

UN ENFOQUE ONTÓLOGICO Y SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

Juan D. Godino*

ABSTRACT

In this article we describe a technique to analyse mathematics teaching and learning processes, which permits the characterisation of the institutional and personal meanings involved and the identification of possible semiotic conflict in the didactic interaction. The technique is based on an ontological and semiotic model of mathematics cognition, which is previously presented. An application to analyse the study process of the median in a textbook, and the student's answers to an assessment test given after the study process is also included.

RÉSUMÉ

Ce travail décrit une technique d'analyse des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques qui permet de déterminer les significations institutionnelles et personnelles mises en jeu dans l'interaction didactique et d'y identifier les possibles conflits sémiotiques. La technique est fondée sur un modèle ontologique et sémiotique de la cognition mathématique que l'on présente initialement et que l'on illustre à travers, d'une part, l'analyse d'un processus d'étude de la médiane proposé par un manuel et, d'autre part, les réponses d'une étudiante à une épreuve d'évaluation passée après la réalisation du processus d'étude considéré.

RESUMEN

En este trabajo se describe una técnica de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permite determinar los significados institucionales y personales puestos en juego e identificar posibles conflictos semióticos en la interacción didáctica. La técnica se basa en un modelo ontológico y semiótico para la cognición matemática que se presenta previamente y se ejemplifica mediante el análisis del proceso de estudio propuesto para la mediana en un libro de texto, y de las respuestas de

* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
<http://www.ugr.es/local/jgodino>.

una estudiante a una prueba de evaluación, aplicada tras la realización de dicho proceso de estudio.

Palabras clave: objeto matemático, cognición individual e institucional, función semiótica, análisis ontológico-semiótico, conflicto semiótico, significados sistémicos, institucionales y personales.

INTRODUCCIÓN

Recientemente, observamos un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así encontramos trabajos presentados en PME (Ernest 1993, Vile y Lerman 1996), y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb y Bauersfeld 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la educación matemática. Destacamos también los trabajos sobre la problemática de la influencia de los sistemas de representación (Duval 1993), simbolización y comunicación (Pimm, 1995; Cobb, Yackel y McClain, 2000), y, en general, del lenguaje y el discurso (Ellerton y Clarkson, 1996; Kieran, Forman y Sfard, 2001) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las investigaciones sobre la comprensión de las matemáticas (Sierpínska, 1994; Godino, 1996), que no pueden eludir las cuestiones del significado.

Este interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento, como resaltan Vygotski (1934), quien considera el significado de la palabra como unidad de análisis de la actividad psíquica, y Cassirer (1964) para quien “el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario”.

Consideramos, sin embargo, que es necesario realizar más investigaciones sobre el papel de los signos y la propia noción de significado, desde la perspectiva de la educación matemática, y sobre la articulación entre los componentes semióticos y epistemológicos puestos en juego en la actividad matemática, esto es, sobre la naturaleza y tipo de los objetos cuyos significados se ponen en juego. “Lo que entendemos por ‘comprensión’ y ‘significado’ está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel” (Pimm 1995, p. 3).

Pensamos que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En definitiva, se debería progresar en el desarrollo de una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos. Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que

no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953).

En este trabajo presentaremos algunas nociones teóricas que en su conjunto definen una aproximación semiótica al estudio de la cognición matemática, entendida ésta en sus dimensiones institucionales y personales. Extenderemos las investigaciones sobre los significados institucionales y personales iniciadas en Godino y Batanero (1994, 1998), así como la noción de función semiótica y la ontología matemática asociada que introducimos en Godino y Recio (1997). Así mismo, desarrollamos la técnica que llamaremos de “análisis semiótico”, aplicándola al análisis de un proceso de estudio de la mediana en el contexto de la formación inicial de maestros¹.

I. HACIA UNA ONTOLOGÍA Y UNA SEMIÓTICA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está, sin embargo, en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque ésta sea también importante, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen. Además, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática. Esta modelización requiere tener en cuenta, entre otros:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.

1. Esta investigación se ha desarrollado en el marco del Proyecto BSO2000-1507 subvencionado por la Dirección General de Enseñanza Superior (MEC, Madrid). Agradezco las sugerencias sobre este trabajo que he recibido de Carmen Batanero (Universidad de Granada), Ángel Contreras (Universidad de Jaén) y Vicenç Font (Universidad de Barcelona), así como a los revisores anónimos de la versión inicial de este trabajo propuesta a RDM.

- Diversidad de actos y procesos de semiosis (interpretación) entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos.
- Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan los procesos de semiosis.

En los últimos años nos hemos interesado por el estudio y elaboración de modelos teóricos para la investigación en educación matemática que tengan en cuenta las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las relaciones entre dichas dimensiones. En Godino y Batanero (1994, 1998) presentamos las nociones de “significado institucional y personal de un objeto matemático” que, desde supuestos pragmáticos, tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En los trabajos citados nos atrevimos a proponer una manera de concebir los objetos matemáticos desde el punto de vista de la educación matemática, siendo conscientes, no obstante, de la complejidad del problema – basta recordar la cita de Piaget (1979, p. 147): “ocurre que nunca pudo llegarse a un acuerdo acerca de lo que son realmente los ‘entes’ matemáticos”. Sugerimos que al preguntarnos, por ejemplo, qué es la “media aritmética” (o número real, función, etc.), o lo que es equivalente, cuando nos interesamos por “qué significa ‘media aritmética’”, debemos pensar en términos de los “sistemas de prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas”. Esas prácticas –acciones o manifestaciones operatorias y discursivas– pueden ser atribuidas a un sujeto individual, en cuyo caso hablamos de significado del objeto personal, o pueden ser compartidas en el seno de una institución y entonces decimos que se trata del significado del objeto institucional correspondiente. Interesa hacer dos observaciones sobre esta elaboración teórica:

- Como respuesta a la cuestión, ¿qué es un objeto matemático?, hemos construido otro objeto, “el sistema de prácticas” que podríamos designar con el término “praxeología” dado que tales sistemas de prácticas incluyen tanto componentes operatorios como discursivos².

2. El término praxeología usado por Chevallard (1997) nos parece apropiado para el constructo “sistema de prácticas”, aunque queda abierta la discusión si los constructos respectivos son coincidentes. En ambos modelos teóricos se parte de una perspectiva pragmática y antropológica sobre la actividad matemática. En Godino y Batanero (1994) analizamos con detalle

– El objeto “sistema de prácticas” (praxeología) se presenta como el contenido que proponemos asignar a la expresión que designa el objeto, por ejemplo, “media aritmética”. Establecemos, por tanto, una correspondencia entre ambos objetos, en la que el sistema de prácticas viene a ser el significado (sistémico o praxeológico) de la expresión “media aritmética”.

El significado se concibe como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjelmslev 1943). No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo: es sencillamente aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas. En ciertos actos comunicativos nos referimos a “sistemas de prácticas”, mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas. El modelo teórico sobre los significados institucionales y personales desarrollado en Godino y Batanero (1998)³ permite describir una agenda de investigación en base a las nociones de *semiometría* (caracterización de significados sistémicos) y *ecología de significados* (relaciones entre significados). Consideramos, sin embargo, que la caracterización de significados y el análisis de los procesos de instrucción matemática necesita elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados.

El problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo estamos interesados en elaborar una ontología simple, pero suficiente para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. Como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos “los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas”. Conocer en matemáticas quiere decir conocer los “sistemas de prácticas” (operativas y discursivas), pero ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura. En los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino incluso las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos desencadenan también procesos interpretativos. Dependiendo de los destinatarios de los mensajes y del momento y

las conexiones de nuestro modelo teórico con la Teoría Antropológica elaborada por Chevallard (1992).

3. Sierpinska y Kilpatrick (1998, p. 535) califican nuestro modelo teórico como “una epistemología –especialmente adaptada para las necesidades de la investigación en educación matemática”.

circunstancias dadas, el significado toma un carácter local y sincrónico: es el contenido al que se refiere el emisor de una expresión, o el contenido que interpreta el receptor que se refiere el emisor. En otras palabras, lo que quiere decir uno, o lo que entiende el otro. Necesitamos, por tanto, disponer de un modelo semiótico más completo que tenga en cuenta la trama de objetos y procesos interpretativos puestos en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El modelo ontológico-semiótico que describimos en la sección II es el resultado de un proceso de reflexión que partió inicialmente de una interpretación del clásico “triángulo epistemológico”, con el objetivo de analizar las relaciones entre el pensamiento, el lenguaje y las situaciones en que tiene lugar la actividad matemática (Godino y Recio, 1998). La relación entre los signos usados para representar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring (1997) de ellos y que denomina triángulo epistemológico. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia. Vergnaud (1990, p. 36) también propone un esquema triangular para la estructura de un concepto matemático: S, conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto; I, conjunto de invariantes que constituyen el concepto; Z, conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

Consideramos que estas modelizaciones del conocimiento matemático son insuficientes para describir la complejidad de la actividad matemática y los “productos” resultantes de dicha actividad⁴. Entre las carencias que observamos citamos:

- No se explicita si tales objetos (conceptos, y sus constituyentes) hacen referencia tanto a una realidad cognitiva individual como a otra cultural (institucional), o se refieren a una sola de dichas realidades.
- No se hace referencia a las acciones de los sujetos ante las situaciones como origen del conocimiento.

4. “La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante” (Edgar Morin 1977, p. 18).

- No se refleja la naturaleza racional y normativa del sistema de conocimientos matemáticos.
- No se reconoce la dialéctica entre lo particular y lo general, entre las entidades ostensivas y no ostensivas, ni las relaciones instrumentales y representacionales entre las diversas entidades matemáticas.

Una modelización del conocimiento matemático más rica, que resuelve en parte estas carencias, es la propuesta en el enfoque antropológico de la didáctica de la matemática (Chevallard 1992, 1997, Chevallard, Bosch y Gascón 1997, Bosch y Chevallard 1999). Los componentes de las praxeologías matemáticas que proponen, *praxis* (tareas, técnicas), *logos* (tecnología, teoría), modelizan adecuadamente la matemática como actividad humana y la dialéctica entre la acción situada y el discurso que la describe y justifica.

Sin embargo, consideramos que el modelo ontológico de la teoría antropológica necesita algunos desarrollos y refinamientos. Pensamos que interesa reconocer explícitamente en el componente discursivo los *conceptos* y *proposiciones* (interpretados como reglas en el sentido de Wittgenstein) y las *argumentaciones*. Esto permitirá realizar análisis más pormenorizados de la actividad matemática e incrementar la sensibilidad del investigador (y el profesor) hacia los procesos interpretativos de las reglas y de su seguimiento por parte de los sujetos. Nos parece conveniente considerar explícitamente el lenguaje, objetos ostensivos en la terminología de la teoría antropológica, como un tercer componente de las praxeologías, junto con la *praxis* y el *logos*, apareciendo de este modo una nueva interpretación del “triángulo epistemológico”, en una versión antropológica del conocimiento matemático.

