Kaput con relación a esta clasificación se pregunta: *What is it [a mental representation]? What do we mean when we say it "represents" something? For whom? How? What is the difference between the experience of an internal representation and that of an external representation? And is an external representation a socially or a personally constituted system?* (Kaput, 1998, p. 267).

Además la clasificación entre representaciones internas y externas obliga a preguntarse qué antecede a qué, si las representaciones internas a las externas o viceversa. La mayoría de los psicólogos cognitivistas consideran más básicas las representaciones internas puesto que consideran que para que las representaciones externas sean representaciones han de ser representadas mentalmente por sus usuarios y, por otro lado, las representaciones mentales pueden existir sin un duplicado público; por ejemplo, muchos de nuestros recuerdos no son comunicados jamás. En cambio, la mayoría de los científicos sociales y muchos filósofos, a menudo inspirados en Wittgenstein, no están de acuerdo con ello.

Wittgenstein con sus críticas a la noción de "sensación" como "objeto privado de la conciencia" y con sus reflexiones sobre la relación entre pensamiento y lenguaje puso las bases para la crítica al punto de vista que considera que las representaciones externas son los instrumentos con los que exteriorizamos nuestras representaciones internas para hacerlas accesibles a otras personas. Wittgenstein cuestiona la visión dualista que considera un mundo mental diferente del mundo material y que admite la existencia de una experiencia interna en la que captamos acontecimiento "interiores". En su crítica al punto de vista de que el pensamiento y el lenguaje son dos clases diferentes de procesos relacionados entre sí por un nexo causal propone la siguiente alternativa: pensar y hablar son una única habilidad que puede presentarse tanto en formato lingüístico como no lingüístico. Esta opinión la expone en párrafos como el siguiente: *"....-También podría, ocupado en ciertas mediciones, actuar de manera tal que quien me viera dijese que yo había pensado – sin palabras-: Si dos magnitudes son iguales a una tercera, son iguales entre sí.-Pero lo que aquí constituye el pensar no es un proceso que tenga que acompañar a las palabras para que sean pronunciadas sin pensamiento"* (Philosophical Investigations, 1953, ¶ 330).

En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que, en nuestra opinión, son más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo- no ostensivo y personal-institucional.

Consideramos que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje.

A continuación vamos a mostrar la relevancia que tiene considerar la faceta personal-institucional para analizar las respuestas de los alumnos. El análisis de las cuatro respuestas de los alumnos al apartado c del cuestionario (Anexo), permite suponer diferencias relevantes entre los procesos mentales que "ocurrieron" en la mente de cada uno de ellos. Ahora bien, de acuerdo con la mirada holística sobre las representaciones que hemos propuesto en la sección 1 de este artículo, consideramos fundamental, antes de reflexionar sobre sus procesos mentales, tener en cuenta primero la dualidad personal-institucional.

No basta con reflexionar sobre los procesos cognitivos que han permitido a estos cuatro alumnos responder a las preguntas del cuestionario, realizando una conversión desde una representación gráfica a una representación simbólica, cuando todavía no sabían cuál era la función derivada de la función exponencial de base *e*. Hay que tener en cuenta, sobre todo, el proceso de instrucción que han seguido dichos alumnos si deseamos aportar una explicación de los aprendizajes logrados.

El análisis de las cuatro respuestas, si bien detecta diferencias importantes entre ellas, permite observar que los cuatro alumnos aplican el mismo tipo de práctica para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$. La técnica que utilizan consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, tales como Cabrigéomètre o Calcula, se halla una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1), lo que permite calcular su pendiente. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera.

Para contestar este cuestionario, además de utilizar la gráfica de la función, se ha de utilizar que la expresión simbólica de la gráfica es $f(x) = e^x$. Por tanto, esta técnica relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ y Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

Con este esquema, simbolizamos que el punto de partida de las acciones de los alumnos para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de la función. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Si los alumnos han practicado el cálculo de la pendiente de una recta y el significado geométrico de la derivada en un punto, pueden llegar a obtener la expresión simbólica de $f'(x)$ sin mucha dificultad.

