EL SENTIDO NUMÉRICO COMO ARTICULACIÓN FLEXIBLE DE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LOS NÚMEROS[1]

Juan D. Godino[(1)], Vicenç Font[(2)], Patricia Konic[(3)] y Miguel R. Wilhelmi[(4)]

[(1)] Universidad de Granada; [(2)] Universidad de Barcelona; [(3)] Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina); [(4)] Universidad Pública de Navarra

Resumen:

Se analiza el sentido numérico, tal como se entiende en el NCTM, desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático, mostrando que se puede interpretar como el significado global sistémico-pragmático de los números. Esta visión se aplica para describir los significados parciales de las fracciones y nociones relacionadas.

1. Noción de sentido numérico: su inclusión en las orientaciones curriculares

La expresión "sentido numérico" es relativamente nueva en educación matemática, siendo difícil de definir de manera precisa, entre otras razones porque se hace un uso del término "sentido" poco habitual. Berch (2005) compila una lista de 30 rasgos característicos del sentido numérico, incluyendo el uso de dicha noción en los estudios tanto de cognición como de educación matemática.

En términos generales se refiere a varias capacidades importantes de lo sujetos, "incluyendo cálculo mental flexible, estimación numérica y razonamiento cuantitativo" (Greeno, 1991, p. 170). El *National Council of Teachers of Mathematics* (1989) identificó cinco componentes que caracterizan el sentido numérico: significado del número, relaciones numéricas, tamaño de los números, operaciones con los números y referentes para los números y cantidades. El logro de un "buen sentido numérico" implica la adquisición de destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los números, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas. También en España el "sentido numérico" ha penetrado con fuerza en las propuestas curriculares: el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006), establece que el bloque de números y operaciones "pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos" (p. 43096).

[1] En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. (Disponible en, http://thales.cica.es/granada/)

El sentido numérico se refiere, por tanto, a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y operaciones junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos. Implica, por tanto, la posesión de una competencia que se desarrolla gradualmente.

Vemos que la expresión “sentido numérico” se usa principalmente en los primeros niveles escolares como orientación curricular para favorecer el cambio hacia una matemática contextualizada y útil, aunque ciertamente no se debe restringir a la educación primaria. El desarrollo de esta orientación ha generado un área de investigación activa, orientada a crear y evaluar estrategias de enseñanza para desarrollar el sentido numérico.

En el siguiente apartado trataremos de interpretar la noción de sentido numérico dentro del marco teórico “enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático” (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Consideramos que la noción de significado sistémico, entendido en términos pragmáticos como propone el EOS, puede ayudar a comprender la noción de sentido numérico y por tanto a planificar mejor su desarrollo a lo largo de la escolaridad.

2. Sistemas de prácticas y significados

Godino y Batanero (1994) introducen la noción de “sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al campo de problemas en el que se pone en juego un objeto matemático” como el foco de atención primario para describir el significado institucional y personal de dicho objeto matemático. En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura.

Tanto los sistemas de prácticas como los objetos emergentes están relacionados entre sí constituyendo redes o configuraciones epistémicas; la descripción de tales redes debe ser un objetivo del análisis epistemológico de una noción matemática desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje. Un proyecto global de enseñanza puede ser dividido en subsistemas de prácticas ligados a tipos específicos de problemas; para elaborar currículos y construir proyectos de enseñanza, es necesario identificar y describir estos subsistemas de prácticas y los objetos emergentes de tal actividad.

En la siguiente sección aplicamos estas ideas al caso de las fracciones y nociones relacionadas, las cuales constituyen un componente esencial del “sentido numérico” de las estructuras multiplicativas y, en particular, de los números racionales.

3. Significado sistémico de los números racionales

En la vida cotidiana aparecen diversos tipos de situaciones en que se utilizan expresiones que relacionan dos números de manera multiplicativa; tales números pueden ser divisibles entre sí o no. Estas relaciones se describen mediante fracciones, razones, decimales y porcentajes, estando ligadas usualmente a cantidades de magnitudes y a prácticas específicas según los tipos de situaciones en que participen.