Pero donde consideramos que la teoría antropológica necesita desarrollo y revisión es en su manera de afrontar la cognición individual, superando su focalización en los conocimientos institucionales. Esta focalización lleva a prescindir dentro del enfoque antropológico de los fenómenos relacionados con el aprendizaje del sujeto y del análisis de las interacciones discursivas en el seno de la clase. “La problemática del ‘sentido’ de la actividad matemática de los alumnos y del ‘sentido’ de los conocimientos que adquieren, [la aproximación antropológica] se sustituye por la de las condiciones de vida y de desarrollo de las organizaciones praxeológicas a la vez producto y factores de esta actividad” (Bosch y Chevallard 1999, p. 119).

El modelo ontológico-semiótico que describimos a continuación trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo,

se tienen en cuenta facetas o dimensiones del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

II. OBJETOS MATEMÁTICOS Y PUNTOS DE VISTA DESDE LOS QUE SE PUEDEN CONSIDERAR

1. Objetos matemáticos

En consonancia con el interaccionismo simbólico, vamos a considerar como objeto o entidad matemática “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia”⁵, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas. En la descripción de la actividad matemática nos referimos a muchos y diversos “objetos”, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos. No parece posible encontrar una relación exhaustiva de tales objetos, ni proponer una clasificación única válida para cualquier propósito, pero los intentos de clasificación de los objetos estudiados en una ciencia son, sin embargo, propios y característicos de la actividad científica. En nuestro caso proponemos las siguientes categorías o tipos de entidades matemáticas, basándonos en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: *situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones*. Consideramos estos tipos como “entidades primarias”, las cuales se pueden a su vez agrupar en entidades secundarias como: praxis, logos, praxeologías, conceptos-sistema, campos conceptuales, teoría de grupos, aritmética, geometría, etc.

Indicamos a continuación los objetos que incluimos en cada categoría y las funciones específicas de cada categoría en el trabajo matemático:

- (1) *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

5. Blumer 1982, p. 8.

- (2) *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.
- (3) *Acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- (4) *Conceptos*⁶, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...).
- (5) *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- (6) *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional – se ponen en lugar de las restantes – y también instrumental, o sea deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales. Las situaciones-problemas matemáticos son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones (algoritmos, operaciones, procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin. Parece apropiado describir a estos dos componentes (situaciones-problemas y acciones) como *praxis* según propone Chevallard (1997). Los otros tres componentes (conceptos-definiciones, proposiciones, argumentaciones) desempeñan un papel normativo en las matemáticas. Son el resultado de una actividad reflexiva y regulativa de la *praxis*; conjuntamente se pueden describir como los componentes teóricos o discursivos (*logos*, Chevallard 1997).

6. Los conceptos y propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como “reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones” para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker 1985, p. 285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de “concepto” es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones) que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología.

Este agrupamiento de las entidades matemáticas en praxis y logos no suprime sus relaciones de interdependencia. El lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva tanto en la praxis como en el logos; el logos encuentra su razón de ser en la praxis y ésta se desarrolla y rige por el logos. Nuestra modelización ontológica interpreta algunos objetos introducidos en la Teoría antropológica (los de la *praxis*, tareas y técnicas, asumidos aquí como situaciones y acciones) y sustituimos el *logos* (tecnología y teoría) por objetos que los consideramos constituyentes de tales entidades de segundo orden, como son los conceptos-regla, las proposiciones y las argumentaciones. Consideramos que de este modo se hace más explícito y operativo el componente discursivo o teórico de las praxeologías matemáticas. Incluimos también como componentes de las praxeologías las entidades lingüísticas (presentadas como objetos ostensivos en la teoría antropológica, y como representaciones por la teoría de los campos conceptuales).

Queda abierta la posibilidad de que cada uno de estos tipos de entidades primarias se descomponga a su vez en otros objetos y subtipos, como ya se indica en las enumeraciones que hacemos para describir los tipos propuestos: lenguaje (términos, expresiones, notaciones, etc.), situaciones (problemas, ejercicios, tareas, ...), etc. La consideración de nuevos subtipos vendrá determinada por el foco de interés de la investigación. Nuestro modelo ontológico sitúa al lenguaje, en sus diversas manifestaciones, en el centro de atención de la didáctica, pero sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad. Los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que identificamos en un trabajo anterior (Godino y Batanero 1994) continúan siendo objetos teóricos esenciales en el análisis didáctico matemático. La nueva tipología de objetos aporta nuevas herramientas para operativizar tales sistemas de prácticas.

2. Facetas o dimensiones de los objetos matemáticos

El modelo ontológico propuesto se complementa y enriquece con la consideración de las *cinco facetas o dimensiones duales*, que junto con la noción de función semiótica como entidad relacional entre los distintos tipos de entidades, permite describir y relacionar una variedad de nociones cognitivas propuestas desde diversas teorías.

Según las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje⁷ en que participan, las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, expresión y contenido. A continuación explicamos el uso que damos a estos términos⁸:

2.1. La dualidad “personal / institucional”

Dependiendo de las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de la manifestación de un sujeto individual, como la respuesta a una prueba de evaluación, la realización de una tarea escolar por un estudiante, hablamos de objetos personales, al ser portadores, al menos potencialmente, de rasgos idiosincrásicos de sus conocimientos. Por el contrario si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales al tener connotaciones normativas o convencionales, o sea, los objetos son usados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el ejemplo del texto incluido en el anexo 1, los distintos objetos que se incluyen tendrán la consideración de institucionales cuando el texto es usado como recurso instruccional por un profesor. Por el contrario las respuestas de la estudiante a una prueba de evaluación incluidas en la sección III contienen objetos personales, tanto si se trata de las entidades primarias como secundarias.

Las interacciones entre los miembros de un grupo de alumnos pueden dar lugar a acuerdos en el seno del grupo, produciendo

7. Siguiendo a Baker y Hacker (1985, p. 96) consideramos “juegos de lenguaje” cualquier fragmento de nuestras prácticas lingüísticas efectivamente realizadas. Según esta interpretación de la noción de Wittgenstein, la transcripción de una interacción comunicativa en la clase, o un fragmento de un texto, constituyen juegos de lenguaje: en estas situaciones comunicativas específicas es donde debemos buscar el significado en uso de los términos y expresiones matemáticas.

8. Los ejemplos se refieren al texto que incluimos en el Anexo 1 sobre el estudio de la mediana en un libro de texto para secundaria.

“maneras de actuar y hablar” compartidas, que pueden recibir un cierto grado de regulación interna al grupo. De este modo emerge una “microinstitución” local, que en una fase posterior del proceso de estudio puede interactuar con otros grupos, o con la cultura matemática representada por el profesor, produciéndose, o no, acoplamientos progresivos entre las “cogniciones institucionales” temporalmente constituidas.

La distinción entre cognición personal e institucional es habitual en las publicaciones usuales en educación matemática, aunque no siempre se conciben de la misma manera. La noción de relación personal e institucional con el objeto es clave en el enfoque antropológico propuesto por Chevallard (1992), como también es importante la distinción entre conocimientos institucionales y personales introducida en los enfoques socioculturales (Cobb 1989).

Nosotros asumimos que la distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de “posiciones” en el sistema didáctico interesa que se refleje también en los propios objetos de enseñanza y de aprendizaje (objetos y significados personales e institucionales), ya que ello permite caracterizar el aprendizaje como “acoplamiento progresivo” entre significados personales e institucionales. Estos significados pueden ser elementales o sistémicos (praxeológicos). En el límite ambos significados pueden coincidir, pero puede que este hecho no ocurra.

2.2. La dualidad “elemental / sistémico”

En el texto del Anexo 1, los conceptos estadísticos de media, mediana y medidas de tendencia central se están considerando como entidades compuestas, con una cierta organización o estructura (concepto-sistema). Sobre las medidas de tendencia central se supone que están compuestas por la media y la mediana (la moda será estudiada después), y que entre estos dos objetos hay una determinada relación. La media se menciona como algo que se calcula y que dicho cálculo tiene el rasgo o propiedad de que hace intervenir todos los datos. La mediana se va configurando como un sistema complejo que incluye ciertos tipos de tareas específicas, técnicas de cálculo y la propiedad de ser mejor representante que la media en ciertos tipos de situaciones. Por el contrario, las expresiones “conjunto de datos”, “representación”, “ordenación creciente de un conjunto de datos”, entre otras, como las operaciones aritméticas de adición y división, se ponen en juego de manera transparente, como si se tratara de entidades unitarias o elementales. Esta distinción elemental-sistémico

(o unitaria-compuesta) es también aplicable a las restantes entidades primarias y secundarias.

2.3. La dualidad “ostensivo / no ostensivo”

Cualquiera de los objetos tiene una faceta ostensiva, esto es perceptible, y otra no ostensiva. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). Pero las entidades praxémicas y discursivas, aunque son intrínsecamente diferentes de las lingüísticas necesitan a estas entidades de manera esencial para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello lo consideramos como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial serán las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados; la palabra “mediana”, la notación “Me”, u otro cualquier recurso expresivo puede ser imaginado. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Bosch y Chevallard (1999) usan los términos ostensivo y no ostensivo para clasificar el mundo de los objetos en dos clases disjuntas, los ostensivos, que tienen una cierta materialidad, y los no ostensivos, que no la tienen (conceptos, nociones, intuiciones, etc.). Estudian con detalle los diversos registros de los cuales están hechos los ostensivos, y sobre todo su papel esencial en el trabajo matemático.

En nuestro modelo consideramos la distinción ostensivo / no ostensivo como una faceta o dimensión dual aplicable a los distintos objetos primarios (y secundarios). El motivo es que un objeto ostensivo (una palabra escrita, un gráfico, etc.) puede ser también pensado, imaginado, por una persona, o puede estar implícito en un discurso matemático institucional (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica). Análogamente, un cálculo puede ser realizado por una persona de manera ostensiva, o mentalmente; un ordenador calcula “internamente” de manera no ostensiva. Es como si los objetos ostensivos también pudieran funcionar como no ostensivos. Esta paradoja la resolvemos hablando de objetos lingüísticos (lenguaje en sus diversos registros) como entidades funcionales primarias, las cuales pueden ser ostensivos o no ostensivos, tanto si son considerados como objetos personales o institucionales.

2.4. La dualidad “ejemplar / tipo”

La distinción ejemplar / tipo es clásica en la teoría del lenguaje. Nosotros aquí usamos esta distinción para proponer una interpretación lingüística de la distinción concreto / abstracto, tan usual en el trabajo matemático, que se puede aplicar, no sólo a los objetos conceptuales, sino a cualquiera de los seis tipos de entidades primarias y a las secundarias. Se corresponde con lo que en otros trabajos hemos presentado como objetos extensivos e intensivos. Consideramos que puede ser una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo.

