ALGUNOS DESARROLLOS Y APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS[1]

Juan D. Godino y Vicenç Font

"Todo debe simplificarse hasta donde sea posible, pero nada más"

(Albert Einstein)

En este trabajo se incluyen algunas nociones teóricas que complementan las introducidas en el artículo de Godino (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática, publicado en Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284. En particular, se amplían las nociones de objeto, significado, conocimiento y comprensión, y se resumen dos ejemplos de aplicaciones del modelo.

1. COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino 2000, Font 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas). Esta última manera de entender la "comprensión" implica concebirla como "comprender las normas" que regulan la práctica; se trata de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas (Godino 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de que el sujeto establece una función semiótica (o una trama de dichas funciones), resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad

[1] Anexo al artículo, Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.

de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

2. LA NOCIÓN DE OBJETO MATEMÁTICO

En nuestras reflexiones teóricas iniciales sobre la naturaleza de las matemáticas nos preguntábamos qué es un objeto matemático[2], por ejemplo, la media aritmética y qué significa la expresión "media aritmética". (Godino y Batanero, 1994). El uso que hacíamos en esta etapa de 'objeto matemático' viene a ser equivalente a concepto matemático (idea o noción matemática)[3]. Adoptando una epistemología pragmatista – antropológica establecimos, como respuesta, una función semiótica cuyo antecedente es el objeto matemático – o la expresión que lo designa –, y el consecuente un nuevo constructo que describimos como el "sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones – problemas". De esta manera se trata de superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/ formalista en la que los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos.

Con la finalidad de hacer operativas estas nociones para describir la actividad matemática, los "productos" resultantes de dicha actividad y de los procesos de comunicación matemática hemos procedido a una progresiva ampliación de la noción de objeto matemático y significado. Consideramos útil hacer un uso amplio (débil) de la expresión "objeto matemático": Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Esta "debilidad" de la noción de objeto deberá ser subsanada por una "teoría fuerte" que permita categorizar los diversos tipos de objetos que interesa considerar para describir la actividad matemática en los diversos contextos y marcos institucionales. Aclaramos a continuación nuestra posición ontológica, poniendo en juego los atributos contextuales duales introducidos en el EOS.

"Objeto matemático" es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras "cosas") a las matemáticas. Por tanto, de entrada, todo lo que se pueda "individualizar" en matemáticas será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc.). Constantemente nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables a los que nos referimos mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x +2$, etc.). Sobre estos objetos actúa (sobre todo) la faceta extensivo/intensivo (ejemplar/tipo; particular/general). Las explicaciones que se pueden dar para justificar la activación de dicha faceta son diversas. Por ejemplo, un foucaultiano diría que estos objetos ya han sido "dichos desde algún discurso", mientras que desde la filosofía de la ciencia se dirá que "toda percepción (observación)

---

[2] Cuestiones similares se plantea Sfard (2000, p. 42-43): "Los símbolos matemáticos refieren a algo – pero, ¿a qué? ... ¿Cuál es el estatus ontológico de estas entidades? ¿De donde vienen? ¿Cómo podemos alcanzarlos (o construirlos)?"

[3] En D'Amore (2001) se presenta un estudio extenso del debate sobre los conceptos y los objetos matemáticos. Asimismo, Otte (2003) analiza en qué sentido las matemáticas tienen objetos, enfatizando el papel esencial de la dualidad particular - general (que en nuestro caso designamos como extensivo – intensivo, o ejemplar – tipo).

está cargada de teoría” ya que todo juicio de percepción supone la aplicación de conceptos (la proposición A es B). Otra posible explicación la ofrece la teoría de la cognición “corporeizada” (“embodied cognition”, Lakoff y Núñez, 2000). Desde este punto de vista, uno de los orígenes del discurso objetual en matemáticas es la metáfora ontológica, la cual, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos. Esta metáfora permite considerar acontecimientos, actividades, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.). Esta metáfora se combina de manera inconsciente con otra metáfora ontológica: la del contenedor. La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades que se contienen unas a otras.