Este método tiene un campo de aplicación limitado ya que, previamente, el alumno ha de descubrir una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes. Ahora bien, se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta, y también a las funciones exponenciales y logarítmicas. El hecho de que se pueda aplicar este método para calcular la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas permite una organización de la unidad didáctica sobre derivadas que tiene importantes consecuencias curriculares (por ejemplo, permite prescindir del estudio de la indeterminación 1^∞).

Uno de los aspectos relevantes de enmarcar la relación entre las representaciones de la tarea del cuestionario en el proceso de instrucción en el que se realizó, es que nos permite saber que en dicho proceso de instrucción se optó por la incorporación al significado institucional pretendido, y también al implementado y al evaluado, de prácticas que forman parte de la evolución histórico-epistemológica del objeto derivada y que habitualmente no se contemplaban en las unidades didácticas sobre la derivada que pueden verse en el currículo diversos países.

4. EL PROBLEMA DE LA REPRESENTACIÓN DEL ELEMENTO GENÉRICO

Una de las características cruciales de la actividad matemática es el uso de elementos genéricos, esto es, de esquemas que reúnen en un todo unitario un conjunto o sistema de elementos. Esta práctica puede ser útil en los procesos de definición; por ejemplo, un número racional es una clase de pares ordenados de números enteros que satisfacen una relación; el elemento genérico $(a, b) \in Zx(Z - \{0\}$ no es otro que el esquema que reune muchas parejas de la misma clase, por ejemplo [(1,2), (5, 10), (3, 6), ...], pensado en un mismo acto de pensamiento. Otras veces la idea de elemento genérico es útil para una economía de pensamiento: por ejemplo, el hecho de que las tres alturas de un triángulo concurran en el mismo punto no depende del tipo de triángulo del que se habla, por lo que cualquier tentativa de demostración debe referirse a un esquema de triángulos posibles y no a uno específico.

Sin embargo, surge una dialéctica entre elemento genérico y general que con frecuencia es causa de una mayor complejidad cognitiva. El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto, es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento. Además puesto que el objeto concreto va asociado a su representación aparece el problema de si la representación lo es de un elemento concreto o bien del concepto general.

Ante una demostración cualquiera, muchos estudiantes (no solo inexpertos) intentan aferrarse a la realidad concreta, a ejemplificaciones que transforman un elemento considerado como general (el triángulo en sí, el número impar en sí, ...) en una sucesión de elementos ejemplificantes, pensados como una clase que alude al esquema que da lugar al elemento genérico. En una reciente investigación (D'Amore, 2005) sobre la demostración en el aula, hemos visto cómo, de manera espontánea, los estudiantes, ante la dificultad de seguir el esquema aristotélico o megárico-estoico que propone el profesor, considerado como prototipo unívoco del razonamiento correcto en sentido absoluto, recurren a esquemas de razonamiento propios de la lógica india nyaya, la cual se opone al budismo y se sirve del anclaje a ejemplos como soporte circunstancial del razonamiento que se está haciendo. Ante la exigencia de recurrir al elemento genérico, los estudiantes se refieren espontáneamente a un ejemplo, o un conjunto de ejemplos que tienen la función de elementos genéricos en el sentido indicado anteriormente.

La introducción de la dualidad extensivo/intensivo en el enfoque ontosemiótico puede ayudar a esclarecer el problema del uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa). Con relación a este problema hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

1) ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?
2) ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?
3) El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular al ser considerado como genérico se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular y así sucesivamente.

La faceta extensivo/intensivo resulta un instrumento esencial para analizar la complejidad asociada a estos tres aspectos. Dicho de otra manera, el uso del elemento genérico lleva asociada una compleja trama de funciones semióticas (y por tanto, de representaciones) que relacionan intensivos con extensivos. Mostraremos esto con el ejemplo de las respuestas de los estudiantes incluidas en el Anexo.

Si observamos los tres apartados del cuestionario (Anexo) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "a" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo extensivo a lo intensivo ha estado muy presente en el diseño del cuestionario. En este proceso, podemos considerar que los objetos extensivos "representan" a los intensivos.