En el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

La consideración de un objeto como concreto o abstracto es esencialmente relativa dependiendo del juego de lenguaje en que participen. Cualquiera de las entidades consideradas (primarias o secundarias) pueden ser consideradas como concretas o abstractas según mostramos en el texto del Anexo 1:

- Lenguaje: El término “mediana” y la notación “Me” son ejemplares del tipo “expresión de la mediana” que incluye, entre otras, “percentil del 50%”, “segundo cuartil”, etc.
- Situaciones: Los ejemplos en los que se requiere calcular la mediana son ejemplares del tipo situacional, “búsqueda de un valor representante de un conjunto de datos con valores atípicos”.
- Acciones: El cálculo de la media y la mediana se realiza en casos particulares con unos pocos valores; se espera que el sujeto sea capaz de aplicar esas técnicas en casos más generales.
- Conceptos (definiciones): Se dan cuatro definiciones de la mediana, correspondientes a cuatro maneras de obtener el valor de la mediana en casos particulares. Se puede decir que la mediana es una función que hace corresponder a una colección de datos el número real solución del sistema de inequaciones, $F(x) \leq 1/2$, $F(x) \geq 1/2$, siendo F

la función de distribución de la variable estadística que describe los datos. Esta es una definición más general (abstracta) que las dadas en el texto. Pero dentro del juego de lenguaje del texto cualquiera de esas definiciones son descripciones generales de los valores obtenidos en casos particulares.

– Proposiciones: Se afirma que la mediana es más representativa que la media cuando hay valores atípicos. Este es una formulación particular de las posibles propiedades estadísticas, aritméticas y algebraicas de la mediana. Se podría formular en términos más generales haciendo mención a la asimetría de las distribuciones.

– Argumentos: Las justificaciones que se dan en el texto son del tipo “comprobaciones en un caso particular”. Habría que probar que el valor central de la serie de datos es el más próximo a la mayoría de los datos, esto es, probar la propiedad de que la suma de las desviaciones absolutas respecto de un valor a de la serie de datos es mínima cuando $a = Me$.

2.5. La dualidad “expresión / contenido” (o “significante / significado”)

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, con los diversos “apellidos” que les asignamos según su naturaleza y función, no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. El uso que hacemos de estos términos es el que propone el lingüística danés Hjelmslev (1943). Este autor llama *función semiótica* a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Nosotros añadimos a esta noción de función semiótica la ontología matemática que hemos descrito y afirmamos que cualquiera de las entidades consideradas puede desempeñar el papel de expresión o contenido. Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos

componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, la semiótica que proponemos generaliza de manera radical la noción de representación, tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

Veamos en el ejemplo del texto sobre la mediana que, en efecto, las diversas entidades pueden desempeñar el papel de expresión y contenido (significante y significado) de las funciones semióticas:

– Lenguaje: Es obvio que cualquier entidad lingüística remite a los contenidos no lingüísticos. El término “mediana” es la expresión de la función semiótica cuyo contenido es el concepto de mediana (en unos casos refiere al concepto-definición y en otros al concepto-sistema). Pero también el lenguaje puede ser contenido. Así, por ejemplo, la notación Me se pone en lugar de “mediana”; en general las operaciones de traducción de unas expresiones en otras lleva a que las entidades lingüísticas sean contenidos de funciones semióticas. Como todas las restantes entidades son contenidos de las respectivas entidades lingüísticas, hay que mostrar que también pueden ser expresión (antecedente).

– Situaciones: Los ejemplos dados en el texto están en lugar de los tipos de situaciones correspondientes. Se espera que el sujeto sea capaz de resolver tareas del mismo tipo que las mostradas; ello requiere que interprete dichas situaciones como ejemplares de un tipo más general.

– Acciones: Los procedimientos de cálculo de la media y mediana se están considerando como ejemplos de maneras de operar en situaciones similares. Son expresión de una manera de operar con las colecciones de datos.

– Conceptos: Los conceptos de media y mediana son presentados como medidas de tendencia central, pudiendo desempeñar un papel de representación (expresión) del sistema completo. También estos conceptos se ponen en correspondencia con los conjuntos de datos, usándose como representantes en ciertas circunstancias del conjunto de datos. Cada concepto-definición de mediana se relaciona con el concepto-sistema (praxeología) de la mediana.

– Propiedades: Se afirma que la mediana es más representativa que la media en ciertos casos. En el estudio de las propiedades de la mediana, ésta es una propiedad estadística entre otras propiedades aritméticas y algebraicas. La relación que se establece aquí entre esta propiedad y las restantes es de pertenencia a una clase de propiedades.

– Argumentos: Al igual que en los conceptos y propiedades se trata de ejemplos de argumentaciones para validar una afirmación. La relación que se establece es por tanto de miembro a clase. Pero también se puede considerar el papel instrumental que tienen los argumentos: por medio de la argumentación presentada se da por válida la proposición

correspondiente. Aquí el rol que desempeña la expresión no es de representación, ni composición, sino de instrumento de validación.

3. Enfoque semiótico de los conocimientos matemáticos

El esquema de la figura 1 resume el modelo ontológico-semiótico que proponemos como instrumento de análisis de la actividad matemática y sus producciones epistemológicas y cognitivas. Las entidades lingüísticas ocupan un lugar central ya que las consideramos como el punto de entrada para indagar la presencia y el papel desempeñado por las restantes entidades.

La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (sea ostensivo o no ostensivo, elemental o sistémico, etc.) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como fectivo. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un *conocimiento*. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Uno de los puntos diferenciadores de nuestro modelo teórico está en la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto personales como institucionales. Junto a los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) consideramos necesario distinguir los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problemas, tareas), conocimientos lingüístico-notacionales y conocimientos argumentativos-validativos.

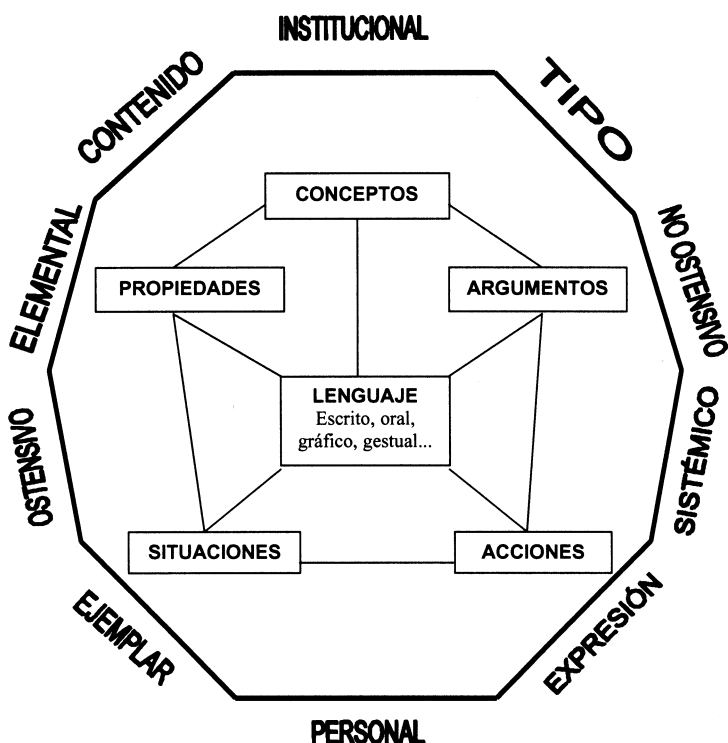


Figura 1. Componentes y facetas de la cognición matemática

Por otra parte, consideramos que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas pero cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La “cognición personal” es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

El modelo semiótico que hemos descrito incorpora aspectos propios tanto de las teorías pragmáticas (u operacionales) del significado como de las realistas (o referenciales). El significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace de ellos en los contextos institucionales y los juegos de lenguaje de los que forman parte. Pero esto no implica que renunciemos a la

posibilidad de encontrar usos prototípicos que indicamos con nuevos términos y expresiones, como si se tratasen de objetos emergentes de los sistemas de usos. La metáfora del objeto resulta útil para comprender el funcionamiento del pensamiento, y no tenemos necesidad de rechazarla si controlamos su empleo. Esta compatibilidad de las teorías operacionales y referenciales del significado está apoyada en posiciones como la de Ullmann (1962, p. 76), quien afirma:

El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro.

Para nosotros el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

4. Algunas implicaciones y trabajos desarrollados

El modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática presentado puede ser útil para caracterizar significados elementales y sistémicos puestos en juego en los procesos de estudio matemático, mediante la técnica del análisis semiótico que se desarrolla en la sección III. A nivel más general consideramos que permite confrontar herramientas propuestas por distintos modelos teóricos para el análisis de la cognición matemática. En Godino (2001) hemos iniciado esta confrontación con algunas nociones propuestas en la Teoría de situaciones didácticas, Teoría de los campos conceptuales y Teoría antropológica. A título de ejemplo mencionamos algunas de estas comparaciones entre nociones cognitivas.

La modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de *esquema* como la faceta interiorizada (no ostensiva) de una praxeología personal, y las nociones de *concepto-en-acto*, *teorema-en-acto* y *concepción* como componentes parciales constituyentes de dichas praxeologías personales (correspondientes a las entidades funcionales primarias, concepto-regla y propiedad. Pueden

desempeñar, por tanto, un papel en el análisis cognitivo, aunque sin perder de vista su parcialidad. El constructo praxeología (personal) se revela como un instrumento con mayores posibilidades descriptivas y explicativas al incorporar en un sistema organizado los componentes praxémicos, discursivos y lingüístico (ostensivos).

El uso que se hace en Teoría de Situaciones de la noción de sentido queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y “le da su sentido” (podemos describirlo como “significado situacional”). Según nuestro modelo teórico esta correspondencia es sin duda crucial al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto. En nuestro caso, la noción de significado (o sentido) de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; puede referirse a una praxeología, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).

La noción de representación y registro semiótico usadas por diversos autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos (instrumental y componencial).

En la sección III aplicamos algunas de las nociones introducidas en el modelo teórico y desarrollamos la técnica que designamos como análisis semiótico para caracterizar significados elementales y sistémicos puestos en juego en un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. No pretendemos mostrar las posibilidades del modelo teórico descrito para la didáctica de las matemáticas sino más bien ejemplificar algunas de sus consecuencias. En distintos momentos de su desarrollo, el modelo teórico ha servido de marco de referencia para diversas investigaciones como las tesis doctorales de Ortiz (1999), Recio (1999), Roa (2000), Font (2000a), Tauber (2001) y Arrieche (2002). En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2001) se realiza una aplicación práctica del análisis semiótico a la noción de límite de una función. Remitimos al lector a estos trabajos así como al artículo de Font (2000b) donde se compara la “teoría de las funciones

semióticas” con las principales corrientes epistemológicas y cognitivas usadas en educación matemática.

III. DETERMINACIÓN DE SIGNIFICADOS A PARTIR DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO

1. Análisis semiótico de un texto

En esta sección presentaremos una técnica analítica para determinar los significados institucionales y personales puestos en juego en los procesos de instrucción matemática. Se basa en el uso sistemático de la noción de función semiótica y de la ontología matemática descrita en la sección II. La comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

Tanto los significados sistémicos como los elementales pueden ser determinados a priori, en la fase de planificación del proceso de estudio, o al finalizar tal proceso. La metodología que desarrollamos también permitirá describir el proceso de cambio de los significados como consecuencia de las interacciones en el aula, los conflictos semióticos y los procesos de negociación entre significados personales e institucionales.

Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas. En definitiva, el análisis se aplicará a un *texto* que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes. Llamaremos *análisis semiótico* de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

El análisis semiótico será pues, para nosotros, la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales

atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

El análisis semiótico ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. El análisis se basará en descomponer el texto en unidades, que denominaremos semióticas. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, tendremos en cuenta para delimitar las unidades de análisis los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en nuestro modelo teórico o también entidades mixtas derivadas.

Consideramos el análisis semiótico “a priori” como etapa previa y crucial del análisis didáctico-matemático porque permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requerirán procesos instruccionales específicos. Este análisis nos va a permitir describir el “significado institucional local” del contenido estudiado, en nuestro caso “la mediana”, y la distribución temporal de sus distintos elementos.

La valoración del carácter más o menos completo del significado local requiere disponer de un patrón de comparación que denominaremos *significado (institucional) de referencia*. Esta comparación entre significados institucionales se puede describir como la “transposición didáctica” localmente implementada en el proceso de estudio. En el Anexo 2 incluimos un significado de referencia para la mediana, elaborado a partir del análisis de diversos textos y de la práctica del análisis estadístico.

En los siguientes apartados aplicaremos esta metodología al análisis de los significados institucionales implementados en un proceso de estudio de la mediana propuesto en un libro de secundaria (Anexo 1). En la sección 4 aplicaremos la técnica al análisis de las respuestas escritas de una estudiante a una prueba de evaluación sobre la mediana realizada al finalizar un proceso de estudio del tema según el contenido propuesto en el texto citado. La experiencia se realizó en

un curso de 1º de Magisterio con estudiantes que no habían estudiado antes estadística.

En la subsección 1 presentamos la técnica del análisis semiótico aplicada a la parte del texto considerada (Anexo 1). No pretendemos hacer un análisis exhaustivo de todas las posibles interpretaciones que los diversos agentes pueden realizar de todas las unidades de análisis en que se puede descomponer la crónica. En principio cada *unidad* se puede descomponer en tantas *subunidades* como términos y expresiones matemáticas contenga, o también varias unidades se pueden agrupar y constituir unidades semióticas más extensas. Esto puede hacer muy laborioso el análisis de las posibles interpretaciones. Será el profesor o investigador, dependiendo de los fines que pretenda, quién fijará el nivel de análisis necesario, teniendo en cuenta el *medio cognitivo* sobre el que se desarrolla el proceso, esto es, los conocimientos que se consideran transparentes en el proceso instruccional correspondiente. Por ejemplo, la expresión “media aritmética” incluida en U_1 puede no considerarse aquí como una unidad semiótica ya que acaba de ser inmediatamente estudiada en el libro de texto y se puede suponer que el aprendiz está en condiciones de asignar un significado a la misma. Igual ocurre con “medidas de centralización”. No obstante, el significado (sistémico) personal de ambas expresiones va a ser ampliado tras este proceso de estudio. La media aritmética dejará de ser considerada como representante de un conjunto de datos que tenga algún valor atípico, o se trate de datos ordinales. Las medidas de centralización se enriquecerán con el conocimiento de la mediana.

El análisis semiótico del texto tomado como ejemplo, desde el punto de vista de un *alumno*, tiene el carácter de análisis a priori (o potencial) ya que se refiere a las interpretaciones (y los conflictos semióticos) que puede poner en juego un alumno hipotético que estudie la mediana en este “sistema didáctico”. En consecuencia, los significados que aquí mencionamos son una muestra de los que efectivamente pudieran acontecer. Desde el punto de vista del *profesor* – en este caso será el autor del texto – el análisis tiene un carácter a posteriori ya que el texto es la expresión efectivamente emitida por el autor. Las interpretaciones que atribuimos al *investigador* (persona que analiza y valora los diversos significados puestos en juego) se deben adscribir al autor de este trabajo y tienen también un carácter a posteriori.

2. Trayectoria semiótica y conflictos semióticos potenciales

Para ejemplificar las nociones teóricas que acabamos de introducir analizaremos en este apartado los conocimientos (entendidos como

funciones semióticas) y conflictos semióticos potenciales identificables en el proceso instruccional que usamos como ejemplo (Anexo 1). En la tabla 1 reproducimos la parte del texto que vamos a analizar y las unidades primarias de análisis; dada la extensión de un análisis completo analizaremos como ejemplo las unidades U_1 , U_2 , U_3 , U_4 y U_8 . En la tabla 2 listamos las entidades matemáticas puestas en juego en el texto completo, que serán las unidades elementales del análisis.

U_0	<i>La mediana</i>
U_1	Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos ♦,
U_2	ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos. ♦
U_3	Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos, ♦
U_4	como ocurre en el siguiente ejemplo: <i>En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son 60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos? ♦</i>
U_8	<i>La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él. ♦</i>

Tabla 1. El texto y las unidades primarias de análisis

Praxis	Lenguaje	Teoría
<i>Situaciones:</i> – Búsqueda de un valor representativo de un conjunto de datos con valores atípicos <i>Técnicas:</i> – Cálculo de la media	<i>Términos y expresiones:</i> Mediana, medidas de centralización, media aritmética, representa, conjunto de datos; ordenado, variable, valor <i>Notaciones:</i> $\bar{x} = (60.000 + \dots + 380.000) : 5 = 136.000 \text{ pts}$	<i>Conceptos:</i> mediana, medidas de centralización, media aritmética, representación, conjunto de datos; ordenación, variable, valor. <i>Propiedades:</i> – La media mejor representante (1) – La mediana, mejor representante que la media cuando existen valores “atípicos” (2) – En el algoritmo de cálculo de la media intervienen todos los datos <i>Argumentos:</i> – Justificaciones de (1) y (2)

Tabla 2. Entidades matemáticas (unidades elementales)

El título de la lección, “La mediana”, es la primera unidad de análisis del texto y nos sirve para ejemplificar la faceta elemental-sistémico de los objetos matemáticos. Aquí el término “mediana” no se refiere al concepto-definición correspondiente, sino a todo el sistema de

prácticas operativas y discursivas (praxeología) que van a ser presentadas en el resto del texto. Esta praxeología es lo que significa aquí, localmente, el término “mediana” y puede diferir de la praxeología desarrollada por otro libro de texto del mismo nivel educativo. También será diferente del significado que se le atribuye en el contexto institucional de los estadísticos profesionales.

La propia expresión de U_1 (“Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos”) deberá ser interpretada globalmente constituyendo una unidad semiótica. A su vez se puede descomponer en otras subunidades: U_{1-1} , medidas de centralización; U_{1-2} , media aritmética; U_{1-3} , conjunto de datos; U_{1-4} , mejor representa a un conjunto de datos. El autor del texto usa la expresión U_1 como parte de la motivación o justificación del proceso de estudio de la mediana que se presenta en el texto analizado. La media se presenta en el libro de texto como una medida de centralización de un conjunto de datos inmediatamente antes de esta sección, resaltando su carácter de valor representativo. Mediante U_1 quiere expresar que no siempre (aunque sí en la mayoría de los casos) la media es el mejor representante. El significado de este texto para el autor está ligado al texto precedente y también al texto que sigue (presentación de situaciones en los que se debe elegir un representante diferente). Para el profesor los términos y expresiones que componen U_1 son transparentes, no precisan interpretación, funcionando de manera elemental. El alumno tiene que descomponer U_1 en sus términos constituyentes para asignarle un significado e interpretar dichos elementos. En este momento del proceso de estudio, el alumno puede atribuir un significado a U_{1-2} (la media aritmética), ya que acaba de ser estudiada, pero puede tener dificultades con U_{1-1} , U_{1-3} y U_{1-4} , ya que como medidas de centralización sólo conoce hasta este momento la media, y a la expresión “valor representante de una colección de datos” no se le ha asignado un significado (sólo se ha usado para afirmar que “la nota media 7 es la que mejor representa a las calificaciones 7, 8, 6, 5 y 9”). ¿Qué significa para el alumno que un valor *represente* a otros? Desde el punto de vista matemático se afirma que la media es un representante de un conjunto de datos porque la suma de las desviaciones de los datos a la media es cero. Pero en otros casos para afirmar tal representación se requiere que el valor elegido no se vea afectado por valores extremos atípicos (mediana). En U_1 la media aritmética funciona intensionalmente (abstracta) cuando se dice que “la media representa a un conjunto de datos”, ya que se habla de manera genérica, mientras que cuando se afirma que “la media es una medida de tendencia central”, la media funciona de manera extensional (el objeto media como ejemplar o

miembro de una colección). También vemos aquí que el concepto de “media” se pone en representación del concepto de “medidas de tendencia central”, lo que indica que en una función semiótica la expresión no tiene por qué ser una entidad lingüística.

El uso que hace el autor del texto de U_2 (“ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos”) es el de servir de justificación a la afirmación hecha en U_1 . Ambas unidades son interdependientes, U_2 es el instrumento con que pretende validar U_1 . Para el alumno la comprensión de la expresión requiere recordar cómo se calcula la media e interpretar la subexpresión “intervienen todos los datos” como el hecho de que se suman todos los valores de la variable estadística. Interviene una entidad actuativa (cálculo de la media) y una propiedad de dicha entidad. Desde el punto de vista del investigador, U_2 no puede servir como validación de U_1 . El hecho de que en el cálculo de la media intervengan todos los valores de la variable no es la razón por la cual la media “es generalmente” el mejor representante. Precisamente, en el ejemplo del conjunto de datos con un valor atípico que se estudia a continuación, esa característica es la razón por la cual la media deja de ser un buen representante. Encontramos aquí un ejemplo de conflicto semiótico entre dos agentes institucionales.

Para el autor U_3 (“Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos”) forma parte de la secuencia que trata de justificar el estudio de la mediana, asignándole la propiedad de ser “mejor representante” en algunos casos. El estudiante puede tener dificultades para comprender la expresión, tanto por el término “mediana” (al que aún no se ha asignado un significado) como por el término “representa” según se ha indicado anteriormente.

Desde el punto de vista del autor, U_4 (“como ocurre en el siguiente ejemplo: *En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son 60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos?*”) designa un ejemplo particular de un tipo de problemas en los que se debe encontrar un valor representativo de un conjunto de datos en el caso de que exista algún valor atípico (380.000 pts). En este caso la media no se considera adecuada al ser un valor bastante diferente de la mayor parte de los datos de la colección (aunque estará más próxima al valor atípico). Aquí se está suponiendo que “el valor representativo” debe ser un valor próximo a la mayoría de los datos. Estas interpretaciones no son compartidas por el estudiante en este momento del proceso. ¿Qué es representar a una colección de datos? ¿En qué circunstancias se necesita representar una colección de datos por un único valor? Estas son cuestiones básicas para dotar de

significado a la tarea propuesta y, por tanto, a todo el contenido pretendido. La correspondencia semiótica entre ejemplar de tarea y el tipo correspondiente, así como entre el modo particular de actuar para resolverla y la técnica generalizada, no puede ser establecida por el estudiante, ya que la constitución de tales tipos no se contempla en el proceso. Parece poco probable que el alumno ordene de menor a mayor el conjunto de datos y proponga el “valor central” de la serie ordenada como representante. La presentación de esta técnica por parte del profesor parece inevitable dado el carácter convencional de la expresión “mejor representante” y su dependencia de las características de la variable estadística.