Para poder aplicar la faceta extensivo-intensivo a los objetos, estos necesitan un signo que los enuncie (o acompañe): Un signo, o “representamen”, es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición (…) Charles S. Peirce (The Collected Papers, 2.228). Puesto que tanto el “signo” como el “objeto” son “algo”, hay que tener presente que ambos son objetos. Ser objeto o signo es algo relativo. Por tanto, conviene distinguir entre los objetos y los signos. Es una distinción importante; ahora bien es una diferencia coyuntural y no sustancial, ya que lo que en un momento es signo en otro puede pasar a ser objeto y viceversa. Según convenga, los sujetos pueden identificar o diferenciar el signo del objeto: Estar en lugar de, es decir, situarse en una relación tal respecto a otro que, para ciertos fines, puede considerársele, en algún modo como si fuese ese otro. Charles S. Peirce (The Collected Papers, 2.273).

La posibilidad de diferenciar entre signo y objeto permite que “alguien” pueda establecer una función semiótica entre “dos objetos” (“algo” por “algo”). En esta relación (“algo” por “algo”) normalmente se considera que uno de los dos objetos es una “expresión” que se relaciona con un “contenido” (el otro objeto).

Si nos formulamos la pregunta: ¿Cómo se relaciona la expresión con el contenido?, topamos con el problema de la clasificación entre representaciones internas y externas. Consideremos, por ejemplo, que tenemos un reloj de pared y un papel en el que se ha escrito la palabra “reloj”. Normalmente se considera que la expresión escrita “reloj” se relaciona con el objeto físico “reloj” por medio del concepto (interpretante) que tiene el sujeto (el interprete). Además, se considera que tanto el concepto como la expresión son representaciones. También se considera que la palabra escrita “reloj” es una representación externa y que el concepto es una representación interna (mental).

Esta primera clasificación en representaciones mentales o internas y representaciones externas no es en absoluto una clasificación transparente. El motivo es que los objetos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos con soporte material que forman parte del mundo real, y, puesto que se presupone que el sujeto se relaciona con el mundo real por medio de representaciones mentales, resulta que lo que se ha considerado como externo en cierta manera también es interno. La ambigüedad de la clasificación interna/ externa ha sido señalada por diversos investigadores. Por ejemplo, Kaput con relación a esta clasificación se pregunta:

> “¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando decimos que <<representa>> a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente.” (Kaput, 1998, p. 267).

En el EOS se considera que la dualidad interno/ externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje. En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/ externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone sustituirla por dos dualidades o atributos contextuales que se consideran más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo - no ostensivo y personal – institucional, lo que lleva a hablar de objetos ostensivos y no ostensivos, objetos personales e institucionales.

La distinción ostensivo - no ostensivo se ha de tomar en sentido intersubjetivo: "algo" se puede mostrar a otro directamente versus "algo" no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro "algo", que sí se puede mostrar directamente. A su vez, la distinción institucional - personal pone de manifiesto que en el proceso de instrucción estamos interesados en la enseñanza a "personas" de "objetos institucionales". Estos objetos institucionales se presentan en la actividad matemática por medio de sus ostensivos asociados. Como resultado del proceso de instrucción los alumnos habrán construido sus objetos personales, los cuales se presentarán en su actividad matemática también por medio de ostensivos asociados.

En el EOS se considera que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

3. LA NOCIÓN DE SIGNIFICADO

Una de las posibles maneras de concebir el significado de una palabra es considerarlo como el universal que se asocia a esa palabra. A su vez, las cosas designadas por el término se consideran ejemplificaciones de ese mismo universal. De esta manera, las palabras y las cosas quedan relacionadas a través de un tercer reino poblado de esencias y significados. Esta concepción, que en cierta manera se puede considerar platónica, se considera en el enfoque ontosemiótico como una manera "unitaria" de plantear el problema ya que lo que se necesita para conocer el "significado" es una definición.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde esta perspectiva, que en cierta manera se puede considerar pragmatista, el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva "sistémica" ya que se considera que el significado de un objeto es el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

La aparición en escena del sistema de prácticas lleva a una reflexión sobre lo que se entiende por práctica y por "realización de una práctica". Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones – problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

La reflexión anterior sobre las prácticas hace intervenir nuevos tipos de objetos matemáticos, además de los considerados inicialmente como prototípicos, es decir, los conceptos. Se considera útil, en ciertos momentos, identificar como objetos los componentes de las configuraciones, proponiéndose las siguientes categorías: situación – problema, lenguaje, definición, proposiciones, procedimiento y argumento. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones problemas) se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es la resolución de situaciones - problemas. A su vez, las situaciones problemas se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, necesidad de generalizar, necesidad de proponer problemas, etc.).