Si consideramos la técnica de calculo de la derivada que se ha de aplicar en el cuestionario, y sin entrar en un análisis detallado como los que se realizan en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa), se puede considerar a priori la siguiente trama de funciones semióticas.

Para calcular la función derivada a partir de una condición que cumplen todas las tangentes, el alumno ha de:

1) Tratar separadamente las variables relacionadas por la fórmula y la gráfica de la función exponencial de base *e*. Para ello, ha de entender el objeto función exponencial de base *e* como un proceso en el que intervienen otros objetos, uno de los cuales es x y el otro es $f(x)$. Aquí se establece una función semiótica que relaciona el objeto $f(x)$ con el objeto x.

2) Asociar a x la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x. Esta relación se puede considerar una función semiótica que relaciona el objeto x con el objeto "pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x".

3) Asociar la expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x con $f'(x)$. En este caso tenemos una función semiótica que relaciona una notación con otra diferente pero equivalente.

4) Considerar x como una variable. En este caso tenemos una función semiótica que relaciona un objeto con una clase a la cual pertenece.

5) Entender la función que ha obtenido como un caso particular de la clase "función derivada" . En este caso tenemos una función semiótica que relaciona un objeto con la clase a la cual pertenece .

Si nos fijamos en el cuestionario que se ha presentado a los alumnos podemos observar que la secuencia de apartados tiene por objetivo facilitar el establecimiento de estas funciones semióticas. El uso de la letra a y de la igualdad $x = a$ en el apartado *b* del cuestionario tienen el papel de introducir un elemento concreto en el razonamiento del alumno y facilitar el paso 1. La opción de utilizar conjuntamente la gráfica y la fórmula y el uso de la notación simbólica para el punto de coordenadas (a, e^a) tienen por objetivo que el alumno realice los pasos 2 y 3. Los pasos 4 y 5 se pretenden conseguir a partir de la pregunta del apartado *c.*

Este ejemplo permite ilustrar un fenómeno que consideramos muy relevante: *el alumno, para la realización de la mayoría de prácticas matemáticas, ha de activar una trama compleja de funciones semióticas y los ostensivos utilizados son determinantes, tanto para reducir o aumentar la complejidad de esta trama, como para la realización efectiva de la práctica*. Por ejemplo, si en el cuestionario que estamos considerando se hubiera eliminado el apartado *b,* seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la técnica de cálculo de la función derivada que estamos comentando y continuaríamos utilizando gráficos (los de la actividad previa con el ordenador y los del apartado *a*) y expresiones simbólicas (apartado *c*), pero la complejidad de la trama de funciones semióticas que tendría que hacer el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.

Por otra parte, debemos destacar otro factor, tanto o más importante que el tipo de representación utilizado, que interviene de manera determinante en la complejidad de las tramas de funciones semióticas asociadas al uso de elementos genéricos: las reglas del juego de lenguaje en el que nos situamos. Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos un ostensivo como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego de lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos (como por ejemplo los que se citan en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa)). La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para conformar la trama de funciones semióticas asociadas a las prácticas en las que interviene el elemento genérico.

5. EL PROBLEMA DE LAS MÚLTIPLES REPRESENTACIONES DE UN “MISMO” OBJETO MATEMÁTICO

Con frecuencia decimos que un mismo objeto matemático (función, derivada, ...) viene dado por distintas representaciones (algebraica, gráfica, tabular, ...). Consideramos que esta manera de concebir el papel de las representaciones en el trabajo matemático y en los procesos de conceptualización resulta cuando menos “ingenuo”.