Para el autor del texto U_8 (“La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él”) es la definición del concepto de mediana, una nueva medida de centralización de una colección de datos estadísticos que se caracteriza por dividir la colección de datos, supuesta ordenada, en dos partes de igual tamaño. Desde la posición del investigador la definición dada no es válida en general ya que las desigualdades que se indican en el enunciado no son estrictas sino mayor o igual (menor o igual). En el caso de haber valores repetidos la definición dada no caracteriza la mediana. En el ejemplo propuesto en U_{19} y U_{20} (datos repetidos) la mediana es 14. Pero datos inferiores a 14 hay 4, y datos por encima de 14 hay 8. La aplicación de esa regla requiere una formulación diferente para aceptar que 14 es la mediana. Para el alumno que se enfrenta por primera vez a esta clase de problemas, la comprensión de la expresión U_8 requerirá atribuir significado a las dos subexpresiones siguientes: U_{8-1} , “conjunto ordenado de datos de una variable”; U_{8-2} , “valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él”. No es suficiente con entender los términos y expresiones del enunciado de la regla. También hay que dominar las técnicas de su aplicación y, además, discriminar las diversas circunstancias en que se usa. El texto desarrolla tres técnicas distintas para calcular la mediana: U_9 (identificación del valor central de la serie ordenada cuando el número de datos es impar), U_{12} (cálculo de la media de los dos datos centrales cuando el número de datos es par) y U_{23} (identificar el primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos). La forma de expresar el resultado de las técnicas, “la mediana es...”, hace que el estudiante se encuentre aquí con tres nuevas definiciones de la mediana cuya equivalencia con la caracterización inicial no es evidente ni inmediata. Esto puede explicar algunos de los errores encontrados en diversas investigaciones sobre la mediana. Si decimos

que la mediana “es el valor central de la serie de datos”, el alumno, ante una tabla de frecuencias puede dudar si el valor central a que se refiere “la definición” es el que corresponde a las frecuencias, o a la serie de valores de la variable.

Este análisis sugiere la complejidad de cualquier noción matemática. El término “mediana” designa a un sistema de prácticas (operatorias, discursivas) que progresivamente se va enriqueciendo a medida que progresa el proceso de estudio de un campo de problemas, en este caso, la búsqueda de un valor representante de un conjunto de datos, cuando tal conjunto tiene valores atípicos, se distribuye asimétricamente, o la escala de medida es ordinal. Habitualmente se considera que la definición de la mediana describe el concepto de mediana, un objeto o entidad abstracta que tiene un cierto número de propiedades que el matemático descubre. Si bien este modo de considerar los conceptos parece útil para la organización teórica de los conocimientos matemáticos, desde el punto de vista de la didáctica (que tiene en cuenta, entre otras, la faceta cognitiva), oculta la “razón de ser” de estas construcciones, su conexión y dependencia de las situaciones-problemas, de los recursos expresivos, de los modos de actuar y argumentar.

3. Significado local de la mediana

El análisis que hemos desarrollado nos permite caracterizar los elementos del significado (institucional) local del contenido matemático pretendido en el proceso de estudio, los cuales pueden ser confrontados con el significado de referencia correspondiente. Indicamos a continuación estos elementos para el texto analizado sobre la mediana y los comparamos con el significado de referencia (Anexo 2) que hemos elaborado a partir de textos de estadística y teniendo en cuenta la práctica del análisis de datos.

Lenguaje (específico)

“Mediana”, Me. Disposición ordenada de datos en forma de listado (horizontal y vertical) (lo que permite visualizar la mediana como la posición central de la ordenación). Tablas de frecuencias

Representaciones no usadas

Percentil 50%; 2º cuartil; 5º decil. Abscisa del punto del gráfico acumulativo de frecuencias absolutas (relativas) cuya ordenada es $n/2$ (0.5). Diagramas acumulativos; gráfico de cajas, etc.

Situaciones

Ejemplos de los siguientes tipos de problemas: búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística cuantitativa con un valor atípico (con número impar y par de datos); búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una

variable estadística medible en escala ordinal; búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística cuantitativa con datos repetidos dados en forma de listado y de tabla de frecuencia (situación no específica de la mediana).

Situaciones no estudiadas

Distribuciones de frecuencias no simétricas sin valores atípicos. Variables continuas con datos agrupados en intervalos de clase. Variables representadas gráficamente.

Acciones /técnicas

Ejemplos de las siguientes técnicas: cCálculo de la mediana para un número impar de valores; cálculo de la mediana para un número par de valores; cálculo de la mediana en la tabla de frecuencias acumuladas de variables discretas.

Técnicas no estudiadas

Cálculo correspondiente al caso de datos agrupados en intervalos de clase (interpolación). Determinación gráfica mediante el polígono acumulativo de frecuencias. Uso de software estadístico y calculadoras.

Conceptos

Cuatro caracterizaciones de la mediana (incluyendo la formulación como valor central): valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo; el dato central de una colección de datos en número impar supuestos ordenados de menor a mayor; la media de los dos datos centrales de una colección de datos en número par, supuestos ordenados de menor a mayor; el primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada, inmediatamente superior a la mitad del número de datos.

Propiedades

Propiedad estadística: la mediana es un valor más representativo que la media en el caso de existir un valor atípico. La mediana es una medida de centralización.

Propiedades no estudiadas

Dado el contexto institucional en que se prevé usar el texto (nivel de secundaria) no se estudian las propiedades de la mediana (a excepción de la mención a su carácter representativo de la colección de datos en algunos casos).

Argumentos

Se justifica el uso de la mediana como valor más representativo que la media mediante un ejemplo (cuando la serie de datos tiene un valor atípico).

Validaciones evitadas

Equivalencia de las cuatro definiciones. Las nociones de “valor central” y “mejor representante” no quedan justificadas. Habría que

probar que el valor central de la serie de datos es el más próximo a la mayoría de los datos, esto es, probar la propiedad de que la suma de las desviaciones absolutas respecto de un valor a de la serie de datos es mínima cuando $a = Me$.

Se incluyen algunos elementos de lo que podría describirse como una “teoría matemática de las medidas de tendencia central de una variable estadística”: definiciones de mediana y alguna propiedad característica. Pero dado el nivel de enseñanza no se sistematizan los conceptos y propiedades ni se incluyen sus correspondientes justificaciones. El componente teórico básico sería, en este caso, la demostración de que la mediana es el valor a de la variable estadística que hace mínima la suma de las desviaciones absolutas de los distintos valores respecto de a . Se aprecia en el autor una preferencia por presentar elementos discursivos antes que los correspondientes elementos praxémicos (problemas y técnicas de solución). Primero se define el objeto y se le atribuyen propiedades y después se introducen los modos de actuar para resolver las tareas problemáticas. Dado que la “razón de ser” de las entidades discursivas se encuentra en los modos de resolver las clases de situaciones-problemáticas parecería recomendable invertir el orden del estudio. Incluso, en el nivel de enseñanza en que tiene lugar este proceso instruccional se podría prescindir del énfasis en presentar definiciones rigurosas, invirtiendo más tiempo en justificar (hacer razonable) la consideración del valor mediano como representativo. Parecería deseable que se pudiera dedicar tiempo en el proceso de estudio para introducir el uso de recursos gráficos tales como el “polígono acumulativo de frecuencias” y el ‘diagrama del tallo y las hojas’, los cuales permiten *visualizar* y calcular de manera complementaria la mediana.

IV. DETERMINACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES MEDIANTE EL ANÁLISIS SEMIÓTICO

1. Protocolo de respuesta de una estudiante

Aplicaremos la técnica descrita en la sección III al análisis del protocolo de respuesta de una estudiante a una prueba de evaluación tras el proceso de estudio de la mediana realizado mediante el texto del Anexo 1. A un grupo de alumnos de 1^{er} curso de magisterio se les entregó copia de las dos páginas del manual en que se describe la mediana. Después de estudiado el tema individualmente durante un tiempo aproximado de 45 minutos se les aplicó la prueba que se indica en el cuadro 3; incluimos, además las respuestas dadas por una estudiante.

Prueba de evaluación sobre la mediana y protocolo de respuesta de Isabel

	1. Explica qué es la mediana y para qué se usa																														
U_1	Mediana: Es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él.																														
U_2	Representa el número al que más se acercan un número de datos, es decir,																														
U_3	la media más representativa que la media aritmética.																														
U_4	Hay dos tipos de medianas:																														
U_5	Mediana de un n° impar de datos, la mediana sería el dato central. Ejemplo, <div style="text-align: center;"> <table border="1"> <tr><td>80.000</td></tr> <tr><td>60.000</td></tr> <tr><td>40.000</td></tr> </table> </div> Mediana de un n° par de datos, la mediana es la media de los dos datos centrales. Ejemplo, <div style="text-align: center;"> <table border="1"> <tr><td>60.000</td></tr> <tr><td>50.000</td></tr> <tr><td>90.000</td></tr> </table> </div> suma de ambos : $2 = x$ 90.000	80.000	60.000	40.000	60.000	50.000	90.000																								
80.000																															
60.000																															
40.000																															
60.000																															
50.000																															
90.000																															
	2. ¿En qué tipo de datos estadísticos es preferible usar la mediana en lugar de la media?																														
U_6	En datos como por ejemplo: los sueldos de personas de una empresa, ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos.																														
	3. El peso en kilos de 9 niños es: 15, 25, 17, 19, 26, 16, 18, 19, 24.																														
	a) ¿Cuál es la mediana del peso de los 9 niños.																														
	b) ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que es de 43 kg?																														
	c) En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.																														
U_7	a) <div style="margin-left: 20px;"> <p>①.</p> <p>peso 9 niños. Mediana?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Variable (peso)</th> <th>Frec. Abs.</th> <th>Frec. Acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>25</td><td>1</td><td>1+1=2</td></tr> <tr><td>17</td><td>1</td><td>1+1+1=3</td></tr> <tr><td>19</td><td>2</td><td>2+1+1+1=5</td></tr> <tr><td>16</td><td>1</td><td>1+2+1+1+1=6</td></tr> <tr><td>24</td><td>1</td><td>1+2+1+1+1+1=7</td></tr> <tr><td>18</td><td>1</td><td>1+2+1+2+1+1+1=8</td></tr> <tr><td>24</td><td>1</td><td>1+2+1+1+1+2+1+1+1=9</td></tr> <tr><td>TOTAL</td><td>9</td><td>9</td></tr> </tbody> </table> <p>Como hay un dato que se repite lo hacemos de esta forma. $\frac{9}{2} = 4,5$ Mediana = 19 Es variable que corresponde a 5 de 19. \hookrightarrow frecuencia acumulada inmediatamente superior a 4,5 = 6 y por tanto corresponde a la variable 19. Mediana = 19</p> </div>	Variable (peso)	Frec. Abs.	Frec. Acumulada	15	1	1	25	1	1+1=2	17	1	1+1+1=3	19	2	2+1+1+1=5	16	1	1+2+1+1+1=6	24	1	1+2+1+1+1+1=7	18	1	1+2+1+2+1+1+1=8	24	1	1+2+1+1+1+2+1+1+1=9	TOTAL	9	9
Variable (peso)	Frec. Abs.	Frec. Acumulada																													
15	1	1																													
25	1	1+1=2																													
17	1	1+1+1=3																													
19	2	2+1+1+1=5																													
16	1	1+2+1+1+1=6																													
24	1	1+2+1+1+1+1=7																													
18	1	1+2+1+2+1+1+1=8																													
24	1	1+2+1+1+1+2+1+1+1=9																													
TOTAL	9	9																													
U_8	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Variable</th> <th>Frec. Abs.</th> <th>Frec. Acum.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>16</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>17</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>18</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>19</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>24</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>25</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>26</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>TOTAL</td><td>9</td><td>9</td></tr> </tbody> </table> <p>Mediana de 9 niños</p>	Variable	Frec. Abs.	Frec. Acum.	15	1	1	16	1	2	17	1	3	18	1	4	19	2	6	24	1	7	25	1	8	26	1	9	TOTAL	9	9
Variable	Frec. Abs.	Frec. Acum.																													
15	1	1																													
16	1	2																													
17	1	3																													
18	1	4																													
19	2	6																													
24	1	7																													
25	1	8																													
26	1	9																													
TOTAL	9	9																													
U_9	b) Si incluimos el peso de 43 kgs. <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Frec. Abs.</th> <th>Frec. Acum.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Total</td><td>10</td><td>41</td></tr> </tbody> </table> $M = 10/2 = 5$ La frecuencia acumulada inmediatamente superior a 5 es 6 y por tanto corresponde a la variable 19		Frec. Abs.	Frec. Acum.	Total	10	41																								
	Frec. Abs.	Frec. Acum.																													
Total	10	41																													
U_{10}	c) La media aritmética no sería un buen representante de los 10 niños ya que hay un peso (43 kg) muy superior a los otros y por tanto la media aritmética que saldría no sería buena representativa																														