La pregunta, ¿cuál es el significado de un objeto matemático? se intenta responder en el EOS teniendo en cuenta básicamente las facetas expresión-contenido y unitario - sistémico. Desde la perspectiva expresión - contenido el significado de un objeto que se considera como "expresión" en una función semiótica será el "contenido" de dicha función semiótica, establecido por alguien siguiendo una regla o criterio de correspondencia. Desde la perspectiva unitario - sistémico el "significado" de un objeto, según el contexto, puede ser una definición (perspectiva unitaria) o bien puede ser el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (perspectiva sistémica).

Queremos volver a insistir en que en el EOS hay varios usos diferentes del término "objeto" y de "significado". Por una parte, hay un uso más amplio (débil) en el que "todo " es objeto y cualquier objeto puede ser significante y significado; después hay un uso más restringido (fuerte) en el que la reflexión se centra en lo que se considera el prototipo de "objeto matemático" (los conceptos) y el significado es el sistema de prácticas operativas y discursivas en que tal objeto desempeña un papel relevante. Además, hay un uso intermedio operativo en el cual por objeto se toma cualquiera de los elementos que forman una configuración. Este uso intermedio permite superar la actitud simplista de que los únicos objetos son los conceptos y hace operativa la idea de que todo sea objeto. La figura 1 resume las diversas categorías de objetos introducidas en el EOS en su estado actual de desarrollo. La inclusión explícita en el EOS de la noción "trasfondo ecológico de las prácticas" (material, biológico y sociocultural) permite reconocer un papel potencialmente relevante a los "objetos materiales" (artefactos) como soportes y condicionantes del desarrollo de la actividad matemática.

Como respuesta final – abierta a revisión y refinamiento – a la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponemos el par (*sistema de prácticas*, *configuración*), entendiendo, además, que tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los atributos contextuales duales introducidos en el modelo teórico.

La introducción de la noción de configuración permite matizar y operativizar la idea de que el significado de un objeto matemático conceptual es el sistema de prácticas. Ahora podemos decir que el significado de un concepto matemático es el par "Configuración epistémica / prácticas que posibilita", siendo la definición (explicita o implícita) del concepto matemático uno de los componentes de la configuración epistémica.

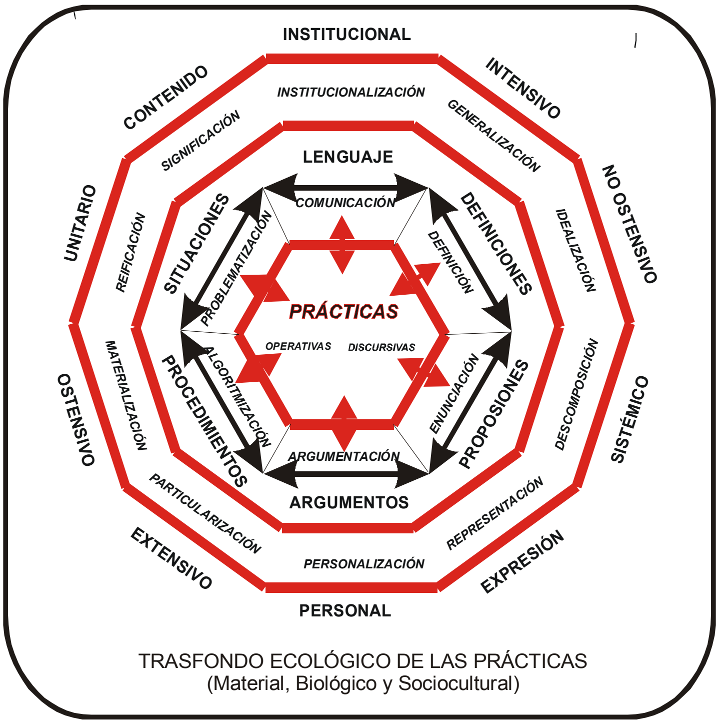

Figura 1: Objetos y procesos matemáticos

En el caso de que el concepto tenga otra definición equivalente, lo que se tiene es que el concepto se puede incorporar a otro par “Configuración epistémica /prácticas que posibilita” diferente del par considerado anteriormente. En este caso, cada par se puede considerar como diferentes “sentidos” del concepto, mientras que el "significado" del concepto será el conjunto de todos los pares “Configuración epistémica /prácticas que posibilita”

Sin duda se trata de un marco teórico complejo pero se está revelando una herramienta potente y útil para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