Basta mirar con una perspectiva histórica un objeto matemático cualquiera para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre un objeto matemático, sus ostensivos asociados, las prácticas que permiten manipular estos ostensivos y las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente con sus ostensivos y prácticas asociadas) para organizar fenómenos. Tomemos como ejemplo la cisoide y la consideramos definida[6] como lugar geométrico en el marco de la geometría sintética. Dentro de este programa de investigación la definición de la cisoide permite representarla por el dibujo de una curva. En efecto, en la construcción de la figura 2, realizada con el programa Cabri Géomètre, la cisoide se representa por la traza del punto *P* al mover el punto *M.*

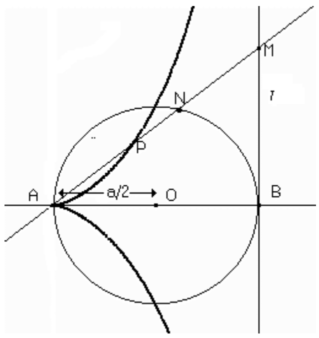


Figura 2: Trazado de la cisoide

Si nos situamos en el marco de la geometría analítica y utilizamos técnicas análogas a las que utilizó Descartes en *la Geometría* podemos obtener fácilmente la siguiente *representación* de la cisoide: $x^3 + y^2x - ay^2 = 0$. Esta traducción "Curva $\Rightarrow$ Ecuación simbólica" es una técnica que no vive aisladamente sino que necesita un corpus teórico que la justifique y le dé sentido.

El programa de investigación, iniciado por Descartes, es un programa global en el que el estudio local no se considera. Mientras nos limitemos a buscar la expresión implícita nos estamos moviendo en un punto de vista global. Ahora bien cuando nos planteamos obtener la expresión explícita de la cisoide estamos obligados a introducir razonamientos de tipo local. Situados dentro de este nuevo programa de investigación (perspectiva local), las técnicas de desarrollo en series de potencias nos permiten obtener expresiones explícitas de la cisoide. Una mirada histórica también muestra que las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación.

Consideramos que para la educación matemática es importante poner de manifiesto la ingenuidad del punto de vista que considera a las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos institucionales simplemente como diferentes significantes del mismo objeto. Este planteamiento tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas, las

[6] Sea *C* una circunferencia de radio *a/2* y centro *O*, *AB* un diámetro de *C* y *l* la recta tangente a *C* en *B*. Para cada recta AM, $M \in l$, consideramos su intersección *N* con *C* y un segmento *AP*, $P \in AM$, de igual longitud que *MN*. El lugar geométrico de los puntos *P* así obtenidos es una curva llamada *Cisoide de Diocles*.

configuraciones de objetos puestos en juego y las traducciones entre ellas en la producción del significado global de dicho objeto[7] (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2005).

El hecho de que las representaciones ostensivas se enmarquen en programas de investigación, y que impliquen el uso de configuraciones o redes ontosemióticas complejas, tiene implicaciones importantes. A continuación indicaremos tres que consideramos de las más importantes.

(1) La primera es que las representaciones no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación o una fórmula específica, una disposición concreta de bloques multibase, una gráfica particular en un sistema cartesiano adquieren sentido sólo como parte de un *sistema* más amplio con significados y convenciones que se han establecido. "*The representational system important to mathematics and its learning have* ***structure****, so that different representations within a system are richly related to one another*" (Goldin y Stheingold, 2001, p.1-2). Por este motivo más que hablar de representaciones ostensivas o de signos es conveniente hablar de *configuraciones epistémicas* (o cognitivas, si nos referimos a sistemas de prácticas personales), para hacer patente la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego cuando cambia de registro semiótico o contexto de uso.

(2) La segunda es que el hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de representación, conlleva que "cada representación" se pueda convertir en "objeto representado" de la representación del otro programa de investigación. Cuando la cisoide se estudia en el marco de la geometría analítica se activa una compleja trama de funciones semióticas cuyo principio y final se puede representar por la figura 3:

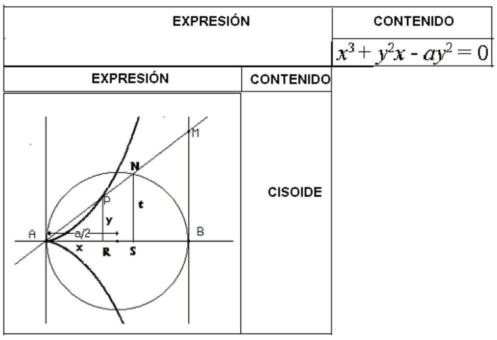


Figura 3: Funciones semiótica al estudiar la cisoide

Por tanto, dependiendo del contexto, la curva puede proporcionar una representación geométrica de la ecuación, o la ecuación puede proporcionar una simbolización algebraica de la curva. Este hecho lleva a considerar que la cisoide se puede representar por una curva en la "geometría sintética" y por una ecuación en la "geometría analítica".