2. Análisis semiótico de las respuestas de Isabel

2.1. Cuestión 1

Isabel da la misma definición presentada por el libro para la mediana, que exige que el conjunto de datos sea ordenado: “La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él”. La mediana funciona en la respuesta de Isabel bajo su faceta intensional, esto es, como una generalidad regulada mediante una definición precisa, una regla que debe ser seguida fielmente. En realidad la condición de que el conjunto de datos sea ordenado no es una exigencia del concepto de mediana, sino del procedimiento de cálculo. En el libro utilizado por Isabel no se menciona que si los datos no están ordenados, la mediana también es aplicable pero para determinar el valor que designamos como mediana el conjunto de datos se debe ordenar previamente. Parece que el fallo de la estudiante en los ejemplos que propone en U_5 no es debido al olvido de la definición del concepto que se da, sino carencias del proceso de estudio seguido. Isabel ha hecho una interpretación literal de la definición y no ha tenido en cuenta que las expresiones “por encima” y “por debajo” quieren decir “mayor” y “menor”, respectivamente.

La explicación que da Isabel, “el número al que más se acercan un número de datos” (U_2) se debe considerar adecuada desde el punto de vista del significado institucional local implementado, aunque “número de datos” tiene aquí el sentido de “conjunto de datos”. En el texto usado en el estudio, para descartar el uso de la media en el ejemplo de los sueldos, se afirma que los sueldos de cada una de las cinco personas están bastante alejados de las 136.000 pts. En realidad, ese acercamiento se debe referir a la globalidad del conjunto de datos, no de cada valor en relación a la mediana (la suma de las desviaciones a un promedio para el conjunto de datos es mínima para la mediana). Trata de caracterizar la mediana mediante una propiedad referida al mejor acercamiento del conjunto de datos. Este mejor acercamiento es su interpretación personal de la representatividad de las medidas de tendencia central. Es claro que en este primer encuentro con la mediana, y en el tiempo disponible, no es posible que el estudiante se apropie de los diversos aspectos del significado de referencia de este objeto matemático. En la expresión usada por Isabel, la mediana “representa al número que más se acerca...”, observamos la dificultad de la noción de representante. Aquí usa la acción de representar para indicar que la palabra “mediana” se refiere al número que cumple una cierta condición. Por el contrario, el uso de “representación” en el texto relaciona el número mediana con el conjunto de datos.

La expresión *la media más representativa que la media aritmética* (U_3) es una expresión incoherente; posiblemente quiere decir “medida de posición central más representativa que la media”, afirmación que en general es acorde con el significado de referencia. En el texto se afirma sólo que hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos; en realidad la mediana siempre “optimiza” la representación. Sin embargo, en muchas situaciones se utiliza la media porque si las distribuciones son simétricas ambos estadísticos coinciden, y la media se calcula con procedimientos aritméticos más eficaces.

El uso de dos técnicas de cálculo diferentes de la mediana, según que en la situación dada intervenga un número impar o par de datos, lleva a Isabel a considerar como dos “tipos de medianas” (U_4). Desde el punto de vista del significado referencial de la mediana ambos tipos de medianas se consideran como ejemplares del concepto más general de mediana, ya que cumplen los requisitos exigidos a la definición general de mediana. Este nuevo y más general nivel de abstracción no se implementa en el proceso de estudio local propuesto en el libro. Es cierto que hay razones para que el alumno considere que los dos números obtenidos por los procedimientos descritos son diferentes “objetos mediana”; en el segundo caso el número que se obtiene no coincide con ninguno de los datos propuestos, mientras que en el primero sí coincide. Su unificación vendrá identificando una propiedad común: la minimización, en ambos casos, de la suma de las desviaciones. En la resolución de los problemas propuestos en la evaluación se observa la dificultad que supone para Isabel el paso de una tabla de frecuencias con valores repetidos a una serie ordenada; la reconstrucción ordenada del conjunto de datos es una técnica que requiere un tratamiento específico.

En U_5 vemos el conflicto semiótico que supone para Isabel la ordenación de las colecciones de datos. En el segundo caso, el ejemplo es incorrecto ya que no ordena los datos previamente. Utiliza el recurso expresivo de trazar un recuadro alrededor del número que desea presentar como “mediana”.

2.2. Cuestión 2

Se pretende que el sujeto manifieste sus conocimientos situacionales o fenomenológicos sobre la mediana, pidiéndole que describa el tipo de situaciones en las que, a la luz de la información dada en el texto, son específicas de venir representadas por la mediana (distribuciones asimétricas o cuando los datos son ordinales). Es claro que la demanda es excesiva para Isabel: se limita a dar un ejemplo de situación similar a la que se presenta en el texto (U_6). La justificación que propone, “ya

que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos”, no menciona la circunstancia que la distribución es asimétrica. La asimetría de la distribución, o el carácter ordinal de los datos son las dos características de las situaciones que obligan a usar la mediana en lugar de la media.

2.3. Cuestión 3a

La solución del problema propuesto (U_7) es inmediata aplicando la técnica de la ordenación de la serie de datos: 15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26. Sin embargo, Isabel ha adquirido la técnica, bastante más compleja en este caso, de construir una tabla de frecuencias acumuladas. La traducción o paso de una a otra técnica y la discriminación de las situaciones óptimas de uso de cada una de ellas no ha sido trabajado de manera suficiente en el proceso de estudio. El hecho de que haya un dato repetido le lleva a preparar una tabla de frecuencias acumuladas como en las unidades U_{21} , U_{22} y U_{23} del texto. El proceso de estudio no ha enfatizado de manera suficiente la técnica de la ordenación de la serie de datos con valores repetidos y la relación entre esta técnica y el uso de la tabla de frecuencias acumuladas. Ha sido capaz de transformar la colección de datos en una tabla de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas, así como de aplicar la regla descrita en la unidad U_{23} del texto para determinar el valor de la mediana. En U_7 vemos las dudas de Isabel respecto a la condición de que los datos deben ordenarse previamente. Hace un primer cálculo de la mediana sin ordenar los valores, que en este caso particular concluye con un valor correcto (19).

En U_8 vuelve a aplicar la misma técnica, esta vez ordenando la serie de valores. Muestra un dominio seguro de esta acción, aunque con una rigidez fuerte y el empleo de notaciones y cálculos innecesarios (expresión del recuento de frecuencias acumuladas y la suma de las frecuencias acumuladas, que en este caso es impertinente).

2.4. Cuestión 3b

En U_9 se muestra la rigidez de la técnica seguida, acorde con la definición del libro en el caso de datos repetidos: “primer valor que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos”. En efecto, $10/2 = 5$, $5+1 = 6$, que se alcanza al llegar al valor 19. Tanto en U_8 como en U_9 se pone de manifiesto que Isabel confunde la noción de variable con la de valor: “variable 19”.

En U_{10} se requiere hacer una interpretación de la propiedad de representatividad de las medidas de tendencia central que no ha sido

formulada de manera explícita en el texto. El ejemplo de situación particular que se le ha propuesto es similar al estudiado en el proceso instruccional: la distribución de los datos es asimétrica porque hay un valor atípico. Este tipo de situación ha sido reconocido por Isabel en la situación dada.

2.5. Síntesis de conocimientos personales de Isabel sobre la mediana

El significado sistémico que atribuye Isabel a la mediana, evaluado mediante la prueba escrita, se compone de los elementos que incluimos a continuación. Dado que las cuestiones y problemas de la prueba son una muestra de las que se pueden proponer, este significado tendrá un carácter empírico.

Lenguaje

Términos y notaciones específicas del tema como “mediana”, “M”. La escritura del cálculo de las frecuencias acumuladas ha resultado un recurso ineficaz. En el texto se presenta esa escritura como explicación del cálculo de las frecuencias acumuladas, pero Isabel lo ha interpretado como inherente a la técnica del cálculo de la mediana. Introduce un elemento ostensivo original para designar la media: el recuadro del valor correspondiente. La disposición tabular de los datos ha resultado un recurso poco flexible en este caso.

Situaciones

Reconoce como apropiado para el uso de la mediana el tipo de situaciones en las cuales existe un valor atípico. También resolvió correctamente un problema en el que los datos eran ordinales (calificaciones categóricas de puntuaciones escolares), que es mencionada en el texto, sin que se desarrolle un ejemplo.

Acciones / técnicas

Selección del valor central de la serie de datos sin ordenación previa (incorrecta). Selección del valor central de la serie de datos con ordenación previa. Cálculo del promedio de los dos datos centrales cuando el número de datos es par. Cálculo de la mediana como media de los dos datos centrales. Técnica de cálculo de la mediana con datos repetidos y número total elevado de datos: Tabulación del conjunto de datos; cálculo de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas; cálculo de la mitad del número de datos; identificación del valor de la variable que corresponde a una frecuencia acumulada igual o inmediatamente superior a la mitad del número de datos.