El análisis semántico de las fracciones y nociones relacionadas ha sido tema de atención por diversos autores. Behr et. al. (1983) y Kieren (1988), entre otros, han sido los primeros autores que han abordado este análisis proponiendo diversas interpretaciones o subconstructos, que unos atribuyen al número racional y otros a las fracciones. Coinciden en que los conceptos centrales son los de cociente, razón, operador y una versión de la relación parte-todo. Vergnaud (1983) incluye el análisis de las fracciones en el desarrollo de las estructuras multiplicativas. A diferencia de los autores citados más arriba, que utilizan los diferentes sentidos de la fracción para clasificar *conceptos* relacionados con la noción de fracción, Vergnaud aborda las interpretaciones de las fracciones con la intención de clasificar los *problemas.*

Como afirma Ohlsson (1988), los análisis propuestos por los autores citados son difíciles de reconciliar. La propuesta de Ohlsson (1988) no ha perdido vigencia[2]. Este autor realiza un análisis sistemático del conjunto de posibles interpretaciones de las fracciones, estudiando las relaciones entre las mismas y asignándole una estructura global. Ohlsson elabora un modelo teórico sobre los significados asociados al número racional que clarifica esta importante noción. Incluimos a continuación una síntesis del modelo de Ohlsson y nuestra interpretación de dicho modelo desde el "enfoque ontosemiótico".

Para Ohlsson, de acuerdo con los puntos de vista formalistas y convencionalistas en matemáticas, un constructo matemático adquiere su significado (matemático) a partir de la teoría – axiomas y teoremas - en el que está incluido. Las proposiciones de una teoría funcionan como los postulados de significado para los constructos de esa teoría.

Por otra parte, los constructos matemáticos son útiles porque se pueden aplicar al mundo real y estas aplicaciones aportan nuevos significados a los constructos matemáticos. La descripción de una situación del mundo real en términos de un constructo matemático implica al menos las siguientes cuatro entidades (Ohlsson, 1988, p.58): (a) un constructo matemático, (b) una situación del mundo real, (c) un concepto de lenguaje natural que especifica el sentido del constructo dentro de la aplicación particular, (d) una aplicación entre el constructo matemático y la situación del mundo real que especifica la referencia del constructo dentro de la aplicación particular. Ohlsson considera, de acuerdo con la distinción entre sentido y referencia introducida por Frege (1998), que una aplicación al mundo empírico asigna tanto un sentido como

---

[2] Un indicador de la importancia y profundidad del trabajo de Ohlsson es que se siguen realizando investigaciones sobre los diversos significados de número racional y, sin embargo, se evidencia una falta de comprensión de las aportaciones de Ohlsson. Un ejemplo de ello es el trabajo de Lamon (2007).

una referencia a un constructo matemático. Este tipo de significado lo llama Ohlsson significado aplicacional. Un constructo matemático puede tener múltiples significados aplicacionales si se le asignan diferentes correspondencias referenciales en diferentes aplicaciones (p. 59).

Después de presentar su modelo para los constructos matemáticos Ohlsson los aplica al caso de las fracciones. Comienza haciéndonos ver que "*x/y*" simboliza el par ordenado <x, y>, pero que un par ordenado es una entidad lógica más que una entidad matemática. Es necesario asignar al par ordenado un papel dentro de una teoría matemática para que el símbolo "*x/y*" haga referencia a una noción matemática. De hecho, el conjunto de los números enteros puede definirse como clases de equivalencias de pares ordenados en el producto cartesiano $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Pero, aún limitándonos a los pares ordenados <*x*, *y*> $\in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ con la intención expresa de definir la noción de número racional, el par ordenado <*x*, *y*> puede hacer referencia a objetos que corresponden a cuatro "teorías matemáticas" diferentes: (1) la función cociente; (2) un número racional; (3) un vector binario; (4) un tipo particular de función compuesta.