(3) La tercera es que una representación ostensiva, por una parte, tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posibles. El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental "algo" por "algo". En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el "iceberg" de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita.

[7] Manteniendo la posición antropológica que caracteriza el enfoque ontosemiótico del conocimiento el "significado global" es concebido en esta aproximación teórica como la articulación de los subsistemas de prácticas en los que el objeto interviene en diferentes instituciones, contextos de uso y juegos de lenguaje

En el enfoque ontosemiótico, la introducción de la dualidad elemental-sistémica en el análisis de las representaciones permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que cada uno de los diferentes pares objeto/representación (sin segregarlos) posibilita un subconjunto del conjunto de prácticas que son consideradas el significado del objeto. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico. Pero, en cada subconjunto de prácticas el par objeto/representación (sin segregar) es diferente, en el sentido de que posibilita prácticas diferentes.

En el ejemplo del cuestionario (Anexo), el uso de la representación gráfica en un software dinámico es necesaria para hallar una condición que cumplen todas las tangentes (el punto de partida del cuestionario). Para contestar de manera aproximada el apartado *a* es necesaria sólo la representación gráfica, pero para contestar de manera exacta es necesario utilizar también la expresión simbólica de la función exponencial. Para contestar al apartado *b* es necesario el uso conjunto de la representación gráfica y de la simbólica. Dicho de otra manera, la técnica que la institución escolar pretende que apliquen los alumnos en este cuestionario sólo es posible si se introduce la representación gráfica y la simbólica conjuntamente. Si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posibles.

6. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN Y SU RELACIÓN CON LA TRADUCCIÓN ENTRE DIFERENTES REPRESENTACIONES

Desde el punto de vista cognitivo la comprensión de un objeto matemático se entiende básicamente en términos de integración de representaciones mentales. Esta integración es la que asegura la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto. Desde esta perspectiva, un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consiste en conseguir que los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra, pero se reconoce que este objetivo es difícil de lograr. *"La conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas."* Duval (2002, p. 318)

La contribución teórica de Duval se inscribe dentro de la línea de indagación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis) al lenguaje, en sus diversas manifestaciones. La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos, pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros no congruentes entre sí.

La observación del trabajo matemático profesional parece no apoyar la dependencia de la noesis respecto de la diversidad de registros. Pensemos en la eficacia del lenguaje algebraico para investigar en geometría. Esto implica la no necesidad de la diversidad de registros cuando se tiene en cuenta la valencia instrumental de los ostensivos y los conceptos matemáticos (en su componente discursiva) se interpretan como reglas de manipulación de ostensivos (por supuesto, no arbitrarias). Cuando se dispone de un sistema de representación más efectivo en términos operatorios, éste desplazará al menos efectivo. Pero además, si el no-ostensivo es una regla de cómo manipular al ostensivo en determinadas tareas y circunstancias, la variedad de ostensivos implica variedad de reglas, lo que plantea un problema adicional de establecer la equivalencia, para ciertos propósitos, de dichas reglas. Esto quiere decir que una diversidad de ostensivos puede de hecho suponer una dificultad adicional e innecesaria para la comprensión (dominio) de una regla.

La importancia crucial que se da a la conversión de representaciones (tanto en la enseñanza como en el aprendizaje) desde el punto de vista cognitivo es consecuencia de entender la "comprensión" básicamente en términos de procesos mentales. En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática reconocemos el papel importante que juegan las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la comprensión matemática (Contreras y Font, 2002; Font 2001; Font y Peraire 2001), pero adoptamos una posición antropológica sobre esta cuestión.