Conceptos

La mediana como dato central. Media aritmética. Frecuencia acumulada. La variable como valor (confusión).

Propiedades

La mediana como valor de la variable estadística. La mediana es el número al que más se acercan un número de datos. Número más representativo que la media aritmética.

Argumentaciones

Justifica que la mediana se debe aplicar en la distribución de los sueldos de las personas, “ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos”. (Justificación insuficiente, pero acorde con el tipo de justificación dada en el texto). Justifica el uso de la técnica de cálculo de la mediana mediante las frecuencias acumuladas “porque hay un dato que se repite”. No ha tenido en cuenta la justificación que se da en el texto, “cuando el número de datos es grande”.

3. Dialéctica entre significados institucionales y personales

El análisis de la trayectoria cognitiva del proceso nos permite tomar conciencia tanto de la complejidad semiótica del mismo como de las relaciones dialécticas entre los significados locales (puestos en juego por los autores del texto) y los significados personales (correspondientes al sujeto que aprende). La complejidad se manifiesta por el hecho de que cada término o expresión debe ser interpretado al menos implícitamente por el aprendiz, y que en unos casos tal interpretación puede requerir recordar un convenio establecido previamente (“medidas de centralización” es un nombre común a la media, la mediana y la moda), pero en otros es necesario movilizar un significado sistémico previamente elaborado (por ejemplo, la media aritmética).

La dependencia entre los significados personales e institucionales se observa porque el significado de las expresiones y entidades de las que el sujeto debe apropiarse son consecuencia de las informaciones y actividades propuestas por el profesor. Si entre el significado atribuido a la mediana no figura el ser el percentil del 50%, por ejemplo, el significado del aprendiz tendrá esa carencia. Igual ocurrirá si entre las tareas problemáticas propuestas no figura el caso de variables asimétricas sin valores atípicos (componente situacional), o el desarrollo de la técnica de cálculo de la mediana en el caso de variables continuas agrupadas en intervalos de clase (componente activo), etc.

Por otra parte, el proceso de apropiación progresiva de los significados por parte del aprendiz condiciona, a su vez, a los significados locales y su secuenciación. La forma y el orden de presentación de las informaciones y tareas debe adaptarse a los conocimientos del aprendiz en cada momento, ya que tales conocimientos serán los códigos que permiten establecer las

correspondencias pretendidas por el profesor entre expresiones y contenidos. Si el receptor de la información no dispone de los códigos necesarios para interpretar un mensaje, o el emisor no aporta claves explícitas para la activación del código pertinente, se producirá un conflicto semiótico y, por tanto, una discontinuidad en el proceso instruccional. El análisis semiótico del proceso puede permitir identificar los momentos en los cuales tienen lugar tales conflictos.

En nuestro ejemplo, una expresión crítica nos parece que es “representación” de una colección de datos por un valor de la variable, que es usada de manera sistemática en el proceso, pero de la que el aprendiz no ha tenido ocasión de apropiarse mínimamente. ¿Qué significa una tal representación? ¿En qué circunstancias se requiere que una colección de datos sea representada por un valor de la variable?

Otro conflicto semiótico potencial que encontramos en el ejemplo se refiere a la secuenciación entre las entidades conceptuales y proposicionales (componente discursivo del conocimiento) y las activativas y situacionales (componente praxémico). En el texto se tiende a anticipar propiedades de la mediana (ser mejor representante que la media) y establecer la definición general, antes de presentar la práctica que constituye la razón de ser de tal definición. Se deja bajo responsabilidad del aprendiz responder a las delicadas cuestiones: ¿por qué se regula el uso de la palabra mediana de este modo?, ¿qué utilidad tiene hacerlo así y no de otra manera?, cuya respuesta permitiría dotar de sentido al proceso instruccional en su conjunto.

Otros aspectos conflictivos del “objeto” mediana son la existencia de distintos algoritmos de cálculo para el mismo objeto según los tipos de datos y la propia noción de distribución de frecuencias.

CONCLUSIÓN

La idea impulsora de nuestro trabajo es el convencimiento de que la noción de significado, a pesar de su extraordinaria complejidad, puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en didáctica de las matemáticas. A la pregunta que se hace Ernest (1997) de si “la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática (y las matemáticas)”, nosotros daríamos una respuesta afirmativa, a condición de adoptar (o incluso elaborar) una semiótica apropiada y de complementarla con otras herramientas teóricas, en particular una ontología que tenga en cuenta la variedad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

El constructo “significado sistémico” (o praxeológico) que proponemos postula la complejidad del conocimiento matemático reconociendo sus características diacrónicas y evolutivas. Permite tomar conciencia de la importancia del campo de problemas asociado a cada conocimiento, de las variables que lo estructuran y de los sistemas ostensivos utilizables, dado que el conocimiento sobreviene de las actuaciones de las personas ante las situaciones problemáticas, mediatizadas por las herramientas lingüísticas disponibles. El sistema de prácticas operativas y discursivas puede servir de ayuda en las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje, para orientar la búsqueda y selección de muestras representativas de las prácticas que caracterizan la competencia y comprensión matemática en cada contexto institucional. Como hemos estudiado en Godino y Batanero (1998) las nociones de *semiometría* (determinación de significados) y *ecología de significados* (relaciones y dinámica entre distintos significados) pueden ayudar a definir una problemática de investigación para la didáctica de las matemáticas que tenga en cuenta las dimensiones personales e institucionales de la cognición matemática y sus mutuas interacciones.

Por otro lado, en el análisis de las actuaciones de los alumnos y profesores en el aula nos interesa con frecuencia fijar la atención en procesos interpretativos específicos y en las dificultades inherentes a los mismos. Para este análisis la tipología de objetos y facetas desde las cuales se pueden considerar, que hemos sintetizado en la figura 1, se revela como un instrumento necesario. Pensamos que la metodología de *análisis semiótico* que hemos desarrollado y aplicado en este trabajo puede ser un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de “microscópico”, permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones en la realización de una tarea o en un acto de comunicación matemática. A un nivel más general permite describir la estructura de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (sean personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos *conflictos semióticos* pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea

abordar con criterios rigurosos el diseño, implementación y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

- ARRIECHE M. (2002), *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Granada: Universidad de Granada. [<http://www.ugr.es/local/jgodino>]
- BAKER G.P. y HACKER P.M.S. (1985), *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations* (Vol. 2). Glasgow: Basil Blackwell.
- BLUMER H. (1969), *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- BOSCH M. y CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(1) 77-124.
- CASSIRER E. (1964), *Filosofía de las formas simbólicas* (1971). México: Fondo de Cultural Económica.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1) 73-112.
- CHEVALLARD Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 17(3) 17-54.
- CHEVALLARD Y., BOSCH M. y GASCON J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori e ICE.
- COBB P. (1989), Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 9(2) 32-42.
- COBB P. y BAUERSFELD H. (eds.) (1995), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale (N.Y.): Lawrence Erlbaum.
- COBB P., YACKEL E. y MCCLAIN K. (2000) (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. London: Lawrence Erlbaum.
- CONTRERAS A., FONT V., LUQUE L. y ORDOÑEZ L. (2001). Un análisis semiótico de la noción de límite de una función. V *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Almería, Septiembre 2001).
- DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5 37-65.
- ELLERTON N.F. y CLARKSON P.C. (1996), Language factors in mathematics teaching and learning. En A. J. Bishop et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer.
- ERNEST P. (1993), Mathematical activity and rhetoric: A social constructivist account. En I. Hirabash, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (eds.), *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. II-238-245). Japan: University of Tsukuba.

- ERNEST P. (1997), Introduction: Semiotics, mathematics and mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 10. [<http://www.ex.ac.uk/~PERnest/pome10/content.htm>]
- FONT V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. Barcelona: Universitat de Barcelona.
- FONT V. (2000b), Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 14 1-35. [<http://www.ex.ac.uk/~PERnest/pome14/contents.htm>]
- GODINO J.D. (1996), Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-424). Valencia: Universidad de Valencia.
- GODINO J.D. (2001), Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas. *XVI Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (Huesca, 31 Marzo 2001) [<http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/siidm/Huesca/Confrontación.pdf>]
- GODINO J.D. y BATANERO C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14(3) 325-355.
- GODINO J.D. y BATANERO C. (1998), Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- GODINO J.D. y RECIO A.M. (1998), A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (eds.) *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-8). South Africa: University of Stellenbosch.
- HJEMSLEV L. (1943), *Prolegómenos a una teoría del lenguaje* (1971). Madrid: Gredos.
- KIERAN C., FORMAN E. y SFARD A. (2001), Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 46 1-12.
- MORIN E. (1977), *El método I; la naturaleza de la naturaleza* (1986). Madrid: Cátedra.
- ORTIZ J.J. (1999), *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de bachillerato*. Granada: Universidad de Granada.
- PEIRCE C.S. (1965), *Obra lógico-semiótica* (1987). Madrid: Taurus.
- PIAGET J. (1979), Los problemas principales de la epistemología de la matemática. En PIAGET, J. (director), *Tratado de lógica y conocimiento científico. 3: Epistemología de la matemática*. Buenos Aires: Paidós.
- PIMM D. (1995), *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- RECIO A.M. (1999), *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Granada: Universidad de Granada.
- ROA R. (2000), *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Granada: Universidad de Granada.