Este punto de vista concuerda con los postulados del EOS que consideran que la unidad "natural" para realizar análisis epistémicos es la configuración epistémica y no un objeto aislado. Puesto que un objeto (por ejemplo el símbolo "*x/y*") se puede enmarcar dentro de varias configuraciones epistémicas diferentes, se puede entender, de manera metafórica, que el objeto matemático en cuestión se "sitúa" en un "lugar" o en "otro" — es decir, queda relacionado con un tipo de lenguaje, un tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentos, unas determinadas definiciones, situaciones-problema y proposiciones — . Desde esta perspectiva, cada configuración epistémica sitúa al objeto en cuestión en un determinado "nicho ecológico"; ya dentro de una perspectiva puramente formal de las matemáticas (*configuraciones epistémicas formalistas*), ya para la definición de nociones, la justificación de proposiciones o el establecimiento de conexiones matemáticas (*configuraciones epistémicas intramatemáticas*), ya para la resolución de problemas contextualizados (*configuraciones epistémicas extramatemáticas*).

En el EOS se considera el significado de un objeto matemático como un sistema complejo de prácticas en las que cada una de las diferentes configuraciones epistémicas en las que se engloba el objeto en cuestión posibilita un subconjunto de prácticas de dicho sistema. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). Pero, en cada subconjunto de prácticas la configuración epistémica que engloba al objeto en cuestión es diferente, y, por tanto, se posibilitan prácticas diferentes.

Cuando se entiende el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), es posible distinguir entre *sentido* y *significado* (Ramos y Font, 2006)**,** ya que el primero se entiende como un *significado parcial*[3]. El significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son posibilitadas por una determinada configuración epistémica. Cada configuración epistémica ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Según Ohlsson, las cuatro teorías referidas a los números racionales (la función cociente; un número racional; un vector binario; un tipo particular de función compuesta) tienen diferentes aplicaciones. Los "términos cociente", tales como "fracción", "proporción", "razón", etc., refieren a esas aplicaciones. Para explicar lo que significa un término como "fracción" es necesario (a) identificar el constructo matemático subyacente y la teoría en que está inmerso, y (b) especificar cómo se aplica, o sea, especificar la clase de situaciones a la que se aplica y la correspondencia referencial entre el constructo y la clase de situaciones.

La figura 1 resume el sistema de nociones "movilizadas" por la "escritura fraccionaria *x/y*", la cual encontramos ligadas a la función cociente, número racional, vector binario y un tipo particular de función compuesta (operador multiplicativo).

Desde el punto de vista del EOS cada uno de los "conceptos cociente" incluidos en la figura 1 lleva asociada una configuración epistémica de otros objetos. El conocimiento y la comprensión del "dominio conceptual" referido por los términos cociente requieren del conocimiento y comprensión de las distintas configuraciones y de las relaciones entre las mismas.

El conocimiento, comprensión y competencia sobre el número racional (que podemos referir como el *sentido numérico racional* siguiendo la terminología del NCTM) requiere el dominio y el uso de cada una de estas configuraciones epistémicas y la articulación flexible entre las mismas.

[3] Hacemos observar que el significado global corresponde a noción de sentido en la literatura sobre "sentido numérico". Remitimos al lector a Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) para ampliar la noción de significado global y parcial (sentido) aplicadas al caso de la noción de igualdad de números reales.