> *"Try not to think of understanding as a 'mental process' at all.- For that is the expression which confuses you. (...) In the sense in which there are processess (including mental processes) which are characteristic of understanding, understanding is not a mental process".* (Wittgenstein, 1953, Philosophical Investigations, p. 61)

Desde el punto de vista pragmático, "comprender" o "saber" un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula. Desde este punto de vista la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que será parcial y progresiva.

Desde esta perspectiva, se han de entender los procesos de enseñanza como la presentación de secuencias de actividades que tienen por objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, la emergencia de objetos matemáticos personales cuyo significado se adecue lo mejor posible al significado institucional implementado por el profesor. Se considera que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando articula representaciones. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona.

Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas resulta que el significado queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas intervienen dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado***.** En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas. El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2005).

Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios.

7. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos planteado algunos aspectos problemáticos del uso de las representaciones en la educación matemática y hemos aportado una respuesta desde el marco teórico que describimos como enfoque ontosemiótico.

Con relación al problema de la distinción entre representaciones internas y externas, en el enfoque ontosemiótico esta clasificación, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos facetas que, en nuestra opinión, son más útiles. Nos referimos a las facetas ostensivo- no ostensivo y personal-institucional.

Con relación al problema de la representación de entidades abstractas proponemos analizarlo en términos de las dualidades cognitivas o atributos contextuales extensivo-intensivo. Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos un ostensivo como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se considera que, cuando nos referimos a este objeto particular, se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares.

Con relación a la problemática de si hay un mismo objeto matemático que tiene múltiples representaciones diferentes. Para el enfoque ontosemiótico resulta "ingenuo" este punto de vista. La introducción de la dualidad elemental sistémica en el análisis de las representaciones permite reformular esta visión de la siguiente manera: Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que cada uno de los diferentes pares objeto/representación (sin segregarlos) posibilita un subconjunto de prácticas del conjunto de prácticas que son consideradas el significado del objeto. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico. Pero, en cada subconjunto de prácticas el par objeto/representación (sin segregar) es diferente, en el sentido de que posibilita prácticas diferentes.

Con relación al problema de comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones, se argumenta que, desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan la realización de la práctica que interesa que forme parte del significado global del alumno o no, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios.

Como conclusiones generales de este trabajo, la primera que queremos destacar es que una aproximación ontosemiótica a la representación y significación, como la que hemos descrito en este artículo, es una mirada holística sobre las mismas, la cual permite afrontar la gran complejidad asociada al uso de estas nociones en educación matemática. Esta mirada holística ayuda a entender los fenómenos de la representación y significación como la parte visible de un “complejo iceberg” en la base del cual nos encontramos con un entramado de objetos, prácticas y ostensivos asociados, estructurados en configuraciones epistémicas y cognitivas.

La segunda conclusión que destacamos es que entender la representación en términos de función semiótica como una relación entre una expresión y un contenido establecida por “alguien” tiene la ventaja de no segregar el objeto de su representación. Ahora bien, siendo importante esta ventaja queremos señalar otra que en nuestra opinión aún lo es más. Nos referimos al hecho de que, en el enfoque ontosemiótico, postulamos que la expresión y el contenido pueden ser cualquier tipo de objeto, filtrado por las restantes dualidades, lo cual proporciona mayor capacidad analítica y explicativa. Además, el tipo de relación entre expresión y contenido puede ser muy variado, no sólo el representacional. Por ejemplo: “está asociado con”, “es parte de”, “es causa/razón de”, etc. La gran flexibilidad que aporta esta manera de entender la función semiótica permite no restringirnos a entender la “representación” sólo como un objeto (generalmente de tipo lingüístico) que está en lugar de otro, que suele ser la manera en que mayoritariamente se entiende la representación en educación matemática.

REFERENCIAS

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Cobb, P., Yackel y McClain, K. (2000) (Eds.). *Symbolizing and communicatins in mathematics classrooms*. London: Lawrence Erbaum Associates.