- SAUSSURE F. (1915), *Curso de lingüística general* (1991). Madrid: Alianza.
- SIERPINSKA A. (1994), *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- SIERPINSKA A y KILPATRICK J. (1998) (eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer.
- STEINBRING H. (1997), Epistemological investigation of classroom interaction in elementary teaching. *Educational Studies in Mathematics*. 32 49-92.
- TAUBER L. (2001), *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Sevilla: Universidad de Sevilla. [<http://www.ugr.es/local/batanero>]
- ULLMANN S. (1962), *Semántica. Introducción a la ciencia del significado* (1978). Madrid: Aguilar.
- VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2/3) 133-170
- VILE A. y LERMAN S. (1996), Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 395-402). Valencia: Universitat de Valencia.
- VYGOTSKI L.S. (1934), *Pensamiento y lenguaje* (1993). Madrid: Visor.
- WITTGENSTEIN L. (1953), *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

ANEXO 1

PROCESO DE ESTUDIO DE LA MEDIANA EN UN LIBRO DE 3º DE ESO⁹

<p>Mediana de un número impar de datos</p> <p>La mediana es el dato central.</p> <p style="text-align: center;"><u>Sueldos</u></p> <p style="text-align: center;">60.000 pts 70.000 pts 80.000 pts 90.000 pts 380.000 pts</p> <p>Mediana = 80.000 pts</p> <p>Mediana de un número par de datos</p> <p>La mediana es la media de los dos datos centrales.</p> <p style="text-align: center;"><u>Sueldos</u></p> <p style="text-align: center;">70.000 pts 80.000 pts 90.000 pts 380.000 pts</p> <p>Mediana = 85.000 pts</p> <p>◆E17◆</p>	<p>La mediana</p> <p>Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos ◆, ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos. ◆ Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos, ◆ como ocurre en el siguiente ejemplo: <i>En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son 60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos? ◆</i></p> <p>Calculemos la media:</p> $X = (60.000 + 70.000 + 80.000 + 90.000 + 380.000) : 5 = 136.000 \text{ pts} ◆$ <p>Es evidente que esta media no representa bien a los sueldos de los trabajadores de la oficina, ya que los sueldos de cada una de las cinco personas están bastante alejados de las 136.000 pts. Esta falta de representatividad de la media es debida a la existencia de un sueldo muy elevado (380.000 pts) comparado con los demás, que influye en la media. ◆</p> <p>En este caso, la mediana resulta ser un número más representativo que la media aritmética. ◆</p> <p>La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él. ◆</p> <p>La mediana se obtiene ordenando en forma creciente los cinco sueldos y eligiendo aquel que deja por debajo el mismo número de sueldos que por arriba. Como el número de datos es impar, la mediana es el dato central.</p> <p style="text-align: center;">60.000 pts, 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts, 380.000 pts.</p> <p>La mediana de los cinco sueldos es 80.000 pts, ◆ es decir, $Me = 80.000$. ◆</p> <p>Cuando el número de datos es par, ◆ la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales. ◆ Por ejemplo, si en la oficina que hemos considerado antes hay sólo cuatro empleados con sueldos de 70.000 pts, 80.000 pts, 90.000 pts y 380.000 pts, ◆ la mediana es:</p> $Me = (80.000 + 90.000) : 2 = 85.000. ◆$ <p>Como se ve, también en este caso la mediana deja por encima el mismo número de datos que por debajo. ◆</p> <p>La mediana se puede utilizar en distribuciones de tipo cualitativo, siempre que las modalidades se puedan ordenar, como es el caso de las calificaciones (Insuficiente, Suficiente, Bien, Notable y Sobresaliente). ◆</p>	<p>U_1</p> <p>U_2</p> <p>U_3</p> <p>U_4</p> <p>U_5</p> <p>U_6</p> <p>U_7</p> <p>U_8</p> <p>U_9</p> <p>U_{10}</p> <p>U_{11}</p> <p>U_{12}</p> <p>U_{13}</p> <p>U_{14}</p> <p>U_{15}</p> <p>U_{16}</p>
<p>Actividades</p>	<p>1. ◆Las calificaciones obtenidas por 7 amigos en Lengua han sido: Suficiente, Sobresaliente, Insuficiente, Notable, Bien, Insuficiente y Notable. ¿Qué calificación los representa?</p> <p>2. Las calificaciones obtenidas en Inglés por 8 alumnos han sido:</p> <p style="text-align: center;">10, 6, 7, 4, 5, 8, 2, 8</p> <p>¿Es representativa la media aritmética? ¿Y la mediana? Explicalo.</p>	

9. Santos D. y cols. (1995), *Matemáticas 3º*. Madrid: Santillana, p. 233 y 234. (ESO: Educación Secundaria Obligatoria.)

	<p>3. El peso en kilos de 8 compañeros de clase de Inglés es:</p> <p style="text-align: center;">53, 48, 47, 43, 52, 58, 62, 49.</p> <p>¿Cuál es la mediana de los 8 compañeros? ¿Cuál es la mediana, si incluimos al profesor que pesa 73 kg? ♦</p>	<p>U_{18}</p>															
<p>Tabla con frecuencias absolutas acumuladas</p> <table border="1" data-bbox="77 442 253 547"> <thead> <tr> <th>Edad</th> <th>Frec. abso.</th> <th>Frec. acum.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>13</td> <td>4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Me=14</td> <td>13</td> <td>4+13=17</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>7</td> <td>17+7=24</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>1</td> <td>24+1=25</td> </tr> </tbody> </table> <p>Mitad de los datos = 12.5</p> <p>Mediana = 14</p>	Edad	Frec. abso.	Frec. acum.	13	4	4	Me=14	13	4+13=17	15	7	17+7=24	16	1	24+1=25	<p><u>Cálculo de la mediana cuando hay datos repetidos</u></p> <p>Si queremos obtener la mediana de la edad de los 25 alumnos de la clase ♦, ordenamos en forma creciente las edades.</p> <p style="text-align: center;">13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16</p> <p>En esta serie ordenada, la mediana es el número que ocupa el lugar central, es decir, el 14, $Me = 14$. ♦</p> <p>Como escribir todos los datos ordenados en forma creciente es complicado cuando el número de datos es grande, ♦ se sigue el procedimiento de agregar a la tabla estadística una nueva columna con las frecuencias absolutas acumuladas (ver margen).</p> <p>El primer número de la columna, el 4 representa los alumnos con edad igual a 13 años.</p> <p>El segundo número, el 17, representa los alumnos con edad igual o inferior a 14 años.</p> <p>Análogo significado tienen las frecuencias acumuladas 24 y 25.</p> <p>♦ La mediana es el primer valor de la variable, que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada, inmediatamente superior a la mitad del número de datos. ♦</p> <p>Como $25 : 2 = 12.5$, la frecuencia acumulada inmediatamente superior a 12.5 es 17; luego $Me = 14$.</p>	<p>U_{19}</p> <p>U_{20}</p> <p>U_{21}</p> <p>U_{22}</p> <p>U_{23}</p>
Edad	Frec. abso.	Frec. acum.															
13	4	4															
Me=14	13	4+13=17															
15	7	17+7=24															
16	1	24+1=25															

ANEXO 2

SIGNIFICADO REFERENCIAL DE LA MEDIANA

Con el término “mediana” se designa un sistema de prácticas descriptivas, actuativas y discursivas (una praxeología u organización matemática) cuyos elementos característicos describimos a continuación.

Elementos lingüísticos

El valor de la variable estadística que resuelve la clase de situaciones descrita se denomina y simboliza de diversos modos:

- Mediana (M, Me), percentil del 50% (P50%), 2º cuartil (Q_2), 5º Decil (D5), $F^{-1}(1/2)$.
- Abscisa del punto de la curva empírica de distribución cuya ordenada es $1/2$.
- Abscisa del punto del polígono acumulativo de frecuencias absolutas (respect. relativas) cuya ordenada es $n/2$ (respect. 0.5).
- Gráfico del tronco en el que se muestran los valores atípicos y la mediana.

Elementos situacionales

El campo de problemas de cuya resolución emerge el objeto mediana son aquellos en las cuales se requiere determinar un valor representativo de los valores de una variable estadística en los siguientes casos:

- La variable es de tipo ordinal.
- La variable se mide según una escala de razón pero es asimétrica, o bien presenta valores atípicos (lo que haría poco representativa la media).
- Se requiere estimar el valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es desconocida con una muestra pequeña (en este caso la mediana de la muestra es un estimador mejor que la media porque no es sensible a los valores atípicos).

Elementos actuativos

Las situaciones-problemas descritas se pueden resolver aplicando la siguiente técnica general:

- Ordenación de los datos de menor a mayor.

- Identificación del valor central M , o sea el valor de la variable tal que la mitad tiene un valor menor o igual que M , y la otra mitad mayor o igual que M .
- Si se trata de una variable aleatoria la técnica general será resolver el siguiente sistema de inequaciones: $F(x^-) \leq 1/2$; $F(x^+) \geq 1/2$ [F , función de distribución]

Esta técnica general se concreta en otras específicas según que la variable estadística sea discreta (con número par o impar de valores), haya datos repetidos, o se trate de una variable continua cuyos datos se agrupan en intervalos de clase. La técnica se adapta o generaliza según los datos vengan dados por diversos ostensivos:

- Datos directos (en forma de listado).
- Datos presentados en tablas de frecuencias.
- Datos presentados en diagrama del tronco.
- Datos presentados en un polígono acumulativo de frecuencias.

La disponibilidad de ordenadores introduce también cambios en las técnicas de cálculo. Si el problema es inferencial se calcula un intervalo de confianza.

Elementos conceptuales

Definición 1. La mediana es el valor de la variable estadística que divide en dos subconjuntos de igual cardinal al conjunto de datos de la población supuestos ordenados por valor creciente del carácter.

Definición 2. La mediana de una distribución de frecuencias de una variable estadística ($F(x)$) es el valor M solución del sistema de ecuaciones, $F(M) \neq 1/2$, $F(M) \leq 1/2$.

Definición 3. La mediana de una variable estadística es el valor de la variable tal que la ordenada correspondiente a dicho valor en el diagrama acumulativo de frecuencias absolutas es igual a $n/2$, siendo n el número de datos.

Definición 4. La mediana de una variable estadística es el valor de la variable tal que la ordenada correspondiente a dicho valor en el diagrama acumulativo de frecuencias relativas es igual a 0.5.

Definición 5. La mediana de una variable estadística es el percentil del 50%. (el segundo cuartil; el 5° decil)

...

Elementos proposicionales

Propiedades estadísticas

E_1 . La mediana es una medida de tendencia central, aunque puede que no coincida con el punto medio del recorrido. Se puede adoptar como valor típico o representativo de un conjunto de datos, tanto si la variable es cuantitativa medida en escala de razón, de intervalo u ordinal. (Ser representativo quiere decir que el valor M está próximo a la mayor parte de los datos).

E_2 . La media ponderada de las desviaciones absolutas de los valores x_i de la variable estadística respecto a un valor a es mínima si $a = M$.

E_3 . La mediana M no queda afectada por cambios en los valores menores que M (respec. mayores) si esos cambios hacen que dichos valores sigan siendo menores (respec. mayores) que M (no se ve afectada por valores atípicos).

E_4 . En una distribución simétrica la mediana coincide con la media y la moda.

E_5 . Si la distribución es asimétrica a la derecha el orden en que aparecen los tres estadísticos de posición central es moda-mediana-media. Si la asimetría es la izquierda el orden es media-mediana-moda (para distribuciones unimodales).

E_6 . Si los datos son ordinales la mediana existe, mientras que la media no tiene sentido.

E_7 . Si la distribución es asimétrica la mediana es una medida de centralización preferible a la media.

E_8 . La mediana es un dato (información contextualizada) y por tanto tiene las dimensiones de la variable estadística correspondiente (kg, m. etc.).

....

Propiedades numéricas

N_1 . La mediana está comprendida entre el mínimo y el máximo valor de la variable estadística.

N_2 . La mediana puede no coincidir con ninguno de los valores de los datos (en el caso de indeterminación, número par de valores en distribuciones discretas, o cuando se interpola dentro de un intervalo de clase en variables continuas).

N_3 . La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior.

...

Propiedades algebraicas

A_1 . No es una operación interna en el conjunto numérico empleado.

A_2 . Conserva los cambios de origen y de escala.

A_3 . No tiene elemento neutro ni elemento simétrico.

A_4 . No tiene la propiedad asociativa.

...

Elementos validativos

Son las argumentaciones que establecen la validez de las proposiciones enunciadas y la equivalencia de las diversas definiciones.