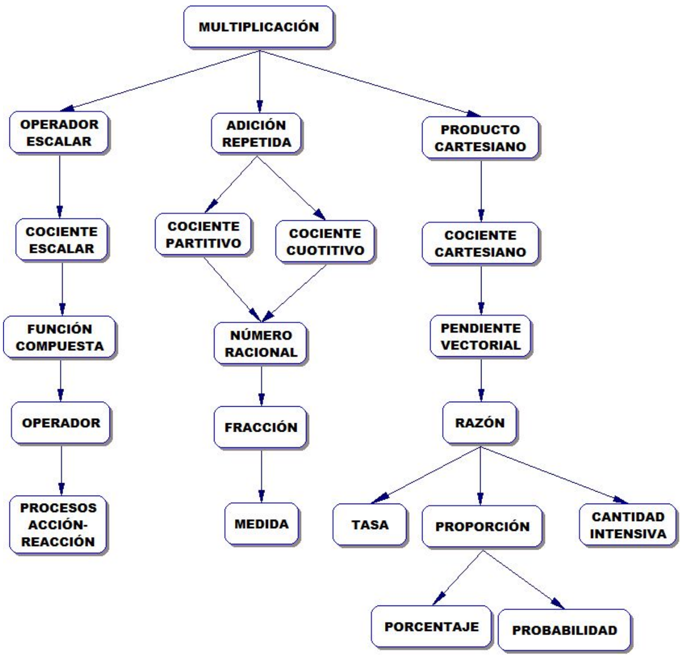

Figura 1: Relaciones entre los términos cociente (Ohlsson, 1988, 88)

No obstante, el reconocimiento del número racional como entidad matemática que organiza y articula los significados parciales asociados supone la adopción de un punto de vista más general y formal que lleva a definir **Q** como un cuerpo ordenado arquimediano, respondiendo, por tanto, su construcción a una problemática intramatemática. Desde el punto de vista educativo, conocer los números racionales, ciertamente que no se puede limitar a recitar los axiomas de un cuerpo ordenado; es necesaria la contextualización de dichos números para la resolución de situaciones extramatemáticas. Ahora bien, la formalización de **Q** (generalmente como clases de equivalencia de fracciones) excede la competencia matemática para los alumnos de primaria, siendo deseable abordar la formalización de los números racionales en niveles posteriores. Esto no quiere decir que no sea posible abordar el estudio de las fracciones, razones, proporciones, tasas, etc., pero ligadas, no a la teoría de los racionales, sino a los significados de la función cociente.

4. Reflexiones finales

Las nociones de significado sistémico-pragmático y significado parcial de un objeto matemático son herramientas teóricas para el análisis epistemológico de los productos culturales resultantes de la actividad matemática. Estas nociones proporcionan una respuesta a las preguntas: ¿Qué es un objeto o noción matemática?; en particular, ¿qué son los números racionales?; ¿Qué es conocer dicha noción?; en particular, ¿qué quiere decir conocer los números racionales?

Hay que resaltar que la noción de significado sistémico-pragmático (definido en términos de las prácticas operativas y discursivas que una persona moviliza ante una cierta clase de situaciones-problema) implica tanto la competencia para resolver los problemas, como la comprensión de los objetos intervinientes y de las relaciones entre los mismos. En consecuencia incluye, amplia y sistematiza el uso, para el caso de la noción de número (natural, racional,…), de la noción de sentido numérico.

La clasificación de las configuraciones epistémicas en formales, intramatemáticas y extramatemáticas matiza y mejora la clasificación de Ohlsson ya que en su trabajo no se distingue entre las configuraciones epistémicas formales y las intramatemáticas. Al distinguir entre las configuraciones epistémicas puestas en juego en los contextos empíricos y las configuraciones epistémicas puestas en juego en los contextos intramatemáticos, y establecer una relación de dependencia e interacción entre ambos tipos de configuraciones, se facilita la comprensión de las configuraciones de tipo mixto cuya presencia en la matemática escolar es necesaria.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Referencias:

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. y Silver, E. (1983). Rational-number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (4), 333-339.

Frege, G. (1998*). Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblat für Didaktik der Mathematik*, 39 (1-2): 127-135**.**

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (13), 170-218.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge or rational numbers: Its intuitive and formal develpment. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics y Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *Decreto de enseñanzas mínimas de la educación primaria*. Madrid: MEC.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluación standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Olhsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hierbert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535–55.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007) Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77–120.