4. EJEMPLOS DE INVESTIGACIONES

En este apartado describimos de manera resumida dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco del EOS, aplicando de manera especial herramientas de la TFS. Otros ejemplos de investigaciones experimentales realizadas desde la perspectiva ontosemiótica, publicadas en diversas tesis de doctorado, artículos y monografías, están accesibles en la página web del Grupo de Investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino ; http://www.ugr.es/local/batanero, así como en la página web de V. Font: http://www.webpersonal.net/vfont/RDMfinal.pdf

4.1. Caracterización del razonamiento combinatorio elemental

En el artículo de Godino, Batanero y Roa (2005), publicado en *Educational Studies in Mathematics* (volumen 60, nº 1: 3-36) se describen las principales nociones teóricas del EOS con ejemplos relativos al campo de problemas de combinatoria elemental y se analizan las respuestas dadas por cuatro estudiantes que cursaban el último curso de la licenciatura de matemáticas a un problema de combinatoria.

Los tipos de objetos matemáticos (problemas, lenguaje, ...), y las facetas cognitivas (extensivo – intensivo, ostensivo – no ostensivo, ...) se usan para desarrollar la técnica de análisis ontosemiótico que permite caracterizar los significados institucionales (respuestas a los problemas elaboradas desde un punto de vista experto) y los significados personales de los estudiantes.

En este artículo se utilizan datos de la tesis doctoral de Roa (2000) correspondientes a las respuestas de cuatro sujetos a uno de los problemas propuestos. En la investigación se aplicó un cuestionario formado por 13 problemas combinatorios elementales (11 problemas que ponen en juego solo una operación combinatoria y 2 problemas compuestos en los que intervenían dos operaciones). Este cuestionario se aplicó a una muestra de 90 estudiantes con preparación matemática avanzada y se analizó aplicando técnicas cuantitativas y cualitativas (estudio de casos mediante entrevistas).

El análisis realizado permite identificar los conocimientos puestos en juego, correcta o incorrectamente, por los alumnos en la resolución del siguiente problema:

> *Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.*

Los resultados pusieron de manifiesto la complejidad de la tarea de resolución de este problema, aparentemente sencillo, así como la diversidad entre los cuatro alumnos, lo que refleja una variedad del significado (sistémico) de la combinatoria elemental para los mismos. En el proceso de resolución se producen conflictos semióticos que llevan a error, debido a la disparidad entre el modelo de selección en que estos alumnos han aprendido las definiciones combinatorias y las diversas situaciones (como, por ejemplo, en un problema de partición) en que deben ser aplicadas dichas definiciones.

Del análisis de los protocolos de resolución de este problema por los cuatro alumnos se infiere que la actividad de resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos matemáticos; estos objetos varían de uno a otro alumno. Aunque, debido a las restricciones de espacio el artículo sólo incluye el análisis de un problema, este mismo proceso fue repetido con los 12 problemas restantes, poniendo de manifiesto la pluralidad de conocimientos usados por los alumnos en la solución de los problemas, que para cada uno de ello constituye el *significado personal* (sistémico) de la combinatoria elemental.

4.2 El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada

Describimos la investigación realizada en la tesis doctoral de V. Font, en el marco teórico del enfoque ontosemiótico, sobre cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada por estudiantes de Bachillerato (16-17 años). Usaremos como referencia accesible el artículo publicado en *Recherches en Didactique des Mathématics,* (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), con el título: "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal".

En este trabajo se usan la noción de "significado institucional", entendido como sistema de prácticas, para diseñar, implementar y analizar una experiencia de estudio de la derivada, distinguiendo cuatro tipos de tales significados sistémicos: de referencia, pretendido, implementado y evaluado. También se recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, que permiten caracterizar sus significados personales iniciales, finales y algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza, destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, llevan a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.
- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de función semiótica, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo, expresión-contenido, son utilizadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de la definición de derivada en un punto y función derivada. Este análisis permite identificar conflictos semióticos potenciales, que son tenidos en cuenta en el diseño de la experiencia, y como explicación de algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

REFERENCIAS:

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" en una teoría "realista" "versus" el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27: 51-76.

CP Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers*, vols. 1-8, C.Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA:Harvard University Press.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència*, Biaix* 19, pp. 33-36

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO,* n. 25, pp. 77-87.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1): 3-36

Kaput, J.J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 266-281.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134: 181-216.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Cobb, E. Yackel y K. McCain (Eds), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom* (pp. 37-97). London: LEA