Contreras, A., Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin14.htm]

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2004), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

CP Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers,* vols. 1-8, C.Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA:Harvard University Press.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna : Pitagora.

D'Amore B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the Learning of Mathematics*.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (ed.), *Representations and Mathematics Visualization,* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Eco, U. (1979). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal,*14: 1-35. [http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm].

Font, V. y Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, 13(2), 55-67.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* (aceptado, 14-7-04).

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2): 135-165.

Golding, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En, Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (197-218). London: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour*, 17 (1): 1-4

Goldin, G. y Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Hitt, F. (2002) *Representations and mathematics visualization*. North American Chapter of PME: Cinveztav-IPN.
Hjemslev, L. (1943). *Omkring sprogteoriens grundlæggelse*. Ed. original danés. Traducción en inglés: *Prolegomena to a Theory of Language*. 1961. Madison: University of Winconsin.
Janvier, C. (ed.) (1987), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 266-281.
Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio–cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 123–150
Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizin and communicating in mathematics classrooms* (pp.38-75). London: Lawrence Erlbaum.
Steinbrigng, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32: 49-92.
Vergnaud, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2,3): 133-170.
Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2005). Didactic effectiveness of equivalent definitions of a mathematical notion. The case of the absolute value. CERME 4, Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/paperswg11.htm
Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

ANEXO:

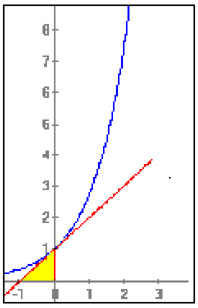
UN EPISODIO DE CLASE COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

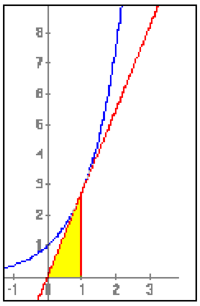
Cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de estudio de la derivada, y cuatro respuestas correctas de estudiantes al apartado c).

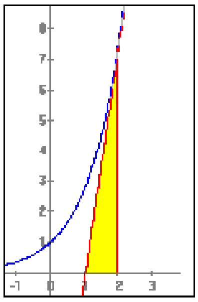
Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

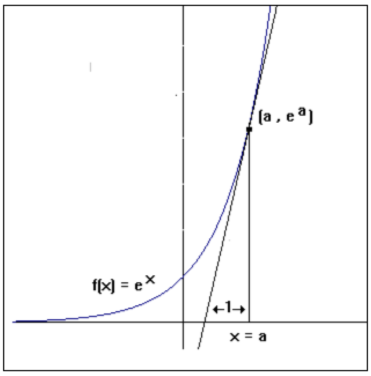
a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ i $f'(2)$







b) Calcula $f'(a)$



c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

Respuestas al apartado c):

ALFONSO:

Pendiente = $\frac{e^x}{1}$

$P = e^x$

$P = f\,'(x)$

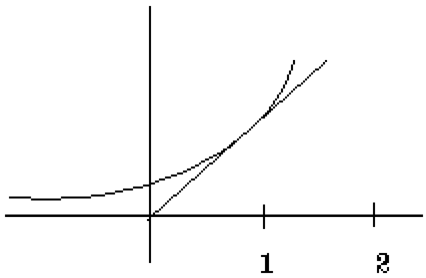
$f\,'(x) = e^x$

VÍCTOR

La función derivada de $f(x) = e^x$ es $f\,'(x) = e^x$ porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto.

La pendiente se consigue dividiendo $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x

ALEX



Todas las subtangentes de la función $f(x) = e^x$ son 1, como el desplazamiento vertical es e^x y la derivada de la función es la pendiente de la recta tangente, la fórmula será

$$f(x) = \frac{\textit{desplazamiento vertical}}{\textit{desplazamiento horizontal}} = \frac{e^x}{1} = e^x$$

ROCÍO

$$f\,'(x) = \frac{f(x)}{sub \tan gente}$$

es $f(x) = e^x$

$$f\,'(x) = \frac{e^x}{1} = e^x$$